Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Guía 7: *Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas, Hamilton-Jacobi.*

1. Escribir el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton de:

   a) Un oscilador armónico unidimensional. Graficar el retrato de fase.

   b) Un péndulo de longitud l y masa m. Graficar el retrato de fase. Hallar los puntos de equilibrio y clasificarlos según su estabilidad; encontrar la ecuación de la curva separatriz entre la región de libración y la de rotación.

   c) Una partícula en un potencial central $V(r)$, en coordenadas esféricas (r, θ, φ). Hallar constantes de movimiento.

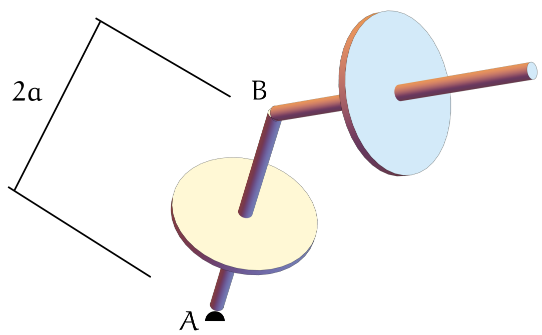
   d) Una partícula en un plano y con un potencial central $V(r)$, en coordenadas polares (r, φ). En especial, considerar los potenciales $V(r) = -k/r$ y $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ $(k > 0)$. Graficar los retratos de fase para las variables r y p_r y clasificar las órbitas posibles.

   e) Un trompo simétrico, fijo por un punto en su eje de simetría, en un campo gravitatorio uniforme, usando los ángulos de Euler. Hallar constantes de movimiento. Graficar el retrato de fase para las variables θ y p_θ. Dada la variedad de movimientos posibles, analice casos particulares sencillos, por ejemplo: $p_\varphi = p_\psi$, $p_\varphi = 0$.

2. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía total?

3. Una partícula se mueve sobre una superficie de revolución definida en coordenadas cilíndricas por $z = f(\rho)$. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\,\hat{z}$. Escriba el hamiltoniano. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? Grafique el retrato de fase para el movimiento radial cuando la superficie es un cono circular recto (la superficie incluye las dos ramas del cono).

4. El sistema de la figura está compuesto por dos trompos simétricos cuyos discos se hallan fijos a la mitad de dos ejes idénticos de longitud $2a$. A es un punto fijo alrededor del cual el eje AB se mueve libremente. Los trompos están articulados en el punto B de tal manera que **los dos ejes siempre están sobre un plano vertical en común**. Escriba el lagrangiano y los impulsos generalizados. Plantee cómo sería el cálculo del Hamiltoniano (si puede, llévelo a la práctica con algún programa de cálculo simbólico).



5. Un sistema consiste en dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{cm} + H_{rel}$, con

$$H_{cm} = \frac{P_{cm}^2}{2M}, \qquad H_{rel} = \frac{p_{rel}^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r),$$

donde: $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida, $M = m_1 + m_2$, $\mathbf{L}$ es el momento angular total y p_{rel} es el momento canónicamente conjugado de r.

6. Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g y h funciones de p_i y q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante.

$$\begin{cases} [f, c] = 0, \\ [f, f] = 0, \\ [f, F(f)] = 0, \\ [f, g] + [g, f] = 0, \\ [f + g, h] = [f, h] + [g, h]. \end{cases} \qquad \begin{cases} [fg, h] = f[g, h] + [f, h]g, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right], \\ [f, g^n] = n g^{n-1}[f, g], \\ [g, F(f)] = F'(f)[g, f]. \end{cases}$$

7. Mediante la identidad de Jacobi, muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.

8. *a*) Para una partícula calcule explícitamente los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_i, L_j]$ y $[L_i, L^2]$.
   b) Muestre que si dos componentes del momento angular se conservan, entonces se conserva el vector $\mathbf{L}$.
   c) ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente momentos canónicos? *Idem* para H y L_z.
   d) ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente momentos canónicos? *Idem* para L_x y L^2.

9. Muestre que si f es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al hamiltoniano. ¿Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?

10. Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q, p) a (Q, P) se tiene:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

11. Muestre que la transformación $Q = \ln(\frac{\sin p}{q})$, $P = q \cot p$ es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$. Aplique la transformación al oscilador armónico. Encuentre al menos 4 libros que incluyan este ejercicio. Encuentre al menos un libro en donde esta transformación sea aplicada con algún provecho.

12. Considere un oscilador armónico unidimensional:

    a) Halle la trasformación canónica de función generatriz $F_1(Q,q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q,P) = \omega P$. Resuelva las ecuaciones de movimiento en estas coordenadas. Aplique la transformación inversa y encuentre la solución general en las coordenadas originales.

    b) Halle la función generatriz de tipo $F_2(P,q)$ que genera la misma transformación canónica $(q,p) \to (Q,P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2?

13. Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(q,p) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $K(P,Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton:

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y \sin\lambda}{m\omega}, \qquad p_x = -m\omega Y \sin\lambda + P_x \cos\lambda,$$

$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_x \sin\lambda}{m\omega}, \qquad p_y = -m\omega X \sin\lambda + P_y \cos\lambda.$$

14. *a*) Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$ en la dirección $\hat{z}$. Tome $\mathbf{A} = Bx\,\hat{y}$. Recuerde que el potencial generalizado es $V = -(e/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

    b) Resuelva de nuevo el problema eligiendo ahora $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

    c) Demuestre que la siguiente transformación es canónica y úsela para encontrar una solución alternativa:

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2), \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2), \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2),$$

    donde $\omega = eB/mc$.

15. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x en el potencial $V = a\sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes positivas y x puede moverse entre $\pm\frac{\pi}{2}l$. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S. Encuentre $x(t)$ utilizando S.

16. Considerar un sistema cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial es $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de H–J para este sistema? Escriba la expresión integral para la función principal de Hamilton y las expresiones integrales que dan la órbita y la evolución temporal. Hemos visto en otras guías y con otras coordenadas el sistema físico al que corresponde este problema. ¿De qué sistema se trata?

17. El hamiltoniano de una partícula relativista de masa m y carga e que se mueve sobre el eje x en un campo eléctrico constante y uniforme $\mathbf{E} = E\,\hat{x}$ es

$$H(x, p) = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - \lambda x,$$

donde c es la velocidad de la luz y $\lambda = eE > 0$. Dibuje el retrato de fase. Encuentre la solución general del movimiento mediante el método de H–J.

18. Una partícula de masa m y carga e se mueve sobre el eje x en un campo eléctrico uniforme dependiente del tiempo $\mathbf{E}(t) = E(t)\,\hat{x}$. Encuentre el hamiltoniano. Escriba la ecuación de H–J. Muestre que la función principal de Hamilton es

$$S = e\left(\int_0^t E(\tau)d\tau\right)x + \alpha x - \phi(t),$$

donde α es una constante y ϕ es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para ϕ. Encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

19. Mostrar que la ecuación de H–J para el movimiento tridimensional de una partícula en un potencial central $V(r)$ es separable y encontrar las función característica de Hamilton (la solución quedará en términos de ciertas integrales).

20. Una partícula se mueve en el eje x en un potencial $V(x) = \lambda|x|$, con $\lambda > 0$. Dibuje el retrato de fase. Encuentre las ecuaciones de transformación entre las variables (x, p) y las variables de ángulo–acción (J, θ). Grafique las curvas coordenadas de este sistema en el plano xp.

21. Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo–acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q')\,dq'$. Pruebe que esta función no es periódica como función de q, pero que $F_1(q, Q)$ sí lo es.

22. Considere el hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2.$$

Resuelva el problema con el método de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema? Resuelva este problema de otras tres maneras:

a) Mediante las ecuaciones canónicas.

b) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.

c) Por medio de variables de ángulo–acción.

23. Considere una partícula en un potencial $V(q) = \epsilon \tan^2(\alpha q)$, con ϵ y α constantes positivas. Halle el hamiltoniano y escriba las ecuaciones de Hamilton. Construya el retrato de fase. Halle las variables de ángulo–acción asumiendo que el movimiento ocurre en la región $|q| < \pi/2\alpha$.

24. Una partícula de masa m se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} A\left[a^2 - (|x| - a)^2\right], & \text{si } 0 \leqslant |x| \leqslant 2a \qquad (\text{con } A, a > 0), \\ \\ 0, & \text{si } |x| \geqslant 2a. \end{cases}$$

Dibuje el retrato de fase, mostrando las regiones de libración y movimiento no acotado. Muestre que la variable de acción para el movimiento de libración es

$$J = \frac{a^2\sqrt{2mA}}{\pi}\left[\epsilon + \tfrac{1}{2}\left(1 - \epsilon^2\right)\ln\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)\right]$$

donde $\epsilon^2 = E/a^2A < 1$. Encuentre el período τ y muestre que si $\epsilon \to 1, \tau \to \infty$.

25. Una partícula de masa m se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\lambda^2(x+a)^2, & \text{si } x \leqslant 0, \\ \\ \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2, & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

a) Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya el retrato de fase, considerando especialmente las curvas de fase próximas al origen.

b) Muestre que el espacio de fase se divide en 3 regiones invariantes. En cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle la variable de acción en función de E en cada caso.

26. Una partícula de masa m se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} k(x-a)^2, & \text{si } x > a, \\ \\ \dfrac{V_0}{a}(a - |x|), & \text{si } |x| < a, \\ \\ k(x+a)^2, & \text{si } x < -a. \end{cases}$$

a) Dibuje el retrato de fase indicando: i) en cuántas regiones queda dividido el espacio de fase, ii) cuáles son las curvas separatrices, iii) cómo son los posibles movimientos.

b) Calcule la variable de acción para los movimientos con $E < V_0$. ¿Cuánto vale el período de dichos movimientos? ¿Las oscilaciones son armónicas?

27. Considere una partícula con hamiltoniano

$$H(r,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

para cada uno de los siguientes casos: $V(r) = -\frac{k^2}{r}$ y $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. La partícula se mueve en la región $r > 0$.

a) Dibuje los retratos de fase, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices y clasifique las regiones en las que se divide el espacio de fase de acuerdo al tipo de movimiento.

b) Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(r, J)$, donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?

c) Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = k\hbar$ (con n, k números naturales y $\hbar$ constante).

28. Dado el potencial $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$, con $\epsilon, \alpha > 0$.

a) Dibujar el retrato de fase clasificando las regiones según el tipo de movimiento.

b) Calcular las variables de ángulo–acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$.

c) ¿Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?