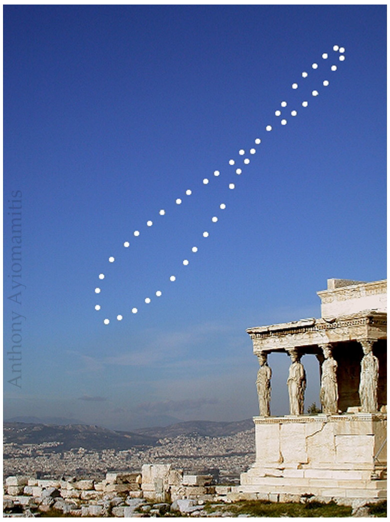
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 3/10: *El problema de la Analema*

Eres una Analema. Para un observador que mantuviera una posición y una orientación fijas respecto a las estrellas lejanas, el cielo presentaría durante años un aspecto estático, si se exceptúan los planetas y otros cuerpos menores. En cambio, en el cielo de un observador fijo a la Tierra todo está en movimiento: las estrellas trazan círculos durante la noche, el Sol atraviesa el cielo durante el día, cambia de signo a lo largo del año, su elevación máxima sobre el horizonte crece hacia el verano y disminuye al aproximarse el invierno. En este problema se trata de calcular la posición del Sol en el cielo de un observador fijo a un punto de la Tierra. En particular, queremos combinar en una misma imagen las 365 posiciones del Sol calculadas a lo largo de un año, siempre a una hora fija. El resultado de tal composición se llama Analema. Abajo se muestra un ejemplo empírico tomado sobre la ciudad de Atenas (con alrededor de una foto por semana).



Suponiendo:

- que la Tierra sigue una órbita circular de radio A con un período de 365,256 días;
- que la Tierra rota con un período de 23 h, 56 min y 4 s;
- que su eje de rotación forma 23,44° con la normal al plano de la órbita;
- que el radio de la Tierra puede despreciarse;
- que el observador se encuentra en una latitud α y una longitud λ.

Calcular:

a) La posición del Sol (azimut, altitud) relativa al horizonte del observador en función del tiempo. El azimut se mide desde la dirección norte hacia el este y la altitud se mide desde el plano del horizonte. Asumir que $t = 0$ corresponde al paso de la Tierra por el equinoccio de primavera boreal, con el punto más cercano al Sol en el meridiano de 180°.

b) La altitud máxima del Sol sobre el horizonte a lo largo de 365 días.

c) Sus 365 posiciones a una hora fija a lo largo de un año.

Grafique sus resultados y estudie cómo cambian con la latitud. Si compara con una composición fotográfica, notará que el modelo está bastante lejos de reproducir las observaciones. ¿Cuál cree que es el principal motivo de esta diferencia?

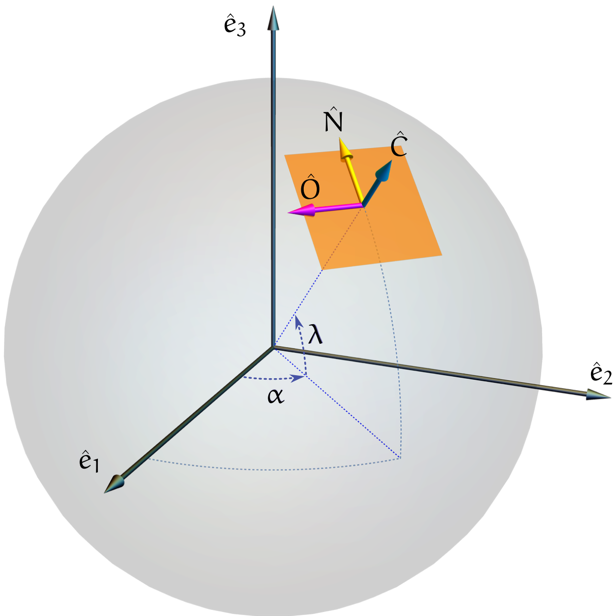
■ Este problema involucra la transformación entre varios sistemas de referencia. En primer lugar, está el sistema de ejes fijos al espacio; fijos con respecto a las estrellas distantes (*quasares* en la práctica). En segundo lugar, está el sistema de ejes fijos a la Tierra; este sistema rota con la Tierra y uno de sus ejes es el eje de rotación. Por último, un sistema de ejes asociado a cada observador sobre la superficie terrestre; estos sistemas también rotan con la Tierra pero están orientados según el horizonte y el cénit de cada observador. Lo más difícil en este problema es hacer los dibujos. Las cálculos entran en 10 líneas.

El objetivo es calcular la posición del Sol en el cielo del observador en función del tiempo. Esta posición es en realidad una dirección: es el versor que va desde el observador hasta el centro del Sol. Como estamos despreciando el tamaño finito de la Tierra comparado con la distancia que la separa del Sol, esa dirección es común para todos los observadores terrestres. Es igual al versor que va desde el centro de la Tierra hasta el centro del Sol. (La diferencia en la posición del Sol para dos observadores en los polos Norte y Sur, respectivamente, es de 16 segundos de arco. Cada segundo de arco es la 1/3600 parte de un grado. El ángulo que abarca el disco del Sol es de aproximadamente medio grado).

Aunque la dirección del Sol sea considerada la misma para todos los observadores, cada observador usa su propio sistema de coordenadas, y de ahí que uno diga que la posición del Sol depende del observador. Lo que depende del observador son las coordenadas respecto de su propio sistema de referencia, que esta basado en su plano del horizonte y en la dirección de su cénit personal. La figura muestra los versores de uno de estos sistemas. El plano tangente a la superficie de la Tierra es el plano del horizonte del observador.

Esta situación es práctica para informar eventos que tienen significado especial para el observador en cuestión; por ejemplo, la salida y puesta del Sol o el tránsito de un satélite. En astronomía es más común informar las direcciones con respecto a un sistema de referencia universal, independiente de la posición del observador.

Cada observador en la superficie terrestre se guía por su propio sistema de coordenadas, pero todos convienen en definir un sistema de referencia global geocéntrico, basado en el plano del ecuador y en la dirección del eje de rotación. Este sistema tiene su propio conjunto de versores, que indican direcciones fijas respecto de la Tierra: el eje sur-norte, la intersección del meridiano de Greenwich con el plano del ecuador y la intersección del plano del ecuador con el meridiano de 90º. Con esas direcciones fijas a la Tierra asociamos los versores $\hat{e}_i$ que muestra la figura siguiente; en especial el versor $\hat{e}_3$ está en la dirección del eje de rotación. Estos serían los versores globales. La posición del observador se da con referencia al sistema de ejes globales definiendo su longitud α y su latitud λ.



La relación que hay entre el sistema de ejes $\hat{e}_i$ y los sistemas de cada observador es la misma que hay entre los ejes xyz y los ejes $r\theta\varphi$ de cada punto sobre la superficie de la esfera unitaria. En cada punto de la esfera hay uno de estos sistemas.

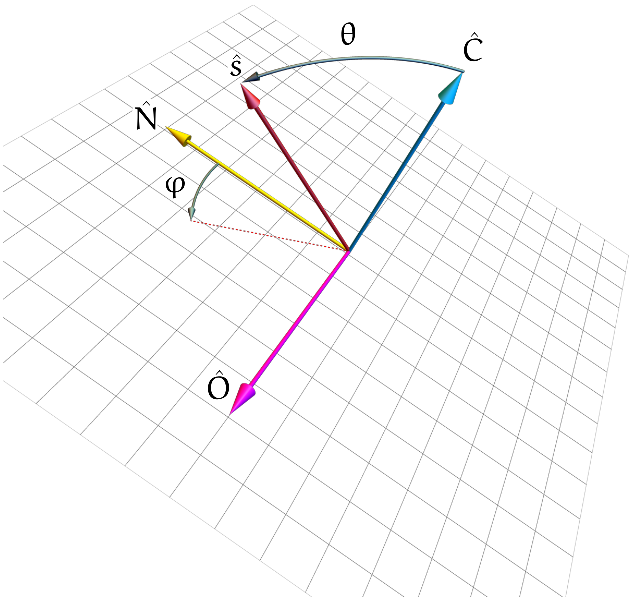
Desde la perspectiva de cada observador, su sistema de coordenadas local es equivalente a un sistema de ejes cartesiano. El plano tangente a la superficie terrestre en la posición del observador es su plano xy. Su eje z, que en la figura anterior denominamos $\hat{C}$, es perpendicular a la superficie y apunta hacia el cénit. El eje x, al que asociamos con el versor $\hat{N}$, se toma tangente al meridiano del observador y va de sur a norte. Finalmente, lo que hace las veces de eje y es la dirección tangente al paralelo del observador, tomada aquí de este a oeste; asociamos este eje con el versor $\hat{O}$. (Creo que en clase tomamos como eje y la dirección oeste-este. Eso está mal, porque da un sistema de referencia levógiro. Con las ecuaciones dadas en clase el Sol probablemente saldría por el oeste). De esta forma es fácil ver que los versores del sistema de referencia del observador se escriben de manera análoga a los versores $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ y $\hat{r}$ de las coordenadas esféricas. Hay diferencias en los signos y en el hecho de que aquí no usamos el ángulo polar θ sino la latitud λ, que es su complemento.

Verifiquen que se obtiene

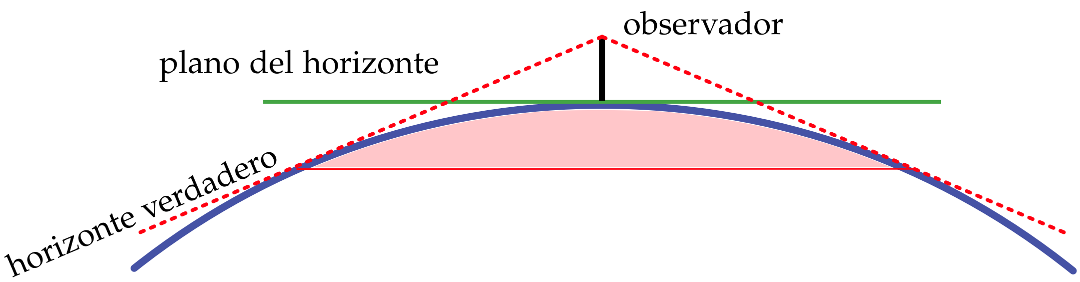
$$\begin{cases} \hat{N}(t) = -\sin\lambda\cos\alpha\,\hat{e}_1(t) - \sin\lambda\sin\alpha\,\hat{e}_2(t) + \cos\lambda\,\hat{e}_3, \\ \hat{O}(t) = \sin\alpha\,\hat{e}_1(t) - \cos\alpha\,\hat{e}_2(t), \\ \hat{C}(t) = \cos\lambda\cos\alpha\,\hat{e}_1(t) + \cos\lambda\sin\alpha\,\hat{e}_2(t) + \sin\lambda\,\hat{e}_3. \end{cases} \tag{1}$$

Fijados los versores, ahora pasamos a describir las cosas en el cielo del observador. Una dirección $\hat{s}$ en la esfera celeste del observador queda determinada por dos ángulos: la altitud, que es el ángulo que se mide desde el plano del horizonte; y el azimut, que es el ángulo que la proyección de la dirección en cuestión forma con el eje sur-norte. Debido a que estamos acostumbrados a usar los ángulos de las coordenadas esféricas, convendrá hacer todos los cálculos en términos de θ y φ y luego, llegado el caso, usar las relaciones

$$\text{alt} = \frac{\pi}{2} - \theta, \qquad \text{az} = 2\pi - \varphi. \tag{2}$$



Una salvedad: debido a la curvatura de la Tierra, la línea del horizonte no está en el plano del horizonte, a menos que el observador tenga altura cero. El horizonte verdadero está por debajo del plano del horizonte. Cuanto mayor sea la altura del observador, mayor será la diferencia. En la figura la altura del observador está exagerada.



Para un observador de 2 metros de altura, el ángulo entre la línea del horizonte y el plano del horizonte es de alrededor de 3 segundos de arco, lo que produce una diferencia del orden de los 10 segundos entre el momento en que el Sol atraviesa el plano del horizonte y el momento en el que atraviesa la línea del horizonte verdadero. Pero mucho más importante que este efecto es el de la refracción atmosférica, que introduce varios minutos de diferencia entre la posición real del Sol y la aparente. Esa diferencia es el orden de los 3 minutos.

En definitiva, si la dirección del Sol está dada por el versor $\hat{s}(t)$, para dar su posición en el cielo del observador necesitamos calcular

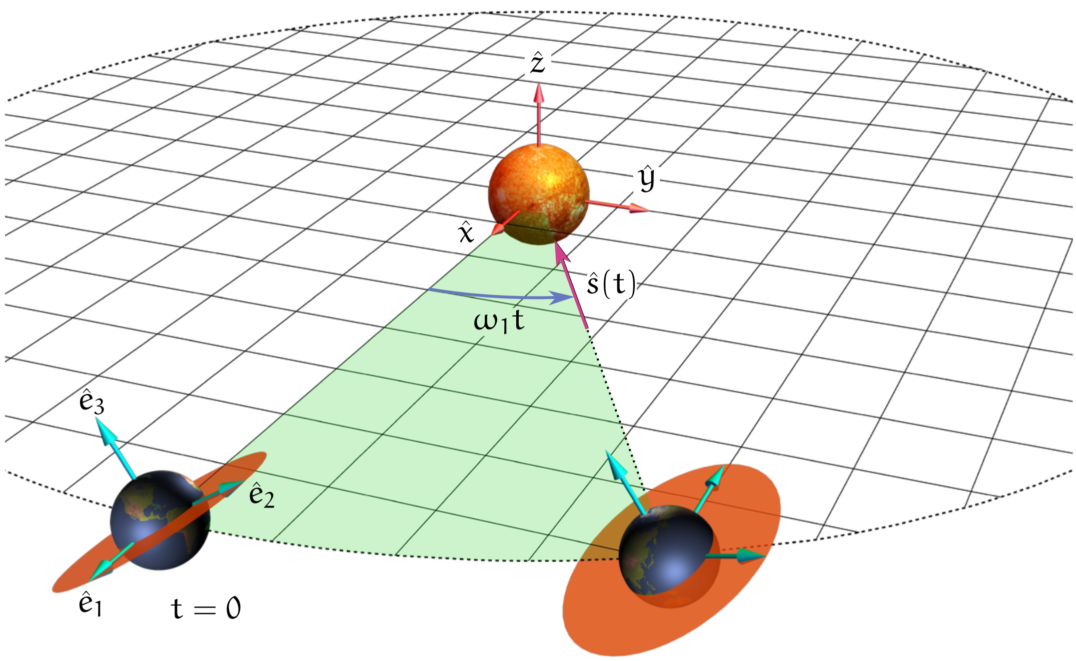
$$\begin{cases} \theta = \arccos\left(\hat{s} \cdot \hat{C}\right), \\ \varphi = \arctan\left(\hat{s} \cdot \hat{N}, \hat{s} \cdot \hat{O}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Notar que es necesario usar la función arco tangente con dos argumentos: debido a que el mismo valor de la tangente corresponde a ángulos que difieren en π, es necesario dar una información extra que permita definir en qué cuadrante está el ángulo buscado. Si uno trabajase con ángulos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ bastaría con escribir

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\hat{s} \cdot \hat{O}}{\hat{s} \cdot \hat{N}}\right). \tag{4}$$

Aquí esto no alcanza, pues φ varía entre 0 y 2π. La función $\arctan(x, y)$ está definida en la mayoría de los programas (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2).

En una primera aproximación, podemos considerar que el Sol está fijo en el espacio y definir un sistema el sistema de coordenadas cartesiano con los versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ que muestra la figura.



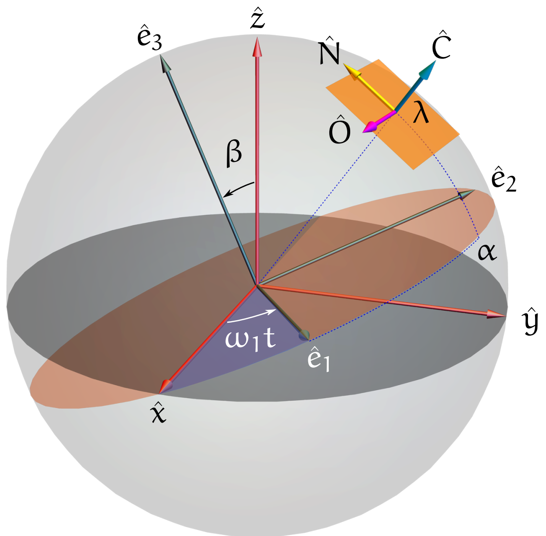
El ángulo que el eje de rotación de la Tierra forma con la normal al plano de la órbita es la inclinación $\beta \simeq 23{,}44^{\circ}$. El eje x se elige de modo tal que en $t = 0$ la Tierra está en la dirección de x y su eje de rotación está en el plano yz. En el curso de un año, hay dos momentos en que eso ocurre. El que muestra la figura corresponde al equinoccio de primavera del hemisferio norte. De este modo nuestro reloj medirá el tiempo transcurrido desde el paso por el equinoccio. Si queremos expresar el tiempo según la hora local verdadera habrá simplemente que sumar una constante. En la figura anterior también se ha definido el versor $\hat{e}_1(0)$ fijo a la Tierra según la dirección del eje x. Con esta elección el equinoccio se produce justo a la medianoche de Greenwich. Bastará sumarle a la longitud α una constante para ajustar el verdadero meridiano en el que se produce el equinoccio.

El versor $\hat{s}(t)$ que da la dirección del Sol es fácil de calcular. Según la figura anterior es

$$\hat{s}(t) = -\hat{\rho}(\omega_1 t), \tag{5}$$

donde ω_1 es la velocidad angular asociada al movimiento anual de la Tierra.

A manera de compendio, la siguiente figura muestra en un instante t los tres sistemas de ejes que hemos definido.



Para calcular los productos escalares que aparecen en las ecs. (3), necesitamos escribir todo en una base común. Lo más sencillo es escribir los versores $\hat{C}$, $\hat{N}$ y $\hat{O}$ en el sistema de referencia fijo en el espacio. Podemos hacer esto en dos pasos. El primer paso consiste en escribir los versores del observador en términos del sistema de referencia global fijo a la Tierra, cosa que ya quedó hecha en la ec. (1). El segundo paso consiste en escribir los versores globales fijos a la Tierra en términos de los versores fijos al espacio.

Necesitamos entonces escribir los versores $\hat{e}_i$ en términos de los versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$. El versor $\hat{e}_3$ es la dirección del eje de rotación de la Tierra y, por lo tanto, está fijo. Es siempre

$$\hat{e}_3 = -\sin\beta\,\hat{y} + \cos\beta\,\hat{z}. \tag{6}$$

Los otros dos versores rotan en el plano perpendicular a $\hat{e}_3$. Eso quiere decir que si definimos dos versores fijos en este plano, $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$, perpendiculares entre sí, resultará

$$\hat{e}_1(t) = \cos(\omega_2 t + \varphi_0)\,\hat{x}_1 + \sin(\omega_2 t + \varphi_0)\,\hat{x}_2, \tag{7}$$

$$\hat{e}_2(t) = -\sin(\omega_2 t + \varphi_0)\,\hat{x}_1 + \cos(\omega_2 t + \varphi_0)\,\hat{x}_2, \tag{8}$$

donde ω_2 es la velocidad angular de rotación y donde φ_0 es el ángulo que en $t = 0$ forma el versor $\hat{e}_1$ con el versor $\hat{x}_1$. La elección de los versores $\hat{x}_i$ no es única. Lo más cómodo es referirnos a la definición del instante $t = 0$ que hicimos anteriormente y elegir $\varphi_0 = 0$ y

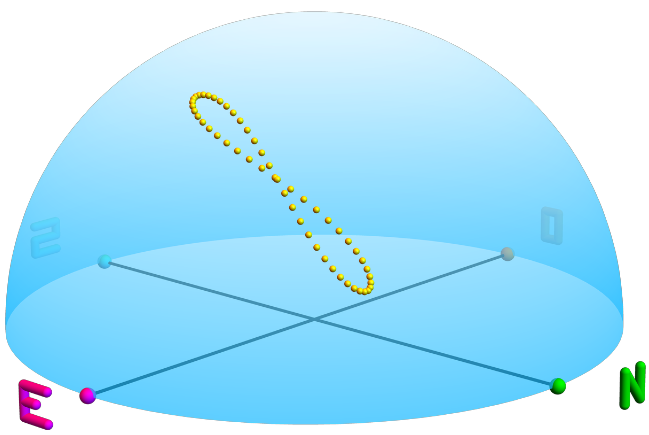
$$\hat{x}_1 = \hat{x}, \tag{9}$$

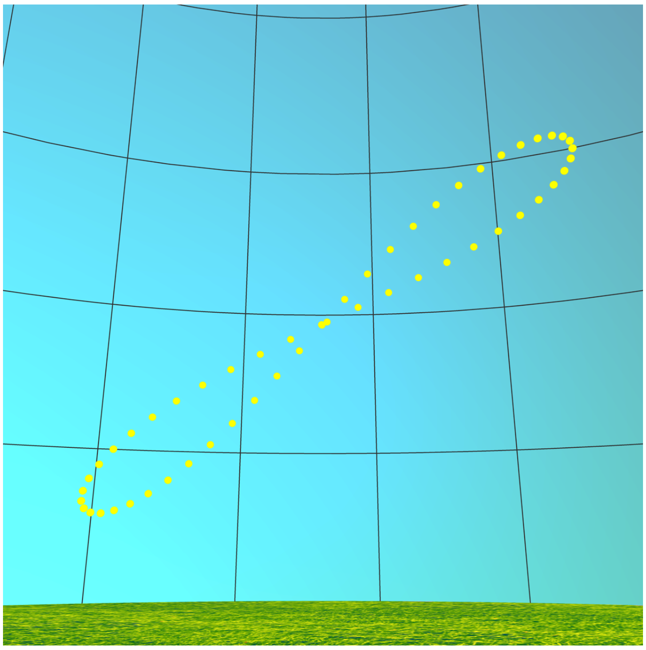
$$\hat{x}_2 \equiv \hat{\psi} = \cos\beta\,\hat{y} + \sin\beta\,\hat{z}. \tag{10}$$

En resumen

$$\begin{cases} \hat{e}_1(t) = \cos(\omega_2 t)\,\hat{x} + \sin(\omega_2 t)\,\hat{\psi}, \\ \hat{e}_2(t) = -\sin(\omega_2 t)\,\hat{x} + \cos(\omega_2 t)\,\hat{\psi}, \\ \hat{e}_3 = -\sin\beta\,\hat{y} + \cos\beta\,\hat{z}. \end{cases} \tag{11}$$

Con esto hemos terminado. Al final de todo se incluye un código escrito en *Mathematica* que calcula la posición del Sol en función del tiempo para un observador en la latitud λ y longitud α. Las instrucciones son por demás de transparentes. Con este código se calculó la analema para la latitud de Buenos Aires, con una imagen por semana. La primera figura muestra su representación en la esfera celeste. La segunda figura muestra la analema desde la perspectiva del observador. Queda como ejercicio a largo plazo reemplazar $\hat{s}(t)$ por la dirección correspondiente a la órbita elíptica verdadera, ajustando el momento del equinoccio y el paso por el perihelio.





■ **Otros asuntos de importancia**. Tienen que saber deducir rápidamente cómo escribir los versores fijos al cuerpo en términos de los versores fijos al espacio. No se trata tanto de hacer cuentas como de pensar de manera visual cómo se orientan los objetos. En la práctica, con lápiz y papel (otra cosa es programando), no es necesario usar matrices de rotación. Partimos con los ejes del cuerpo según los ejes x, y y z.

1) Hacemos una rotación en φ alrededor del eje z. El eje 3 del cuerpo queda invariante sobre el eje z; los ejes 1 y 2 se trasforman como

$$\hat{e}_1 \to \hat{\rho}(\varphi), \qquad \hat{e}_2 \to \hat{\varphi}(\varphi). \tag{12}$$

2) Hacemos una rotación en θ alrededor de $\hat{\rho}(\varphi)$, que en este paso coincide con $\hat{e}_1$. El eje 1 del cuerpo queda donde está; los ejes 2 y 3 se combinan linealmente al modo de una rotación:

$$\hat{e}_2 \to \cos\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}, \qquad \hat{e}_3 = -\sin\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \cos\theta\,\hat{z}. \tag{13}$$

La dirección de $\hat{e}_3$ es la final. Conviene ponerle un nombre a la dirección que ocupa el eje 2 en esta segunda rotación. La notaremos así

$$\hat{\psi}(\theta,\varphi) = \cos\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}. \tag{14}$$

3) La última rotación es alrededor de la dirección $\hat{e}_3$. Ahora son los versores $\hat{\rho}$ y $\hat{\psi}$ los que se combinan linealmente al modo de una rotación para dar las direcciones definitivas de los ejes 1 y 2. Finalmente,

$$\hat{e}_1 = \cos\psi\,\hat{\rho} + \sin\psi\,\hat{\psi}, \qquad \hat{e}_2 = -\sin\psi\,\hat{\rho} + \cos\psi\,\hat{\psi}, \qquad \hat{e}_3 = -\sin\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \cos\theta\,\hat{z}. \tag{15}$$

■ Código en el *Mathematica* para calcular la posición del Sol.

```
β = 23.43673 π / 180;           (*inclinación del eje*)
sday = 86164.098903691;         (*duración del día sidéreo*)
cday = 86400;                   (*duración del día solar medio*)
year = 365.256363004 cday;      (*duración del año*)

ω2 = 2 π / sday;   (*velocidad angular diurna*)
ω1 = 2 π / year;   (*velocidad angular anual*)

(* Versores fijos del espacio*)
ex = {1, 0, 0};
ey = {0, 1, 0};
ez = {0, 0, 1};

(*Versores fijos a la Tierra*)
e1[t_] := Cos[ω2 t] ex + Sin[ω2 t] (Sin[β] ez + Cos[β] ey);
e2[t_] := -Sin[ω2 t] ex + Cos[ω2 t] (Sin[β] ez + Cos[β] ey);
e3 = Cos[β] ez - Sin[β] ey;

(*Versores fijos a la Tierra que usa el observador*)
eN[α_, λ_, t_] := -Cos[α] Sin[λ] e1[t] - Sin[α] Sin[λ] e2[t] + Cos[λ] e3;
eO[α_, λ_, t_] := Sin[α] e1[t] - Cos[α] e2[t];
eC[α_, λ_, t_] := Cos[α] Cos[λ] e1[t] + Sin[α] Cos[λ] e2[t] + Sin[λ] e3;

(*Posición del Sol*)
eSol [t_] := - (Cos[ω1 t] ex + Sin[ω1 t] ey);

(*Posición del Sol en el cielo del observador, escrita con los ángulos de las coordenadas esféricas
 asociadas al sistema de ejes eN, eO, eC*)
ϕ[α_, λ_, t_] := ArcTan[eSol[t] . eN[α, λ, t], eSol[t] . eO[α, λ, t]];
θ[α_, λ_, t_] := ArcCos[eSol[t] . eC[α, λ, t]];
```