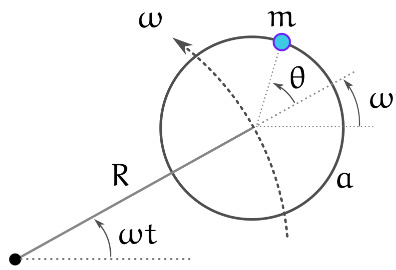
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019 - Primer parcial (resuelto)

Problema 1. Una partícula de masa m puede moverse en un plano sobre un aro de radio a. El centro del aro se mueve con velocidad angular constante ω sobre un círculo de radio R.

a) Elegir coordenadas generalizadas, escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.

b) Encontrar al menos una constante de movimiento.



■ **Solución**. Elegimos como coordenada generalizada el ángulo θ que se muestra en la figura. Tomando como plano de movimiento el plano xy y asumiendo que en $t = 0$ el centro del aro pasa por $y = 0$, la posición de la partícula es

$$\mathbf{r}(\theta, t) = R\,\hat{\rho}(\omega t) + a\,\hat{\rho}(\omega t + \theta). \tag{1}$$

Su velocidad resulta

$$\boldsymbol{v}(\theta, \dot{\theta}, t) = R\omega\,\hat{\varphi}(\omega t) + a(\omega + \dot{\theta})\,\hat{\varphi}(\omega t + \theta). \tag{2}$$

Tomando el módulo al cuadrado, queda

$$\begin{aligned} v^2(\theta, \dot{\theta}) &= R^2\omega^2 + a^2(\omega + \dot{\theta})^2 + 2aR\omega(\omega + \dot{\theta})\cos\theta \\ &= a^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega(a + R\cos\theta)\dot{\theta} + 2aR\omega^2\cos\theta + (R^2 + a^2)\omega^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto que no hay energía potencial, el lagrangiano coincide con la energía cinética:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left[a^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega(a + R\cos\theta)\dot{\theta} + 2aR\omega^2\cos\theta + (R^2 + a^2)\omega^2\right]. \tag{4}$$

A partir de aquí podríamos deducir las ecuaciones de E-L. Los cálculos se simplifican notando que el término proporcional a $\dot{\theta}$ es una derivada total, de modo que puede suprimirse sin alterar las ecuaciones de movimiento. Excluyendo también el término constante, da lo mismo trabajar con el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}^*(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\theta}^2 + 2aR\omega^2\cos\theta\right). \tag{5}$$

La ecuación de E-L es

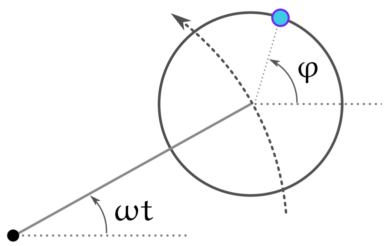
$$\ddot{\theta} + \frac{\omega^2 R}{a}\sin\theta = 0. \tag{6}$$

Debido a que el lagrangiano no depende del tiempo se conserva la función h, que no es, en este caso, igual a la energía. Explícitamente,

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \left(a^2 \dot{\theta}^2 - 2aR\omega^2 \cos\theta \right). \tag{7}$$

La manera rápida de llegar a este resultado es darse cuenta de que $\mathcal{L}^*$ tiene la misma forma que el lagrangiano de una partícula en un potencial, $\mathcal{L}^* = T - V$. Interpretado de esa manera, la energía de ese problema equivalente se conserva. Lo único que hay que hacer para escribir esa energía es cambiar el signo que aparece frente al potencial. Notar también que si hubiéramos conservado en $\mathcal{L}$ el término que era una derivada total, la función h hubiera sido lo misma: pueden demostrar que, en general, los términos que son homogéneos de grado uno en las velocidades no contribuyen a h.

■ **Solución alternativa**. Se elige la coordenada generalizada que muestra la figura.



Ahora es

$$\mathbf{r}(\varphi, t) = R\,\hat{\rho}(\omega t) + a\,\hat{\rho}(\varphi). \tag{8}$$

Entonces,

$$v^2 = R^2\omega^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2aR\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi - \omega t). \tag{9}$$

El lagrangiano resulta

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2} m \left[a^2\dot{\varphi}^2 + 2aR\omega\dot{\varphi}\cos(\varphi - \omega t) + R^2\omega^2 \right]. \tag{10}$$

La diferencia más notable respecto de la otra elección de la coordenada generalizada es que ahora el lagrangiano depende explícitamente del tiempo. Entonces h no se conserva, pero sin embargo hay una simetría equivalente. La transformación

$$\varphi + \omega\epsilon, \quad t + \epsilon \tag{11}$$

deja invariante el lagrangiano. Eso significa que

$$\omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

Si valen las ecuaciones de E-L es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{dh}{dt}. \tag{14}$$

Entonces se conserva la siguiente cantidad:

$$\mathcal{J} = \omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - h. \tag{15}$$

Por un lado tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m \left[a^2 \dot{\varphi} + aR\omega \cos(\varphi - \omega t) \right]. \tag{16}$$

Y por otro lado

$$h = \frac{1}{2} m \left(a^2 \dot{\varphi}^2 - R^2 \omega^2 \right). \tag{17}$$

Finalmente, la constante de movimiento es

$$\mathcal{J} = m\omega \left[a^2 \dot{\varphi} + aR\omega \cos(\varphi - \omega t) \right] - \frac{1}{2} m \left(a^2 \dot{\varphi}^2 - R^2 \omega^2 \right). \tag{18}$$

Completando cuadrados, multiplicando por menos uno y omitiendo términos constantes, una constante de movimiento equivalente es

$$\mathcal{J}^* = \frac{1}{2} m a^2 (\dot{\varphi} - \omega)^2 - m a R \omega^2 \cos(\varphi - \omega t). \tag{19}$$

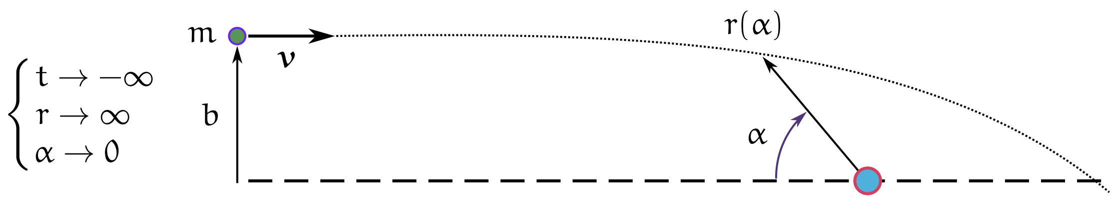
Para ver la relación con la constante hallada para la otra elección de coordenadas, hay que notar que $\theta = \varphi - \omega t$, de modo que $\mathcal{J}^*$ es igual a la función h de la ec. (7).

Problema 2. Desde la dirección $\alpha = 0$, inciden desde el infinito partículas de masa m y energía $\mathcal{E}$. En el origen hay un centro de fuerza atractivo con potencial $V(r) = -k/r^2$.

a) ¿Cuál es la sección del haz incidente cuyas partículas caen al centro de fuerza?

b) ¿Para qué parámetro/s de impacto las partículas son dispersadas hacia atrás, luego de dar una o más vueltas alrededor del origen?

Notación: $k/\mathcal{E} = r_0^2$.



■ **Solución**. La ecuación de conservación de la energía para el problema unidimensional equivalente es

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^2} = \mathcal{E}. \tag{20}$$

Usando que

$$\frac{l^2}{2m} = \frac{m v^2 b^2}{2} = b^2 \mathcal{E}, \tag{21}$$

resulta

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{k}{b^2\mathcal{E}}\right)\frac{b^2\mathcal{E}}{r^2} = \mathcal{E}, \tag{22}$$

o, introduciendo la escala de longitud $r_0 = \sqrt{k/\mathcal{E}}$,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{r_0^2}{b^2}\right)\frac{b^2\mathcal{E}}{r^2} = \mathcal{E}. \tag{23}$$

El potencial efectivo es entonces

$$V_{\text{ef}}(r) = \left(1 - \frac{r_0^2}{b^2}\right)\frac{b^2\mathcal{E}}{r^2}. \tag{24}$$

Las órbitas diferirán en carácter dependiendo de la relación entre r_0 y b. Para $b \leqslant r_0$, el potencial efectivo tiene forma de pozo (o es nulo) y las partículas caen al centro de fuerza. Para $b > r_0$, el potencial efectivo tiene forma de una barrera, y para $t \to \infty$ será $r \to \infty$: las partículas escapan al infinito.

Esto contesta a la pregunta acerca de la sección del haz incidente cuyas partículas caen el centro de fuerza: es el disco circular de radio r_0 centrado en el eje que pasa por el centro de fuerza y tiene la dirección de la velocidad inicial.

Para estudiar la dispersión de las partículas que no caen al centro de fuerza resolveremos la ecuación de la órbita. Como ya hemos visto numerosas veces, la ecuación diferencial de la órbita es

$$\frac{l^2}{2m}u'^2 + \frac{l^2}{2m}u^2 + V(1/u) = \mathcal{E}, \tag{25}$$

donde $u = 1/r$, y u' significa derivada respecto del ángulo α. Explícitamente,

$$u'^2 + \left(1 - \frac{r_0^2}{b^2}\right)u^2 = \frac{1}{b^2}. \tag{26}$$

Derivando respecto de α se obtiene la ecuación de Binet para este problema:

$$u'' + \left(1 - \frac{r_0^2}{b^2}\right)u = 0. \tag{27}$$

Si $b > r_0$, la solución es de la forma

$$u(\alpha) = A\sin\left(\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha + B\right). \tag{28}$$

La condición $u(0) = 0$ implica $B = 0$, mientras que la ec. (26) evaluada en $\alpha = 0$ da

$$A^2\left(1 - \frac{r_0^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b^2}, \tag{29}$$

es decir,

$$A^{-1} = \sqrt{b^2 - r_0^2}. \tag{30}$$

Finalmente,

$$r(\alpha) = \frac{\sqrt{b^2 - r_0^2}}{\sin\left(\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha\right)}. \tag{31}$$

La asíntota de acercamiento es $\alpha = 0$. El ángulo aumenta desde cero y la asíntota de alejamiento se encuentra cuando

$$\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{b^2}}\,\alpha_\infty = \pi, \tag{32}$$

de modo que vuelve a ser $1/r = 0$. Para que una partícula vuelva hacia atrás tiene que ocurrir que $\alpha_\infty = 2n\pi$, para n entero mayor que cero. Eso ocurre cuando el parámetro de impacto toma los valores

$$b_n = \frac{2n}{\sqrt{(2n)^2 - 1}}\,r_0. \tag{33}$$

Los primeros tres valores son

$$b_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} r_0, \quad b_2 = \frac{4}{\sqrt{15}} r_0, \quad b_3 = \frac{6}{\sqrt{35}} r_0. \tag{34}$$

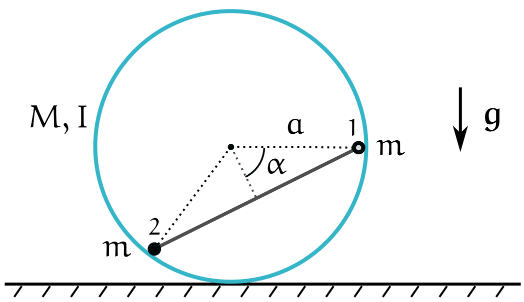
Problema 3. Dos partículas de masa m y un aro de radio a, masa M y momento de inercia I se mueven en el plano de la figura. El aro puede rodar sin deslizar sobre la superficie horizontal. Las partículas se mueven sobre el aro unidas por una barra ($\alpha < \pi/2$).

a) Elegir coordenadas generalizadas y escribir el lagrangiano.

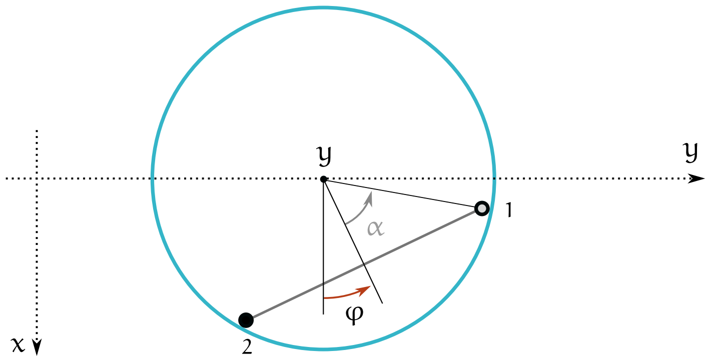
b) Encontrar al menos dos constantes de movimiento.

c) Elegir una posición de equilibrio estable, escribir el lagrangiano de pequeñas oscilaciones, dar las frecuencias y modos normales y graficar esquemáticamente cada modo.

Notación: $(M + I/a^2 + 2m)/m = A$, $g/a = \omega_0^2$.



■ **Solución**. Tomamos las coordenadas generalizadas y y φ que muestra la figura.



Debido a la condición de rodadura, el ángulo de giro del aro es $\theta = y/a$, eligiendo como orientación de referencia aquella que tiene en $y = 0$. La posición del centro del aro es $\mathbf{r}_0 = y\,\hat{y}$. La energía cinética se compone del término de traslación más el de rotación

$$T_{\text{aro}}(\dot{y}) = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{a^2}\right)\dot{y}^2. \tag{35}$$

Por otro lado, las posiciones de cada masa son

$$\mathbf{r}_1(y,\varphi) = y\,\hat{y} + a\,\hat{\rho}(\varphi+\alpha), \tag{36}$$

$$\mathbf{r}_2(y,\varphi) = y\,\hat{y} + a\,\hat{\rho}(\varphi-\alpha). \tag{37}$$

Sus velocidades,

$$\mathbf{v}_1(y,\varphi,\dot{y},\dot{\varphi}) = \dot{y}\,\hat{y} + a\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}(\varphi+\alpha), \tag{38}$$

$$\mathbf{v}_2(y,\varphi,\dot{y},\dot{\varphi}) = \dot{y}\,\hat{y} + a\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}(\varphi-\alpha). \tag{39}$$

De aquí resulta

$$v_1^2 = \dot{y}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{y}\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha), \tag{40}$$

$$v_2^2 = \dot{y}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{y}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha). \tag{41}$$

Luego, la energía cinética total es

$$T(\varphi,\dot{y},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\mu m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\Big\{2a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{y}\dot{\varphi}\big[\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi-\alpha)\big]\Big\}, \tag{42}$$

donde

$$\mu = \frac{1}{m}\left(M + \frac{I}{a^2} + 2m\right). \tag{43}$$

Teniendo en cuenta que la energía potencial es

$$V(\varphi) = -mg(x_1+x_2) = -mga\left[\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi-\alpha)\right], \tag{44}$$

el lagrangiano se escribe como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(y,\varphi,\dot y,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\mu m\dot y^2 + \frac{1}{2}m\Big\{2a^2\dot\varphi^2 + 2a\dot y\dot\varphi\big[\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi-\alpha)\big]\Big\} \\
+mga\left[\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi-\alpha)\right].
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Debido a que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de y, se conserva el impulso generalizado asociado a y, dado por

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot y} = \mu m\dot y + ma\dot\varphi\big[\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi-\alpha)\big]. \tag{46}
$$

Y debido a que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo, también se conserva la energía, que se obtiene a partir de la expresión de $\mathcal{L}$ cambiando el signo del término de la energía potencial.

Para escribir el lagrangiano de pequeñas oscilaciones, dividimos $\mathcal{L}$ por ma^2, tomamos $\theta = y/a$ como nueva coordenada generalizada, linealizamos y omitimos un término constante, con lo que resulta

$$
\mathcal{L}^*(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\mu\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(2\dot\varphi^2 + 4\dot\theta\dot\varphi\cos\alpha\right) - \omega_0^2\cos\alpha\,\varphi^2, \tag{47}
$$

donde $\omega_0^2 = g/a$. Hemos usado que

$$
\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha - \varphi\sin\alpha - \frac{\varphi^2}{2}\cos\alpha + \dots \tag{48}
$$

Llamando $\mathbf{x}$ al vector (θ,φ), el lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$
\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbb{T}\cdot\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathbb{V}\cdot\mathbf{x}, \tag{49}
$$

donde

$$
\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mu & 2\cos\alpha \\ 2\cos\alpha & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{V} = \omega_0^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{50}
$$

Definiendo $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$, el problema de autovectores y autovalores es

$$
(\lambda\mathbb{T} - \mathbb{V})\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{51}
$$

La ecuación característica es

$$
\det\begin{pmatrix} \lambda\mu & 2\lambda\cos\alpha \\ 2\lambda\cos\alpha & 2(\lambda-\cos\alpha) \end{pmatrix} = 0. \tag{52}
$$

Calculando explícitamente el determinante, queda

$$
2\lambda\left[(\mu - 2\cos^2\alpha)\lambda - \mu\cos\alpha\right]. \tag{53}
$$

La raíz $\lambda_1 = 0$ implica una frecuencia $\omega_1 = 0$ y tiene como autovector

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Este modo corresponde a una traslación, con la barra horizontal. La otra raíz es

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cos\alpha}{\mu - 2\cos^2\alpha}, \tag{55}$$

y tiene asociada una frecuencia

$$\omega_2^2 = \frac{\mu \cos\alpha}{\mu - 2\cos^2\alpha}\omega_0^2, \tag{56}$$

y un autovector

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2\mu^{-1}\cos\alpha \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

La barra y el aro giran en contrafase. Cuando $M + I/a^2$ es mucho mayor que m, resulta $\mu \gg 1$. En ese caso este modo se reduce a la oscilación de la barra como si fuera un péndulo físico. En efecto, vemos que si $\mu \gg 1$ la frecuencia asociada a este modo es

$$\omega_2^2 = \frac{g\cos\alpha}{a}. \tag{58}$$

Por otro lado, para un péndulo físico de masa M se tiene

$$\Omega^2 = \frac{Mgd}{I_c}, \tag{59}$$

donde I_c es el momento de inercia respecto del punto de giro y d la distancia de este punto al centro de masa. Aquí $M = 2m$, el momento de inercia es $I_c = 2ma^2$ y $d = a\cos\alpha$. Luego,

$$\Omega^2 = \frac{2mga\cos\alpha}{2ma^2} = \frac{g\cos\alpha}{a}, \tag{60}$$

según anticipamos.