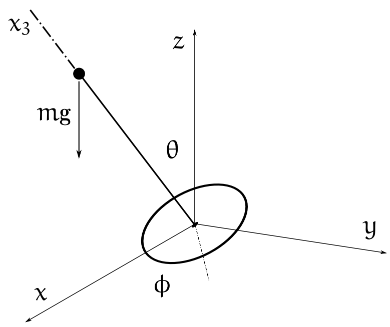
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019
Clase práctica del jueves 10/10

Precesión y nutación de un giróscopo rápido

■ Es el problema 8 de la Guía 6, en versión telegrama. Para mayores detalles, lean la sección 5-7 de Goldstein 2da. ed.



Un giróscopo rota alrededor del eje x_3 con velocidad angular $\omega_3 = \omega$. Su momento de inercia axial es I_3 y el momento de inercia alrededor de cualquier eje en el plano $x_1 x_2$ es I. Un peso mg está fijo sobre el eje x_3 a una distancia d del origen. Hay que escribir el lagrangiano, encontrar magnitudes conservadas y reducir a un problema unidimensional. Se pide linealizar las ecuaciones obtenidas bajo la suposición de que $\theta \simeq \pi/2$ y las velocidades $\dot\theta$, $\dot\phi$ sean pequeñas. Inicialmente $\theta = \pi/2$, $\phi(0) = 0$, $\dot\phi(0) = \dot\theta(0) = 0$. Vamos a suponer que el momento de inercia I incluye la contribución de m.

- El lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \psi, \dot\theta, \dot\varphi, \dot\psi) = \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + \frac{I}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) - mgd\cos\theta. \tag{1}$$

- Ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + \frac{I}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + mgd\cos\theta = \mathcal{E}. \tag{2}$$

- Primer impulso generalizado que se conserva, $\partial\mathcal{L}/\partial\dot\psi$:

$$I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) = A. \tag{3}$$

  Esto expresa la conservación de la proyección del momento angular sobre el eje 3 del cuerpo, que es lo mismo que decir que ω_3 es constante. Según las condiciones iniciales $\cos\theta = 0$ y $\omega_3 = \dot\psi(0) = \omega$, y queda

$$A = I_3\omega. \tag{4}$$

- Segundo impulso conservado, $\partial\mathcal{L}/\partial\dot\varphi$:

$$I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)\cos\theta + I\dot\varphi\sin^2\theta = B. \tag{5}$$

  Demuestren que esto es L_z. Usando la primera conservación queda

$$A\cos\theta + I\dot\varphi\sin^2\theta = B. \tag{6}$$

La condición inicial da $B = 0$. De la ecuación anterior, con $A = I_3\omega$, se obtiene

$$\dot{\varphi} = -\frac{I_3\omega\cos\theta}{I\sin^2\theta}. \tag{7}$$

- Reemplazando en la ecuación de conservación de la energía queda

$$\frac{I}{2}\left[\dot{\theta}^2 + \left(\frac{I_3}{I}\right)^2\frac{\omega^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right] + mgd\cos\theta = C, \tag{8}$$

donde C una constante; no importa mucho escribirla explícitamente. El problema se reduce a un problema unidimensional para θ, donde el potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{I_3^2}{2I}\frac{\omega^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + mgd\cos\theta. \tag{9}$$

- Linealizando (8) alrededor de $\theta = \pi/2$,

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \eta, \qquad \eta \ll 1, \tag{10}$$

la ecuación de conservación de la energía queda como

$$\frac{I}{2}\left[\dot{\eta}^2 + \left(\frac{I_3}{I}\right)^2\omega^2\eta^2\right] - mdg\eta = \text{constante}. \tag{11}$$

- Dividiendo por $I/2$ y completando cuadrados,

$$\dot{\eta}^2 + \left(\frac{I_3}{I}\right)^2\omega^2\left(\eta - \frac{mgdI}{\omega^2 I_3^2}\right)^2 = \text{constante}. \tag{12}$$

- De aquí ya se obtiene $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \frac{mgd}{\omega^2}\frac{I}{I_3^2} + a\cos\Omega t + b\sin\Omega t, \tag{13}$$

donde

$$\Omega^2 = \left(\frac{I_3}{I}\right)^2\omega^2, \tag{14}$$

y las constantes a y b hay que fijarlas con las condiciones iniciales. Inicialmente $\theta = \pi/2$, lo que significa $\eta(0) = 0$; entonces

$$a = -\frac{mgd}{\omega^2}\frac{I}{I_3^2}. \tag{15}$$

Por otro lado $\dot{\theta}(0) = \dot{\eta}(0)$ es también igual a cero, lo que implica $b = 0$, y finalmente

$$\eta(t) = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\frac{md^2 I}{I_3^2}\left(1 - \cos\Omega t\right), \tag{16}$$

donde $\omega_0^2 = g/d$. Esta sería la ec. 5.71 de Goldstein 2da. ed.

- Volviendo a la ec. (7), a primer orden en η queda

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3}{I}\omega\eta(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega}\frac{md^2}{I_3}\left(1 - \cos\Omega t\right), \tag{17}$$

y de aquí es de dónde sale la velocidad media de precesión

$$\langle\dot{\varphi}\rangle = \frac{\omega_0^2}{\omega}\frac{md^2}{I_3}, \tag{18}$$

que sería la ec. 5.74 de Goldstein.