Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 7/10: *Cuerpo rígido**

1. Separación de la energía cinética en términos de rotación y traslación

El objetivo de los primeros problemas de cuerpo rígido es resolverlos mediante el formalismo lagrangiano, lo que implica elegir un conjunto de coordenadas generalizadas que determinen la configuración del cuerpo. Eso corresponde, en general, a dar la orientación de los ejes del cuerpo y la posición de uno de sus puntos. Lo más usual es elegir este punto o bien como el centro de masa o bien, si lo hubiera, en un punto que permanezca siempre fijo. Estas elecciones son prácticas porque permiten escribir la energía cinética del cuerpo rígido como un término de traslación más un término de rotación (en el segundo caso, es un término de rotación pura). El lagrangiano se escribe entonces como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} - V, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad del punto elegido para dar la posición y donde $\mathbf{I}$ es el tensor de inercia calculado respecto de ese punto.

Para entender el origen del tensor de inercia, supongamos que el punto que se usa para dar la posición del cuerpo rígido es $\mathbf{r}_0$. La velocidad de un punto $\mathbf{r}$ del cuerpo será

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}', \tag{2}$$

con

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0. \tag{3}$$

Luego, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum m\left[v_0^2 + |\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'|^2 + 2\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')\right], \tag{4}$$

donde la suma (eventualmente una integral) se extiende a todas las partículas del cuerpo. En la ec. (4) el índice que recorre las partículas está implícito. Debe entenderse que tanto m como $\mathbf{r}'$ dependen de ese índice. Hacemos esto previendo la proliferación de índices que ocurrirá de un momento a otro.

*zanellaj@df.uba.ar

El primer término en la energía cinética es

$$\frac{1}{2}\sum m v_0^2 = \frac{1}{2} M v_0^2, \tag{5}$$

donde M es la masa total. Usualmente nos referiremos a esta contribución como a la energía cinética de traslación. Por otro lado, el tercer término en la sumatoria de la ec. (4) es

$$\sum m\boldsymbol{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\boldsymbol{v}_0 \cdot \left[\boldsymbol{\omega} \times \sum m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\right]. \tag{6}$$

Usando la definición de vector centro de masa queda

$$\sum m\boldsymbol{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = M\,\boldsymbol{v}_0 \cdot \left[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} - \mathbf{r}_0)\right]. \tag{7}$$

Aquí vemos que este término se anula si $\mathbf{r}_0$ está fijo, de modo que es $\boldsymbol{v}_0 = 0$, o si $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$. También podría anularse si $\boldsymbol{v}_0$ fuera siempre paralelo al vector $\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} - \mathbf{r}_0$. Tiene sentido decir que la energía cinética se descompone en un término de traslación más otro de rotación sólo en el caso en que este término mixto sea nulo, y quede

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \sum m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'|^2. \tag{8}$$

2. El tensor de inercia

Lo que nos interesa ahora es el término de energía de rotación, que se escribe como

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'|^2 = \frac{1}{2}\sum m\left[\omega^2 r'^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')^2\right]. \tag{9}$$

Si se usa una base de versores ortonormales $\hat{x}_i(t)$, que pueden depender del tiempo, será

$$\mathbf{r}'(t) = r_i'(t)\,\hat{x}_i(t). \tag{10}$$

Estamos empleando el convenio de sumación de Einstein: índices repetidos implican una sumatoria. La velocidad angular también se puede escribir en todo instante como combinación lineal de los versores $\hat{x}_i$,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_i(t)\,\hat{x}_i(t). \tag{11}$$

Así resulta

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum m\left(\omega^2 r'^2 - \omega_i\omega_j r_i' r_j'\right). \tag{12}$$

El objetivo es sacar ω_i y ω_j fuera de la suma. Escribiendo $\omega^2 = \omega_i\omega_j\delta_{ij}$, queda

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\omega_i\left[\sum m\left(r'^2\delta_{ij} - r_i' r_j'\right)\right]\omega_j \equiv \frac{1}{2}\omega_i(t) I_{ij}(t)\omega_j(t), \tag{13}$$

donde

$$I_{ij}(t) = \sum m\left[r'^2\delta_{ij} - r_i'(t) r_j'(t)\right]. \tag{14}$$

Si se usan como base los versores fijos al cuerpo, $\mathbf{r}'$ tiene componentes r_i' constantes,

$$\mathbf{r}'(t) = r_i'\,\hat{e}_i(t). \tag{15}$$

Escrito en esta base es

$$I_{ij} = \sum m \left(r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right). \tag{16}$$

Lo fundamental aquí es que la matriz I_{ij} no depende del tiempo. En su definición participan las componentes de la posición relativa de dos puntos del cuerpo respecto de una base que está fija al cuerpo. Por definición esas componentes son constantes: cada partícula del cuerpo rígido está fija respecto al sistema de versores fijos al cuerpo. En general, si usáramos una base cualquiera (por ejemplo, los versores fijos al espacio) la matriz I_{ij} dependerá del tiempo. Eso hace los cálculos muy engorrosos. (Ver el ejercicio propuesto en la última página).

3. El tensor de inercia es un tensor

Con respecto a la carácter geométrico de los coeficientes I_{ij}. Ya vimos que dependen de la elección de la base. Lo mismo ocurre con las componentes de un vector, aunque el vector en sí es un objeto que no depende de la base en que se lo escriba. Entonces es pertinente preguntarse en qué sentido pueden ser los coeficientes I_{ij} las componentes de un objeto geométrico independiente de la base. Cuando escribimos un vector $\mathbf{A}$ no estamos pensando en una terna de números, sino en un ente geométrico con existencia independiente de cualquier sistema de coordenadas. Veremos que existe una forma análoga de representar al objeto cuyas componentes son los coeficientes I_{ij}.

Nuestra ecuación de partida es la expresión para $T_{\rm rot}$,

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\omega_i \left[\sum m \left(r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right) \right] \omega_j. \tag{17}$$

Quisiéramos escribir esto de una manera independiente del sistema de versores usado para expresar $\mathbf{r}'$ y $\boldsymbol{\omega}$. Es fácil hacer esto con el primer término. Queda

$$\frac{1}{2}\omega_i \left(\sum m r'^2 \delta_{ij} \right) \omega_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\sum m r'^2 \mathbb{I} \right) \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{18}$$

donde $\mathbb{I}$ es el tensor identidad. Notar que nos cuidamos mucho de decir "es la matriz identidad", así como no decimos que un vector es (x, y, z). El tensor identidad puede pensarse como el operador identidad. Esto lo convierte en un objeto geométrico. Sus componentes en cualquier sistema están dadas por la matriz de coeficientes δ_{ij}.

Para el término restante de la ec. (17) vamos a definir el tensor

$$\mathbf{r}'\mathbf{r}'. \tag{19}$$

No es un error de tipeo. Esto se llama diada. A todos los efectos prácticos es como un operador bilineal. Dados dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}'\mathbf{r}') \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}). \tag{20}$$

En una base cualquiera, las componentes de la diada $\mathbf{r}'\mathbf{r}'$ son

$$\hat{x}_i \cdot (\mathbf{r}'\mathbf{r}') \cdot \hat{x}_j = r'_i r'_j. \tag{21}$$

Esto hace evidente que se trata de un tensor cartesiano. Al rotar el sistema de referencia, las componentes transforman como el producto de las componentes de dos vectores. Casi que no hay tensor más elemental que este.

Con estas definiciones, el tensor de inercia puede escribirse como un objeto independiente de la elección de la base,

$$\mathbf{I} = \sum m \left(r'^2 \mathbb{I} - \mathbf{r}'\mathbf{r}' \right). \tag{22}$$

Ahora podemos hablar de representaciones. En la representación de los versores fijos al cuerpo es

$$\mathbf{I} = \sum m \left[r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \, \hat{e}_i(t) \hat{e}_j(t) \right], \tag{23}$$

donde $r'_i = \mathbf{r}'(t) \cdot \hat{e}_i(t)$. Según señalamos antes, estas componentes son constantes porque los vectores $\mathbf{r}'$ y los versores $\hat{e}_i$ están rígidamente ligados. La energía cinética de rotación resulta pues

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega_i(t) I_{ij} \omega_j(t), \tag{24}$$

donde

$$I_{ij} = \sum m \left(r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j \right). \tag{25}$$

En todas estas ecuaciones estamos indicando explícitamente qué cosa puede depender del tiempo y qué cosa no.

En la representación de versores $\hat{x}_i$ fijos al espacio, con $\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$ y $\hat{x}_3 = \hat{z}$, es

$$\mathbf{I} = \sum m \left[r'^2 \delta_{ij} - r'_i(t) r'_j(t) \, \hat{x}_i \hat{x}_j \right], \tag{26}$$

donde $r'_i(t) = \mathbf{r}'(t) \cdot \hat{x}_i$. Ahora las componentes de $\mathbf{r}'$ dependen del tiempo. La energía cinética de rotación resulta entonces

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega_i(t) I_{ij}(t) \omega_j(t), \tag{27}$$

donde $\omega_i(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \hat{x}_i$ y donde

$$I_{ij}(t) = \sum m \left[r'^2 \delta_{ij} - r'_i(t) r'_j(t) \right]. \tag{28}$$

Cuando se usa la base de versores fijos al cuerpo, las componentes del tensor de inercia son constantes. Son, en un sentido restringido, propiedades intrínsecas del cuerpo rígido. Dependen, claro está, de la elección del punto $\mathbf{r}_0$ que se haya tomado para dar la posición del cuerpo, y también de la base de versores $\hat{e}_i$. Pero más allá se eso, son tan propias del cuerpo como lo son su masa y su volumen.

Sin quieren leer más sobre qué cosa es un tensor, miren el libro de Santaló, *Versores y tensores*, la sección sobre tensores cartesianos. El artículo de la wikipedia, al menos en la versión en inglés, no está nada mal: https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor.

4. La velocidad angular en la base de versores fijos al cuerpo

Para calcular la energía de rotación usando la representación de los versores fijos al cuerpo, ec. (24), es necesario escribir las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ en la base de estos versores. Si la orientación del cuerpo se da por medio de los ángulos de Euler, estas componentes son

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \\ \omega_2 = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi, \\ \omega_3 = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}. \end{cases} \tag{29}$$

Al escribir estas identidades no estoy consultando ningún apunte ni tampoco las recuerdo de memoria. Las escribo (cierto que con cautela) al mismo tiempo que las razono. La expresión de la que parto, y a la que volveremos en un momento, es

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\rho}(\varphi) + \dot{\psi}\,\hat{e}_3(\theta, \varphi). \tag{30}$$

Para escribir las ecs. (29), mentalmente voy haciendo los productos escalares de este vector con los versores $\hat{e}_i$ fijos al cuerpo, que tampoco recuerdo, sino que los voy imaginando sobre la marcha.

El punto principal es entonces la expresión (30). Esta expresión es fácil de *deducir*, así que tampoco necesitan recordarla. Resalto la palabra *deducir* porque en verdad no puede hablarse de una deducción. Los pasos no son estrictamente lógicos. Debe tomarse como una regla intuitiva que funciona para la convención particular de ángulos de Euler que estamos usando, en donde importan tanto los ángulos como el orden de las rotaciones. Es una regla que vale por accidente. La cosa es así: una variación en φ induce una rotación según $\hat{z}$. Una variación en θ induce una rotación según $\hat{\rho}(\varphi)$. Por último, una variación en ψ induce una rotación según la dirección del versor $\hat{e}_3$. Luego, intuitivamente debería ser

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\rho}(\varphi) + \dot{\psi}\,\hat{e}_3(\theta, \varphi). \tag{31}$$

El resultado es correcto. El razonamiento, no. (La razón puede consultarse en el paper https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.12522). Sigamos adelante con vistas a escribir las ecs. (29).

Siempre deberían poder deducir en tiempo real las expresiones

$$\begin{cases} \hat{e}_1(\theta, \varphi, \psi) &= \sin\psi \left[\cos\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}\right] + \cos\psi\,\hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_2(\theta, \varphi, \psi) &= \cos\psi \left[\cos\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}\right] - \sin\psi\,\hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_3(\theta, \varphi) &= -\sin\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \cos\theta\,\hat{z}. \end{cases} \tag{32}$$

No digo que deban acordarse de estas expresiones. Digo que deberían poderlas razonar a medida que las escriben, visualizando las rotaciones que llevan de unos ejes a otros.

Finalmente, deberían verificar que, tomando los productos escalares de $\boldsymbol{\omega}$, ec. (30), con los versores de las ecs. (32), se obtienen las ecs. (29). Con todo esto ya podemos calcular T_{rot} a partir de la ec. (24).

5. Ejes principales

Pero para hacer las cosas más sencillas hay aún un paso extra. La matriz de componentes I_{ij} depende de la elección del punto $\mathbf{r}_0$ y de la base de versores $\hat{e}_i$. Siempre es posible elegir esta base de modo que la matriz I_{ij} resulte diagonal. Los ejes asociados a una tal base se llaman ejes principales. En la mayoría de los problemas, la simetría del cuerpo hará evidente cuáles son sus ejes principales respecto a un dado punto. Cuando se trabaja en una base de ejes principales, resulta

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right), \tag{33}$$

donde $I_1 \equiv I_{11}$, etc. Llamando momentáneamente a las direcciones de los versores $\hat{e}_i$ como xyz, es fácil ver que

$$I_1 = \sum m(y^2+z^2), \quad I_2 = \sum m(x^2+z^2), \quad I_3 = \sum m(x^2+y^2). \tag{34}$$

Un caso especial es el de los cuerpos planos, digamos, contenidos en el plano $z=0$. Uno de los ejes principales es la normal al plano. Es inmediato comprobar que

$$I_1 + I_2 = I_3. \tag{35}$$

Por ejemplo, no se necesita hacer ningún cálculo para decir que el momento de inercia de un anillo con respecto a su eje es $I_3 = MR^2$. La propiedad (35) nos dice que los otros dos momentos de inercia (que por simetría deben ser iguales) son $I_1 = I_2 = MR^2/2$. El cálculo explícito requiere hacer una integral, y en la integral el error asecha:

$$I_1 = \frac{M}{2\pi R}\int_0^{2\pi} R d\varphi\, y(\varphi)^2 = \frac{M}{2\pi R}\int_0^{2\pi} R d\varphi\, R^2 \sin^2\varphi = \frac{1}{2}MR^2. \tag{36}$$

Les recomiendo que lean los comentarios que siguen a la ec. 32.9 en el libro de Landau y Lifshitz. Allí se habla de cómo las simetrías del cuerpo permiten encontrar los ejes principales sin tener que diagonalizar explícitamente una matriz.

6. La energía cinética en términos de los ángulos de Euler

Combinando todo lo dicho anteriormente, escribimos la energía cinética de rotación en términos de los ángulos de Euler cuando se usa la representación de versores fijos al cuerpo y cuando esos versores están sobre las direcciones de ejes principales:

$$T_{\rm rot} = \frac{I_1}{2}\left(\dot\varphi\sin\psi\sin\theta + \dot\theta\cos\psi\right)^2 + \frac{I_2}{2}\left(\dot\varphi\cos\psi\sin\theta - \dot\theta\sin\psi\right)^2 + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2. \tag{37}$$

Un caso de especial importancia es el de los cuerpos simétricos, en donde dos de los momentos de inercia principales son iguales. Lo usual es elegir los ejes fijos al cuerpo de modo que sea $I_1 = I_2 = I$. Pero independientemente de esto, una propiedad que resulta útil es que la elección de los ejes principales cuyos momentos son iguales es arbitraria. Lo único que está definido es el plano en el que deben estar esos ejes. Eso quiere decir que se puede tomar cualquier par de versores $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ en ese plano sin alterar la forma de la matriz I_{ij}. Siempre será $I_1 = I_2 = I$. Como deberían comprobar, resultará entonces

$$T_{\rm rot} = \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + \frac{I}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right). \tag{38}$$

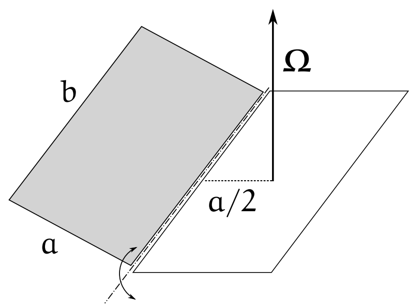
Es lógico que en esta expresión ψ sea una variable cíclica, porque en cualquier instante podemos definir las direcciones principales con $\hat{e}_1$ en la línea de nodos, lo que es equivalente a tomar $\psi = 0$. De hecho, esa es la forma más rápida de deducir la expresión anterior a partir de la ec. (37). Es un poco decepcionante que en el caso en que los tres momentos principales son iguales, $I_1 = I_2 = I_3 = I$, la forma de la energía cinética no se simplifique mucho más, sino que resulta

$$T_{\rm rot} = \frac{I}{2}\left(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\right). \tag{39}$$

Si quieren pensar un poco, una cuestión relacionada con las simetrías es explicar por qué las componentes (29) de $\boldsymbol{\omega}$, y por lo tanto $T_{\rm rot}$, no pueden depender de φ.

7. Guía 6, problema 5

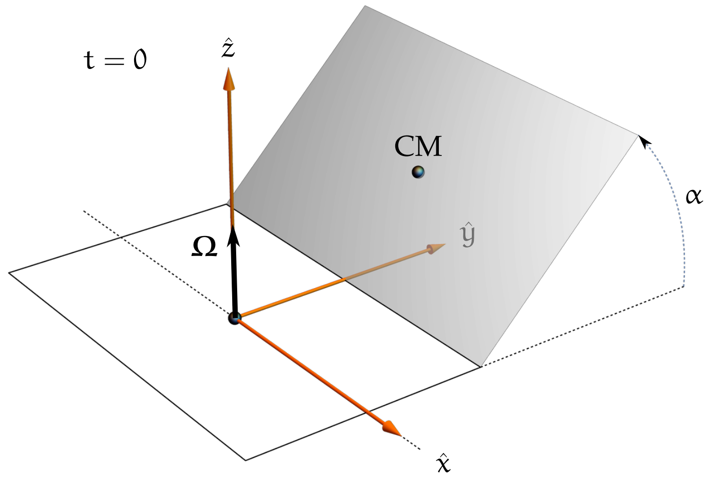
Una placa rectangular tiene lados a y b. La placa se mantiene fija por uno de sus lados a un marco que está en el plano horizontal. El marco tiene dimensiones ligeramente más grandes que las de la placa, para permitirle a esta girar alrededor de su lado fijo, como si fuera una puerta. A su vez, el marco rota alrededor de su centro con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$, como muestra la figura.



a) Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad. ¿Existe algún punto de equilibrio estable?

b) Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad. ¿Existe algún punto de equilibrio estable?

■ **Solución**. Esta clase de problemas se resuelven siguiendo más o menos siempre el mismo orden. Lo primero es encontrar coordenadas generalizadas (sin pensar necesariamente en los ángulos de Euler). En este problema el único grado de libertad que existe es el ángulo α que la placa forma con el plano horizontal. Asumiremos que en $t = 0$ el eje que mantiene unida la placa al marco está según la dirección x, como muestra la siguiente figura.

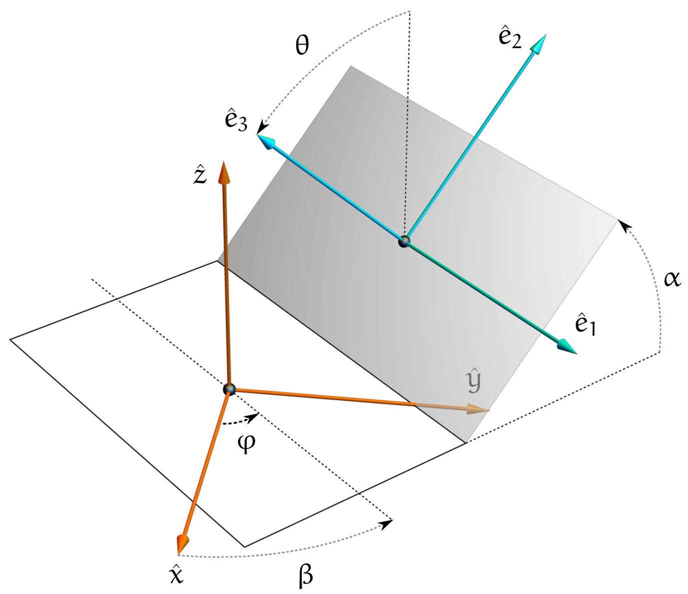


Una vez definida la coordenada generalizada, tenemos que plantearnos la elección del punto fijo al cuerpo respecto del cual descomponer la energía cinética en una parte de traslación más una parte de rotación. Vimos que los dos casos más sencillos eran cuando ese punto es el centro de masa o un punto fijo. No hay ningún punto de la placa (o, en general, fijo con respecto a la placa) que permanezca inmóvil, de modo que elegiremos el centro de masa:

$$T = \frac{1}{2}Mv_{\rm CM}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{40}$$

Según hemos visto, el cálculo del término de rotación dependerá de la base de versores que use para escribir $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{I}$. Seguiremos el camino más sencillo, que consiste en elegir versores fijos al cuerpo, de modo que las componentes I_{ij} sean constantes. Llegado a este punto, uno se pregunta si pueden tomarse esos versores de manera que el ángulo elegido como coordenada generalizada sea uno de los ángulos de Euler. También interesa que los versores correspondan a un conjunto de ejes principales. Puede haber más de una opción. Vamos a considerar dos.

7.1. Primera elección de los ejes fijos al cuerpo



Llamamos β al ángulo que forma con el eje x el lado de la placa donde está la articulación. Nos reservamos las símbolos θ, φ y ψ para los ángulos de Euler. Para esta primera elección el ángulo $\beta = \Omega t$ es en verdad el ángulo de Euler φ, y el ángulo α es el ángulo de Euler θ. La única forma en que el versor $\hat{e}_1$ puede mantenerse en el plano horizontal, independientemente del valor de θ, es que $\psi = 0$. Así, las ecs. (29) implican

$$\omega_1 = \dot{\alpha}, \quad \omega_2 = \Omega \sin\alpha, \quad \omega_3 = \Omega\cos\alpha. \tag{41}$$

Por la simetría de la placa, los ejes que elegimos son ejes principales. Por tratarse de un cuerpo plano, es además $I_1 + I_2 = I_3$.

La energía cinética de rotación es entonces

$$T_{\rm rot} = \frac{I_1}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{I_2}{2}\Omega^2\sin^2\alpha + \frac{I_3}{2}\Omega^2\cos^2\alpha = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\alpha}^2 + \Omega^2\cos^2\alpha\right) + \frac{I_2}{2}\Omega^2. \tag{42}$$

Por otra parte, la energía cinética de traslación será

$$T_{\rm CM} = \frac{1}{2}Mv_{\rm CM}^2. \tag{43}$$

La posición del centro de masa en términos de la coordenada α y del tiempo es

$$\mathbf{r}_{\rm CM} = \frac{a}{2}(1+\cos\alpha)\hat{\varphi}(\Omega t) + \frac{a}{2}\sin\alpha\,\hat{z}. \tag{44}$$

Su velocidad,

$$\boldsymbol{v}_{\rm CM} = \frac{a}{2}\left[-(1+\cos\alpha)\Omega\,\hat{\rho}(\varphi) - \dot{\alpha}\sin\alpha\,\hat{\varphi}(\varphi) + \dot{\alpha}\cos\alpha\,\hat{z}\right]. \tag{45}$$

Finalmente,

$$v_{\rm CM}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2\left[(1+\cos\alpha)^2\Omega^2 + \dot{\alpha}^2\right]. \tag{46}$$

En definitiva,

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{a}{2}\right)^2\left[(1+\cos\alpha)^2\Omega^2 + \dot{\alpha}^2\right] + \frac{I_1}{2}\left(\dot{\alpha}^2 + \Omega^2\cos^2\alpha\right) + \frac{I_2}{2}\Omega^2. \tag{47}$$

Agrupando algunos términos,

$$T = \frac{1}{2}Ma^2\left(\frac{1}{4} + \frac{I_1}{Ma^2}\right)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_1\Omega^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}M\left(\frac{a}{2}\right)^2(1+\cos\alpha)^2\Omega^2 + \frac{I_2}{2}\Omega^2. \tag{48}$$

Teniendo en cuenta que puede haber gravedad, la energía potencial es

$$V(\alpha) = Mg\frac{a}{2}\sin\alpha. \tag{49}$$

Desarrollando un poco más y omitiendo términos constantes, el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\alpha,\dot{\alpha}) = \frac{1}{2}Ma^2\left(\frac{1}{4} + \frac{I_1}{Ma^2}\right)\left(\dot{\alpha}^2 + \Omega^2\cos^2\alpha\right) + M\left(\frac{a}{2}\right)^2\Omega^2\cos\alpha - Mg\frac{a}{2}\sin\alpha. \tag{50}$$

El momento de inercia I_1 se calcula fácilmente:

$$I_1 = \frac{M}{ab}\int_{-b/2}^{b/2}dx\int_{-a/2}^{a/2}dy\,y^2 = \frac{Ma^2}{12}. \tag{51}$$

Con esto resulta

$$\frac{1}{Ma^2}\mathcal{L}(\alpha,\dot\alpha) = \frac{1}{6}\dot\alpha^2 + \frac{1}{12}\left(2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha\right)\Omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\sin\alpha, \tag{52}$$

con $\omega_0^2 = g/a$. El segundo término se reduce usando que $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, lo que agrega un término constante. A todos los efectos prácticos podemos usar el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}^*(\alpha,\dot\alpha) = \frac{1}{6}\dot\alpha^2 + \frac{1}{12}\left(\cos 2\alpha + 3\cos\alpha\right)\Omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\sin\alpha. \tag{53}$$

Este lagrangiano tiene la misma forma que el de un sistema esclerónomo que tuviera por término cinético a $\dot\alpha^2/6$, y por término potencial a

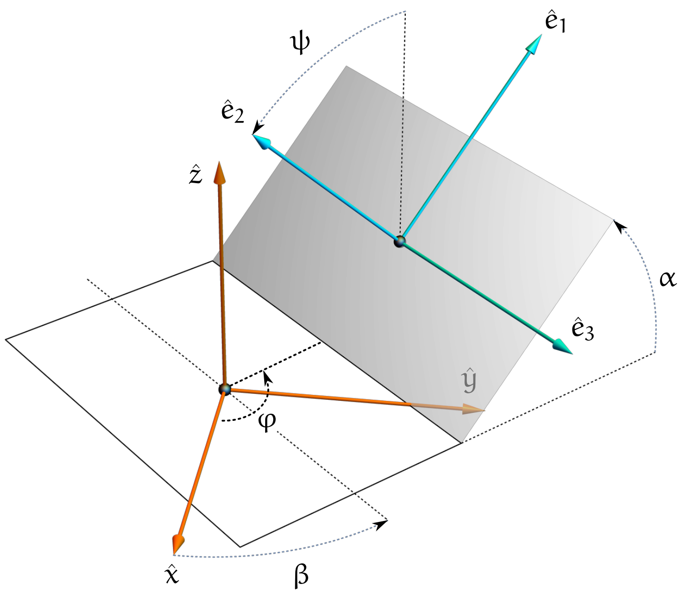
$$V_{\text{ef}}(\alpha) = -\frac{1}{12}\left(\cos 2\alpha + 3\cos\alpha\right)\Omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\sin\alpha. \tag{54}$$

La misma equivalencia está implícita en el hecho de que $\mathcal{L}^*$ no depende del tiempo, y por lo tanto su función h se conserva. Esta función h no es la energía del problema original (la energía cinética no es cuadrática en las velocidades) pero coincide con la energía del sistema equivalente. Sea cual sea la forma de interpretarlo, podemos reducir el problema a una ecuación de conservación de la forma

$$\frac{1}{6}\dot\alpha^2 - \frac{1}{12}\left(\cos 2\alpha + 3\cos\alpha\right)\Omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\sin\alpha = h. \tag{55}$$

El estudio de las condiciones de estabilidad queda para ustedes. En el caso sin gravedad, es interesante explicar en términos elementales la existencia de un misterioso punto de equilibrio donde la placa no está horizontal. Otra cuestión interesante es que en ningún momento aparece en los cálculos la longitud b. Podemos reemplazar toda la placa por una barra sujeta al marco y obtendríamos el mismo lagrangiano.

7.2. Segunda elección de los ejes fijos al cuerpo



Ahora el versor $\hat{e}_3$ está en el plano de la placa, paralelo a su articulación con el marco, y se mantiene también en el plano horizontal,

$$\hat{e}_3 = \hat{\rho}(\beta). \tag{56}$$

Pero $\hat{e}_3$ está en el plano horizontal si y sólo si $\theta = \pi/2$.

Por otro lado, sabemos que el ángulo que forma con el semieje y negativo la proyección del versor $\hat{e}_3$ sobre el plano horizontal nos da el ángulo de Euler φ. Esto quiere decir que el ángulo β es igual a $\varphi - \pi/2$. Por último el ángulo α coincide con el ángulo ψ de Euler. Las componentes de la velocidad angular son ahora

$$\omega_1 = \Omega \sin\alpha, \quad \omega_2 = \Omega\cos\alpha, \quad \omega_3 = \dot{\alpha}. \tag{57}$$

La energía cinética de rotación es

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1'}{2}\Omega^2 \sin^2\alpha + \frac{I_2'}{2}\Omega^2\cos^2\alpha + \frac{I_3'}{2}\dot{\alpha}^2. \tag{58}$$

Respecto a lo que definimos antes, es $I_1' = I_2$, $I_2' = I_3$ y $I_3' = I_1$. Luego,

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_2}{2}\Omega^2 \sin^2\alpha + \frac{I_3}{2}\Omega^2\cos^2\alpha + \frac{I_1}{2}\dot{\alpha}^2, \tag{59}$$

que coincide con la expresión (42). No es necesario modificar el término de energía de traslación ni el término del potencial, de manera que obtendremos el mismo lagrangiano.

7.3. Test de fuerza

La siguiente observación es fundamental: una vez elegidas las coordenadas generalizadas, el lagrangiano no puede depender de cómo decidan descomponer la energía cinética, ni de qué base de versores usen para escribir el término de rotación. El lagrangiano es $\mathcal{L}(q, \dot{q})$. La cuentas podrán cambiar, pero a una elección de coordenadas generalizadas corresponde un sólo lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$.

Acabamos de comprobar esto mediante las dos elecciones que hicimos de los versores fijos a la placa. Fue algo relativamente sencillo, porque no hicimos mucho más que cambiar el nombre de los ejes fijos al cuerpo. Un camino verdaderamente diferente es calcular la energía de rotación usando el tensor de inercia y la velocidad angular escritos en la base de versores fijos al espacio. En este caso, las componentes del tensor de inercia van a depender del tiempo. Necesitarán calcular I_{ij} para todo α y todo t.

Les dejo un punto de partida. Vamos a seguir escribiendo sumas, aunque en realidad lo que tienen que calcular son integrales de superficie. Las componentes del tensor de inercia en la base de versores fijos al espacio son (ahora escribo explícitamente el índice para cada partícula del cuerpo)

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_n m(n)\left[\delta_{ij} r'(n)^2 - r_i'(n) r_j'(n)\right] \\ &= \sum_n m(n)\left[\delta_{ij}\left|\mathbf{r}(n) - \mathbf{r}_0\right|^2 - \left(r_i(n) - r_{0i}\right)\left(r_j(n) - r_{0j}\right)\right]. \end{aligned} \tag{60}$$

Tienen que escribir esto como una integral sobre la placa. Para eso necesitarán parametrizar cada punto de la placa usando dos parámetros. Es decir, tendrían que elegir dos nuevas coordenadas para definir la posición de cada punto de la placa,

$$\mathbf{r}(n) \to \mathbf{r}(\alpha, u, w, t). \tag{61}$$

Les va a quedar una integral sobre u y w. Deberán escribir el elemento de área en términos de esos parámetros. Y eso es sólo el comienzo.

Creo que de aquí al jueves pueden resolver este problema. Es el primer problema de cuerpo rígido propiamente dicho que figura en la guía. No tienen otra cosa que hacer. Háganme caso y resuelvan este ejercicio.