CLASE 12/09

PROBLEMA ③ : Espirales de Cotes.

$V(r) = \frac{k}{r^2}$.

a) Ecuación de la trayectoria...

Escribo primero la energía mecánica:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r^2}.$$

De la conservación del impulso angular,

$$\vec{l} = r\hat{r} \times m r\dot{\theta}\hat{\theta} = r^2 m\dot{\theta}\,\hat{z}.$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{r^2}\left(k + \frac{l^2}{2m}\right)}_{V_{eff}(r)}$$

- Potencial repulsivo ($k>0$) y $E>0$.

$$\Rightarrow k + \frac{l^2}{2m} > 0.$$

Ecuación de la trayectoria: $r(\theta)$

Escribimos $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{l}{mr^2}r'$ (notación: $' \equiv \frac{d}{d\theta}$)

Pero sabemos que $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$.

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\left(\frac{l^2}{m^2r^4}r'^2\right) + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}r'\right)^2 = 2mE - \frac{1}{r^2}\left(\frac{l^2}{2m} + k\right)$$ → Ecuación diferencial que me da la trayectoria.

Cambio de variables, $u = \frac{1}{r}$

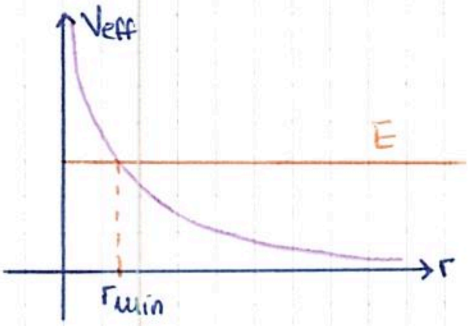
$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2m}{l^2}E - \left[u^2\underbrace{\left(\frac{l^2}{2m} + k\right)}\right]\frac{2m(1)}{l^2}$$

dependiendo del signo, voy a tener ≠ soluciones

Derivo (1) respecto a θ:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\left(1 + \frac{2km}{\ell^2}\right) = 0.$$

Con $k>0$, el potencial efectivo es siempre de la forma



r_{min} = punto de mínimo acercamiento.

Llamemos $\alpha \equiv 1 + \frac{2km}{\ell^2}$, $\alpha > 0$.

$\Rightarrow$ Tenemos que resolver $\frac{d^2u}{d\theta^2} + \alpha u = 0$.

Proponemos $u(\theta) = A\cos[\lambda(\theta - \theta_0)]$

Donde: $\lambda^2 = \alpha$

A y θ_0 dependen de las condiciones iniciales.

En particular, si volvemos a la ecuación

$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2m}{\ell^2}\left[2mE - u^2\left(\frac{\ell^2}{2m} + k\right)\right]$ y reemplazamos $u(\theta)$,

$$A^2\lambda^2 \sin^2[\lambda(\theta-\theta_0)] = \frac{4m^2E}{\ell^2} - A^2\lambda^2\cos^2[\lambda(\theta-\theta_0)]$$

$$\Rightarrow A^2\lambda^2 = \frac{4m^2E}{\ell^2}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2m}{\lambda^2\ell^2}E \longrightarrow A = \frac{\sqrt{2mE}}{\ell\lambda}$$

En términos de r, $\left(u = \frac{1}{r}\right)$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{2mE}}{\ell\lambda}\cos[\lambda(\theta-\theta_0)] \Rightarrow \frac{\ell\lambda}{\sqrt{2mE}} = r\cos[\lambda(\theta-\theta_0)]$$

$\hookrightarrow$ ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA.

Analicemos esta trayectoria.

Mirando el gráfico del V_{eff}, vemos que para cada energía E, hay un radio de mínimo acercamiento: r_{min}.

En ese radio, $\dot{r} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{r^2}\left(k + \frac{\ell^2}{2m}\right)\Big|_{\dot{r}=0} = E \Rightarrow \frac{1}{r_{min}^2}\left(k + \frac{\ell^2}{2m}\right) = E$$

$$\Rightarrow r_{min}^2 = \frac{1}{E}\left(k + \frac{\ell^2}{2m}\right) = \frac{1}{2mE}\underbrace{\left(\ell^2 + 2km\right)}_{\lambda^2 \ell^2}$$

$$\Rightarrow r_{min} = \frac{1}{\sqrt{2mE}}$$

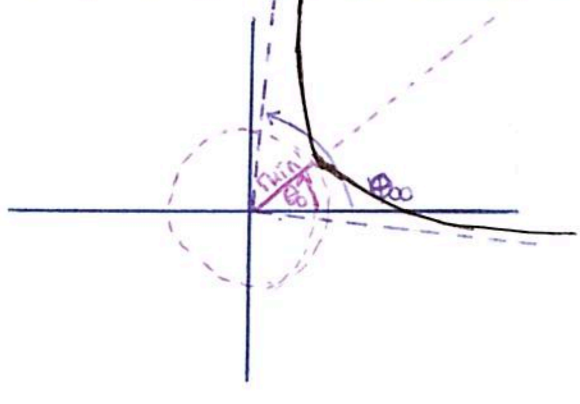
Por lo tanto, $r = \dfrac{r_{min}}{\cos[\lambda(\theta - \theta_0)]}$

- En $\theta = \theta_0$, el radio es mínimo.
- A medida que aumenta θ, el cos( ) disminuye, por lo que r aumenta.
- En algún momento el cos( ) = 0 ! $\Rightarrow$ el radio diverge

$$\lambda(\theta_\infty - \theta_0) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta_\infty = \overset{<1}{\lambda}\frac{\pi}{2} + \theta_0$$: dirección de escape hacia el ∞.

El problema es simétrico alrededor de θ_0

$\Rightarrow$ va a haber otra dirección de escape con $\theta_\infty = -\lambda\frac{\pi}{2} + \theta_0$.



¿Qué ocurre cuando $k=0$?

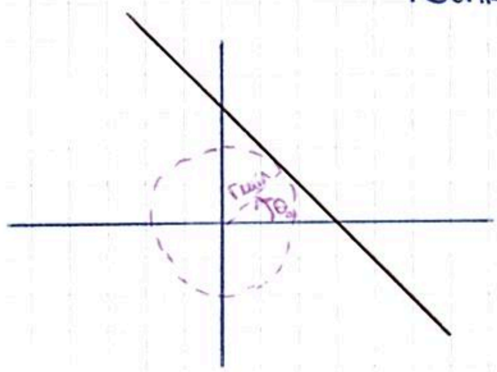
Si $k \to 0 \Rightarrow \lambda \to 1$.

Las asíntotas estarán en $\theta_0 \pm \frac{\pi}{2}$.

Tenemos una partícula libre!

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$r\cos(\theta - \theta_0) = r_{min}$ → ECUACIÓN DE UNA RECTA EN COORD. POLARES.

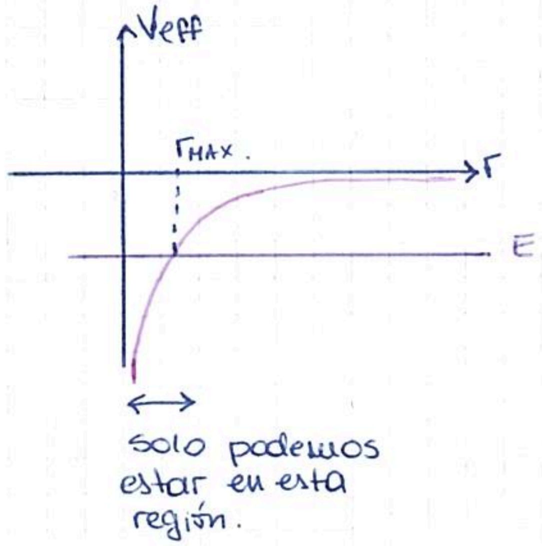


b) Potencial atractivo $\Rightarrow k<0$.

$\ell^2 < -2mk$

$E<0$.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{r^2}\left(\underbrace{\frac{\ell^2}{2m} + k}_{<0}\right)$$



La ecuación para la trayectoria va a ser análoga:

- $$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{l^2} - u^2\frac{2m}{l^2}\underbrace{\left(\frac{l^2}{2m}+k\right)}_{-\beta} \quad (3)$$

$$= \frac{2mE}{l^2} + u^2\frac{2m}{l^2}\beta$$

- $$\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{2m\beta}{l^2}u = 0 . \quad (2)$$

Resolvemos (2):

$$u(\theta) = a e^{\lambda\theta} + b e^{-\lambda\theta}$$

con $\lambda = \sqrt{\frac{2m\beta}{l^2}}$

Reemplazamos esta solución en (3):

$$\frac{du}{d\theta} = a\lambda e^{\lambda\theta} - b\lambda e^{-\lambda\theta} .$$

$$[a\lambda e^{\lambda\theta} - b\lambda e^{-\lambda\theta}]^2 = \frac{2mE}{l^2} + (ae^{\lambda\theta}+be^{-\lambda\theta})\overbrace{\frac{2m}{l^2}\beta}^{\lambda^2} .$$

$$\cancel{a^2\lambda^2 e^{2\lambda\theta}} + \cancel{b^2\lambda^2 e^{-2\lambda\theta}} - 2ab\lambda^2 = \frac{2mE}{l^2} + \lambda^2(\cancel{a^2e^{2\lambda\theta}} + 2ab + \cancel{b^2e^{-2\lambda\theta}})$$

$$\Rightarrow -4ab\lambda^2 = \frac{2mE}{l^2} .$$

$$-4ab\frac{2\cancel{m}\beta}{\cancel{l^2}} = \frac{2\cancel{m}E}{\cancel{l^2}} \Rightarrow -4ab\beta = 2E \rightarrow a = -\frac{E}{2b\beta}$$

Separemos en dos casos $\rightarrow E = 0$, $\rightarrow E \neq 0$.

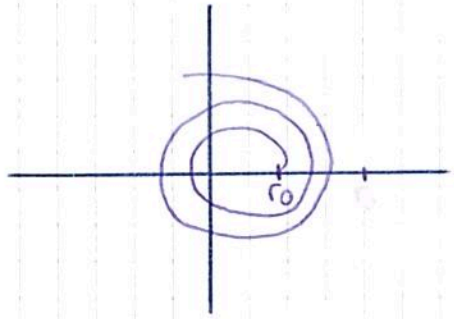
- $E = 0$: Alguna de las dos constantes, a ó b será 0.

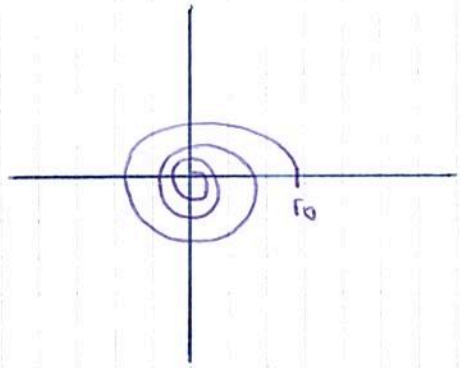
Si $a = 0$

$\Rightarrow u(\theta) = be^{-\lambda\theta}$

Si $b = 0 \Rightarrow u(\theta) = ae^{\lambda\theta}$

} ambas soluciones son espirales, cambia el sentido de giro.





$u(\theta) = be^{-\lambda\theta}$

$\frac{1}{r} = be^{-\lambda\theta}$

$\Rightarrow r(\theta) = \frac{1}{b}e^{\lambda\theta}$

$u(\theta) = ae^{\lambda\theta}$

$r(\theta) = \frac{1}{a}e^{-\lambda\theta}$.

· $E \neq 0$.

$$u(\theta) = \frac{-E}{2b\beta} e^{\lambda\theta} + be^{-\lambda\theta} = \frac{-E}{2b\beta}\underbrace{\left(e^{\lambda\theta} - \frac{2\beta b^2}{E} e^{-\lambda\theta}\right)}$$

una función de este estilo será un sinh( ) o un cosh( ) dependiendo del signo de $\frac{2\beta b^2}{E}$.

Sabemos (por construcción) que $\beta>0$. En el enunciado nos dicen $E<0$.

$\frac{2\beta b^2}{E} < 0 \quad \Rightarrow u(\theta) = A\cosh[\lambda(\theta-\theta_0)]$

$A = \sqrt{\frac{|E|}{\beta}}$

$\rightarrow$ tenemos un movimiento acotado entre el origen y un radio máximo.

- $\cosh(0) \longrightarrow \theta = \theta_0 \Rightarrow u$ es mínimo. $\Rightarrow r$ es máximo.

$\Rightarrow \theta = \theta_0$ corresponde al máximo alejamiento del origen.

Supongamos que a $t=0$, $r = r_{MAX}$, $\theta = \theta_0 = 0$

$$\Rightarrow r = \frac{r_{MAX}}{\cosh(\lambda\theta)} \longrightarrow \text{espiral.}$$

¿Quién es r_{MAX}?

Del gráfico de $V_{eff}(r)$, se puede ver que

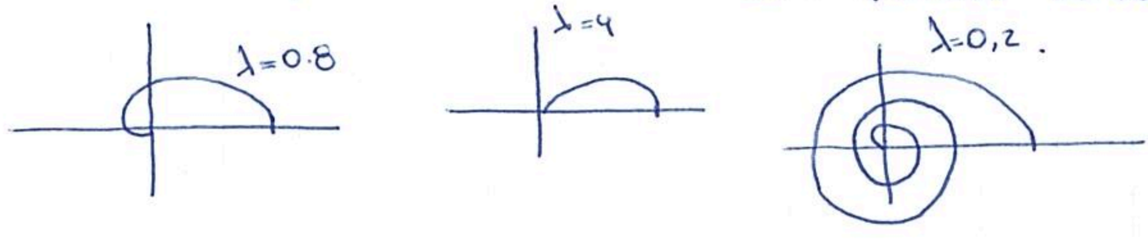
$V_{eff}(r_{MAX}) = E$

$$\Rightarrow -\frac{\beta}{r_{MAX}^2} = E \Rightarrow r_{MAX} = \sqrt{\frac{\beta}{|E|}} =$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2m\beta}{l^2}}$$

$$\beta = \frac{l^2}{2m} + k.$$

$\Rightarrow$ El valor de l rige la forma de la órbita. Mientras menor sea λ, más va a tardar la trayectoria en caer.



- Tiempo que tarda la partícula en llegar ~~a un punto de retorno~~ al origen:

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{\beta}{r^2} = E$$

$$\dot{r}^2 = \left(E + \frac{\beta}{r^2}\right)\frac{2}{m} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(E + \frac{\beta}{r^2}\right)\frac{2}{m}}$$

$$\Rightarrow dr = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\beta}{r^2}\right)}\, dt$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{\beta}{r^2}\right)}}$$

$$u = \frac{r^2}{r_{MAX}^2}$$

$$\int_0^T dt = \int_0^{r_{MAX}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{\beta}{r^2}\right)}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{r_{MAX}} \frac{dr}{\sqrt{E+\frac{\beta}{r^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{r_{MAX}} \frac{r\,dr}{\sqrt{Er^2+\beta}} = \sqrt{\frac{m}{\beta\, 2}} \int_0^{1} \frac{du}{\sqrt{1+u}\; 2}$$