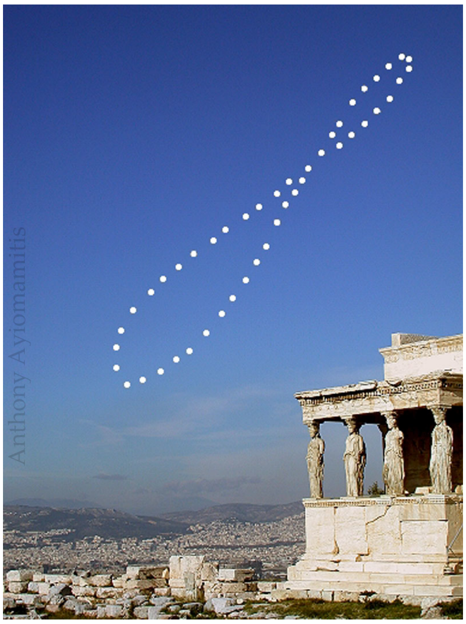
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019
Guía 6: *Cuerpo rígido*

1. Escribir la ecuación paramétrica de un círculo de radio a, centrado en el origen y cuya normal es el versor $\hat{n}$.

2. Mercurio da una vuelta alrededor del Sol en 87,9691 días. Mercurio rota sobre su eje una vez cada 58,646 días. ¿Cuánto dura un día en Mercurio?

3. **Eres un Analema**. Para un observador que mantuviera una posición y una orientación fijas respecto a las estrellas lejanas, el cielo presentaría durante años un aspecto estático, si se exceptúan los planetas y otros cuerpos menores. En cambio, en el cielo de un observador fijo a la Tierra todo está en movimiento: las estrellas trazan círculos durante la noche, el Sol atraviesa el cielo durante el día, cambia de signo a lo largo del año, su elevación máxima sobre el horizonte crece hacia el verano y disminuye al aproximarse el invierno. En este problema se trata de calcular la posición del Sol en el cielo de un observador fijo a un punto de la Tierra. En particular, queremos combinar en una misma imagen las 365 posiciones del Sol calculadas a lo largo de un año, siempre a una hora fija. El resultado de tal composición se llama Analema. Abajo se muestra un ejemplo empírico tomado sobre la ciudad de Atenas (con alrededor de una foto por semana).



Suponiendo:

- que la Tierra sigue una órbita circular de radio A con un período de 365,256 días;
- que la Tierra rota con un período de 23 h, 56 min y 4 s;
- que su eje de rotación forma 23,44° con la normal al plano de la órbita;
- que el radio de la Tierra puede despreciarse;
- que el observador se encuentra en una latitud α y una longitud λ.

Calcular:

a) La posición del Sol (azimut, altitud) relativa al horizonte del observador en función del tiempo. El azimut se mide desde la dirección norte hacia el este y la altitud se mide desde el plano del horizonte. Asumir que $t = 0$ corresponde al paso de la Tierra por el equinoccio de primavera boreal, con el punto más cercano al Sol en el meridiano de 180°.

b) La altitud máxima del Sol sobre el horizonte a lo largo de 365 días.

c) Sus 365 posiciones a una hora fija a lo largo de un año.

Grafique sus resultados y estudie cómo cambian con la latitud. Si compara con una composición fotográfica, notará que el modelo está bastante lejos de reproducir las observaciones. ¿Cuál cree que es el principal motivo de esta diferencia?

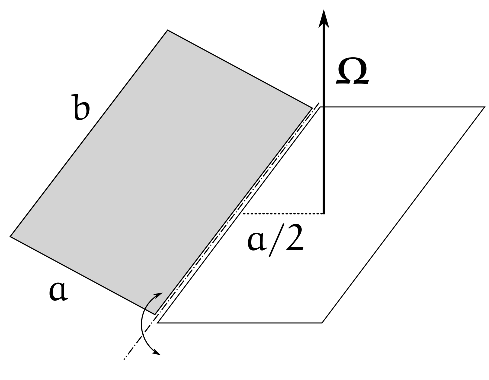
4. Muestre que, en términos de los ángulos de Euler, las componentes de la velocidad angular en el sistema de ejes fijo al espacio son

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot\theta \cos\phi + \dot\psi \sin\theta \sin\phi \\ \omega_y &= \dot\theta \sin\phi - \dot\psi \sin\theta \cos\phi \\ \omega_z &= \dot\psi \cos\theta + \dot\phi. \end{aligned}$$

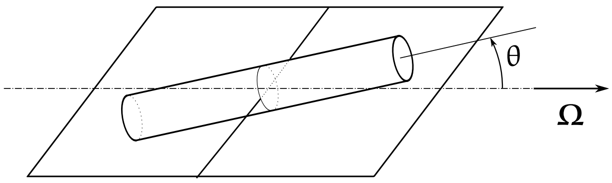
5. Una placa rectangular tiene lados a y b. La placa se mantiene fija por uno de sus lados a un marco que está en el plano horizontal. El marco tiene dimensiones ligeramente más grandes que las de la placa, para permitirle a esta girar libremente alrededor de su lado fijo, como si fuera una puerta. A su vez, el marco rota alrededor de su centro con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$, como muestra la figura.

a) Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad. ¿Existe algún punto de equilibrio estable?

b) Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad. ¿Existe algún punto de equilibrio estable?



6. Un cilindro circular sólido de masa m, radio a y largo l está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa. Este eje gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$. Suponiendo $l > \sqrt{3}a$, encontrar las posiciones de equilibrio estable y las frecuencias de oscilación para pequeños apartamientos del equilibrio.



7. Un disco homogéneo de masa m y radio a es arrojado hacia arriba.

   a) Mostrar que la dinámica se desacopla en una parte de traslación y otra de rotación alrededor del centro de masa.

   b) Escribir el lagrangiano de rotación usando los ángulos de Euler.

   c) Mediante las integrales de movimiento, definir un problema 1D para θ.

   d) Suponer que las condiciones iniciales son $\dot{\psi}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, $\varphi(0) = \psi(0) = \theta(0) = 0$, $|\dot{\theta}_0| \ll \omega_0$. Demostrar que $\hat{e}_3$ realiza un movimiento que tiene el doble de la frecuencia que el movimiento que realizan $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$. Es decir: el plano del disco da dos oscilaciones por cada vuelta que da el disco en torno a su eje.

8. Un giróscopo rota alrededor del eje x_3 con velocidad angular $\Omega_3 = \omega$. Su momento de inercia axial es I_3 y el momento de inercia alrededor de cualquier eje en el plano x_1x_2 es I. Inicialmente $\theta = \pi/2$, $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Un peso $m\mathbf{g}$ está fijo sobre el eje x_3 a una distancia d del origen.

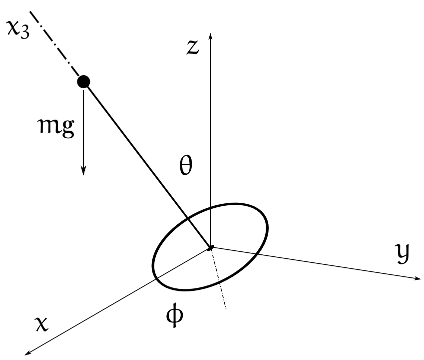
   a) Escribir las ecuaciones de Euler para las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ respecto del sistema fijo al cuerpo.

   b) Escribir esas ecuaciones en términos de θ, ϕ y ψ y sus derivadas.

   c) Verificar que las mismas ecuaciones se obtienen a partir de un lagrangiano, usando como coordenadas los ángulos de Euler.

   d) Linealizar las ecuaciones obtenidas bajo la suposición de que $\theta \simeq \pi/2$ y las velocidades $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ son pequeñas.

   e) Resolver las ecuaciones linealizadas e interpretar los resultados.

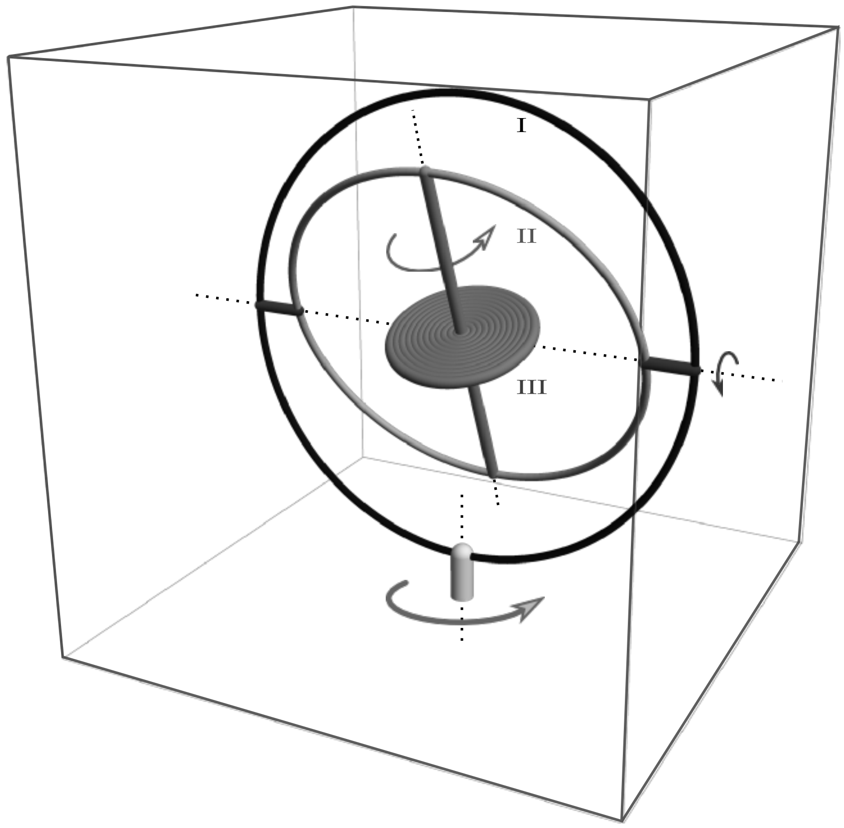


9. Un giróscopo está construido de la siguiente manera:

   I) un marco circular exterior que se mantiene siempre sobre el plano vertical y que puede girar alrededor del eje z.

   II) un marco circular interior, montado sobre el marco exterior como muestra la figura.

   III) una peonza simétrica, montada a su vez sobre el marco interior.



Los dos marcos tienen el mismo tensor de inercia respecto de su centro de masa, con momentos principales $I_a = I_b$ e $I_c = 2I_a$. La peonza tiene momentos principales de inercia $I_1 = I_2 \equiv I$ e I_3 respecto de su centro de masa. El giróscopo está centrado, de modo que los centros de masa de los tres elementos siempre están en reposo.

   a) Elegir coordenadas y escribir el lagrangiano.

   b) ¿Es equivalente al problema de un giróscopo en donde no se tenga en cuenta la inercia de los marcos pero se modifiquen los momentos I e I_3 de la peonza?

   c) Encontrar al menos 3 constantes de movimiento, expresadas en términos de las coordenadas generalizadas y sus velocidades.

   d) Reducir el problema a un problema unidimensional para un solo grado de libertad.

10. Demostrar que si un cuerpo rígido tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ respecto de un sistema de ejes con versores $\hat{e}_i$, que a su vez está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$ respecto de un sistema de ejes con versores $\hat{x}_i$, entonces la velocidad angular del cuerpo rígido respecto de este sistema es $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

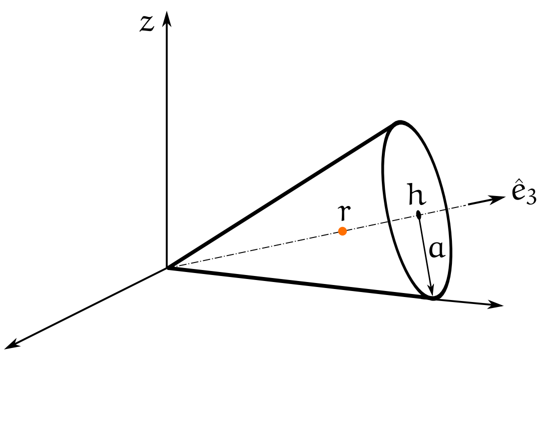
11. Un girocompás consiste en un cuerpo rígido simétrico montado de tal manera que está restringido a moverse en un plano horizontal paralelo a la superficie de la Tierra. Elegir un par de coordenadas generalizadas y escribir el lagrangiano para un girocompás en un punto fijo de la superficie terrestre a una latitud $\pi/2 - \theta_0$. Mostrar que la componente de la velocidad angular ω_3 a lo largo del eje de simetría se conserva. Mostrar que, si $\omega_3 > (I_1/I_3)\omega_0 \sin\theta_0$, donde ω_0 es la velocidad angular de rotación de la Tierra, entonces el eje de simetría oscila en el plano horizontal alrededor de la línea norte-sur. Encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

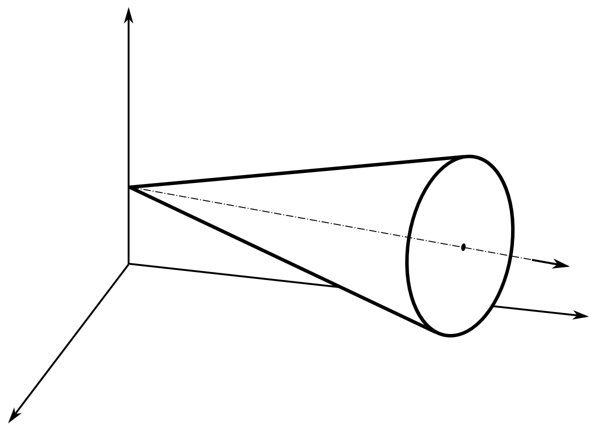
12. Una esfera de radio a rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. Encontrar las ecuaciones de movimiento mediante dos métodos: i) a partir de las ecuaciones para la fuerza y el torque, ii) usando el principio de D'Alembert y multiplicadores de Lagrange.

13. Una esfera de radio a rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. El plano gira alrededor del origen con velocidad angular $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$. Encontrar las ecuaciones de movimiento, en especial las correspondientes al centro de masa. Trate de mantener sus cálculos lo más vectoriales que pueda.

14. Una esfera homogénea de radio a se mueve sin deslizar por la superficie interna de un cilindro vertical de radio b. Hay gravedad. Determine la ley de movimiento de la esfera, en especial cómo depende con el tiempo su altura dentro del cilindro.

15. El centro de la base de un cono se mueve sobre un círculo con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$. En el primer caso, el cono rota sin deslizar apoyado sobre el piso a lo largo de una generatriz. En el segundo caso, rota sin deslizar con su eje en un plano horizontal y su base perpendicular al piso. En los dos casos, el vértice está fijo sobre el eje z. El radio de la base es a, la altura del cono es h, su masa es m, sus momentos principales de inercia respecto del centro de masa son I e I_3. El centro de masa está a una distancia r del vértice. (Todos datos). Encontrar la energía cinética en cada caso.





16. Es una observación empírica (puede hacer la prueba con un libro) que, si se arroja un objeto con los tres momentos principales de inercia distintos, de tal manera que gire alrededor de un eje principal con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento

es estable, pero si se lo arroja tratando de que gire alrededor del eje principal con momento intermedio, el movimiento es muy irregular. Utilizando las ecuaciones de Euler, muestre que cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es estable, y es inestable si el eje corresponde al momento intermedio. (*Sugerencia:* Suponga que inicialmente la velocidad angular es casi paralela a un eje principal y vea cómo evolucionan las componentes pequeñas).

17. Considerar los siguientes incisos:

   q) Dado un punto O fijo al cuerpo, si $\boldsymbol{v}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ son perpendiculares, mostrar que para cualquier otro punto O', también fijo al cuerpo, $\boldsymbol{v}_{O'}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ resultan perpendiculares.

   w) Mostrar que si $\boldsymbol{v}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ son perpendiculares, entonces siempre es posible encontrar un punto O' cuya velocidad $\boldsymbol{v}_{O'}$ sea nula.

   e) Bajo las condiciones del ítem anterior, mostrar que todos los puntos ubicados sobre una recta que pasa por O' y es paralela a $\boldsymbol{\Omega}$ tienen velocidad nula.

   r) Mostrar que si $\boldsymbol{v}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ no son perpendiculares, entonces puede encontrarse un punto O' fijo al cuerpo tal que $\boldsymbol{v}_{O'}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ sean paralelos.

   t) Mostrar que si $\boldsymbol{v}_O$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, entonces nunca puede encontrarse un punto O' fijo al cuerpo tal que $\boldsymbol{v}_{O'}$ sea nulo ni perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$.

   y) ¿En qué casos la energía cinética puede desacoplarse en un término de rotación más otro de traslación?

   u) ¿Qué relación satisfacen los momentos principales de inercia cuando se tiene un sistema de partículas coplanares?

   i) Mostrar que los momentos principales de inercia satisfacen la siguiente relación: $I_1 + I_2 \geqslant I_3$ (y permutaciones).

   o) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría, entonces el centro de masa está contenido en dicho eje y además es un eje principal de inercia.

   p) Mostrar que si un cuerpo tiene un plano de simetría, entonces tanto el centro de masa como dos de los ejes principales de inercia están contenidos en dicho plano, y el tercer eje es perpendicular.

   a) Mostrar que en un sistema colineal de partículas los momentos principales de inercia satisfacen que $I_1 = I_2$ y que $I_3 = 0$.

   s) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría de orden mayor que 2, hay degeneración en el plano perpendicular al eje.

   d) Mostrar que cuando el tensor de inercia es totalmente degenerado, sus momentos principales de inercia son invariantes frente a cualquier rotación.