Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 17/10: *Esferas moviéndose en lugares**

"On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage."
— J. L. Lagrange, *Mécanique analytique*

1. Esfera en un plano

Una esfera de radio a, masa m y momento de inercia I rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. Hay que encontrar las ecuaciones de movimiento por dos métodos distintos.

1.1. Vía Lagrange

Se trata de un problema con vínculos no holónomos. Supondremos que la esfera se mueve sobre el plano $z = 0$, con su centro a una altura constante igual al radio a. Como coordenadas generalizadas tomaremos las coordenadas x e y del centro de la esfera y los ángulos de Euler. Descompondremos la energía cinética usando como punto de referencia el centro de la esfera. Teniendo en cuenta que el tensor de inercia es proporcional al tensor identidad queda

$$\mathcal{L}\left(x, y, \theta, \varphi, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\right). \tag{1}$$

La condición de rodadura indica que, en el punto de contacto, la velocidad del punto de la esfera que toca el plano debe ser cero. La velocidad de cualquier punto p de la esfera se escribe como

$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}), \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad del centro de la esfera, $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la esfera y $\mathbf{r}$ es la posición de su centro. Para el punto de la esfera que está en contacto con el plano es

$$\mathbf{r}_p - \mathbf{r} = -a\,\hat{z}. \tag{3}$$

Debe ser entonces

$$\dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} - a\boldsymbol{\omega} \times \hat{z} = 0. \tag{4}$$

*zanellaj@df.uba.ar

Las cosas parecen estar a favor de escribir $\boldsymbol{\omega}$ en la base xyz, con lo que resulta

$$\dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + a(\omega_x\,\hat{y} - \omega_y\,\hat{x}) = 0. \tag{5}$$

Agrupando por componentes,

$$\dot{x} - a\omega_y = 0, \tag{6}$$

$$\dot{y} + a\omega_x = 0. \tag{7}$$

Escribiendo explícitamente las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ en términos de los ángulos de Euler, se obtienen las dos ecuaciones de vínculo

$$\dot{x} - a(\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi) = 0, \tag{8}$$

$$\dot{y} + a(\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi) = 0. \tag{9}$$

La forma diferencial de las ecuaciones de vínculo da las relaciones que deben satisfacer los desplazamientos virtuales:

$$\delta x - a(\delta\theta\sin\varphi - \delta\psi\sin\theta\cos\varphi) = 0, \tag{10}$$

$$\delta y + a(\delta\theta\cos\varphi + \delta\psi\sin\theta\sin\varphi) = 0. \tag{11}$$

Detengámonos un momento para recordar la manera en la que se escriben las ecuaciones de movimiento cuando los vínculos son de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}(\mathbf{q})\dot{q}_j = 0, \tag{12}$$

con $l = 1, \ldots, M$. Por un lado, el principio de D'Alembert implica que, para todos los desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos, debe ser

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0. \tag{13}$$

Los desplazamientos virtuales compatibles con las ecuaciones de vínculo (12) satisfacen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}(\mathbf{q})\delta q_j = 0. \tag{14}$$

Introduciendo M multiplicadores de Lagrange, el principio de D'Alembert junto con las ecuaciones anteriores y el famoso resultado de que $0 + 0 = 0$ implican

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{M}\lambda_l a_{lj}\right]\delta q_j = 0. \tag{15}$$

Según el teorema que todos conocemos, el término que multiplica a cada δq_j debe ser cero.

El sistema final se compone de las ecuaciones modificadas de E-L más las de vínculo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{M} \lambda_l a_{lj} = 0, \qquad j = 1, \dots n, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} \dot{q}_j = 0, \qquad l = 1, \dots, M. \tag{17}$$

Las incógnitas son las n funciones q_j y los M multiplicadores λ_l.

En el caso de la esfera sobre el plano, necesitamos dos multiplicadores. Las ecuaciones de E-L para x e y son

$$m\ddot{x} = \lambda_1, \qquad m\ddot{y} = \lambda_2. \tag{18}$$

Vemos así que los multiplicadores son las componentes x e y de la fuerza de rozamiento. Debido a que $\dot{\varphi}$ no aparece en las ecuaciones de vínculo (9), la ecuación de E-L para φ no involucra a los multiplicadores,

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\Big) = 0. \tag{19}$$

Esta ecuación expresa la constancia de ω_z. Las ecuaciones asociadas a θ y a ψ son

$$I\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\right) = a(-\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_2\cos\varphi), \tag{20}$$

$$I\left(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\right) = a\sin\theta\,(\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2\sin\varphi)\,. \tag{21}$$

Ahora sigue un poco de malabarismo. Derivando respecto del tiempo las ecuaciones de vínculo (9), obtenemos

$$\ddot{x} = \quad a\big(\ddot{\theta}\sin\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi - \ddot{\psi}\sin\theta\,\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\,\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\,\sin\varphi\big), \tag{22}$$

$$\ddot{y} = -a\big(\ddot{\theta}\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi + \ddot{\psi}\sin\theta\,\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\,\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\,\cos\varphi\big). \tag{23}$$

Estas ecuaciones junto con las ecs. (18) nos dan λ_1 y λ_2 en términos de los ángulos de Euler y de sus derivadas. Es fácil ver que los segundos miembros de las ecs. (20) y (21) son

$$\lambda_1\sin\varphi - \lambda_2\cos\varphi = ma\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\right), \tag{24}$$

$$\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2\sin\varphi = ma\left(\dot{\theta}\dot{\varphi} - \ddot{\psi}\sin\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right). \tag{25}$$

Así, la ec. (20) se lee como

$$\left(I + ma^2\right)\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\right) = 0. \tag{26}$$

La otra ecuación da un poco más de trabajo. Primero escribimos $\ddot{\varphi}$ a partir de la ec. (19),

$$\ddot{\varphi} = -\ddot{\psi} + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta. \tag{27}$$

Reemplazamos esta expresión en el primer miembro de la ec. (21), y usamos la ec. (25) para escribir el segundo miembro,

$$I\sin\theta\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\right) = ma^2\sin\theta\left(\dot{\theta}\dot{\varphi} - \ddot{\psi}\sin\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right). \tag{28}$$

Finalmente ocurre algo parecido a lo que sucedió con la primera ecuación, obtenemos

$$\left(I + ma^2\right)\sin\theta\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\right) = 0. \tag{29}$$

En resumen, el par de ecuaciones que conseguimos es

$$\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta = 0, \tag{30}$$

$$\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi} = 0. \tag{31}$$

Comparando con las ecs. (24) y (25), vemos que debe ser, un poco intempestivamente,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0. \tag{32}$$

A partir de aquí el problema se resuelve solo: las ecs. (18) dan $\dot{x}$ y $\dot{y}$ constantes, lo que implica, a través de las ecs. (6) y (7), que ω_x y ω_y son constantes. Si a esto agregamos la ec. (19), tenemos que $\boldsymbol{\omega}$ es un vector constante.

Llegamos así, por un camino complicado, al resultado más simple: una esfera en un plano, en ausencia de fuerzas externas y sin deslizamiento, no puede hacer otra cosa que moverse en línea recta y rotar con velocidad angular constante; el rozamiento es cero.

1.2. Vía ecuaciones de Newton

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la esfera son la ecuación para la fuerza y la ecuación para el torque. Si llamamos $\mathbf{r}$ a la posición del centro de la esfera es

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \tag{33}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau}. \tag{34}$$

La fuerza $\mathbf{F}$ incluye a la fuerza de rozamiento, la fuerza normal y el peso, si hubiera gravedad. Puesto que la esfera está restringida a moverse sobre el plano, la fuerza normal y el peso se cancelan. A todos los efectos prácticos, podemos omitir las fuerzas en la dirección z e igualar la fuerza $\mathbf{F}$ con la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}$. La posición del centro de la esfera se escribe en todo momento como

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + a\,\hat{z}, \tag{35}$$

donde $\boldsymbol{\rho}$ está en el plano horizontal,

$$\boldsymbol{\rho} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}. \tag{36}$$

Tanto el impulso angular como el torque $\boldsymbol{\tau}$ están calculados respecto del centro de la esfera. El torque se origina en la fuerza de rozamiento. Si $\mathbf{r}$ representa la posición del centro de la esfera y $\mathbf{r}_p$ es el punto de la esfera en contacto con el plano, entonces

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}) \times \mathbf{f}. \tag{37}$$

Pero $\mathbf{r}_p - \mathbf{r} = -a\,\hat{z}$, de modo que

$$\boldsymbol{\tau} = -a\,\hat{z} \times \mathbf{f}. \tag{38}$$

Por otro lado, debido a que el momento de inercia es proporcional al tensor identidad,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{39}$$

Tenemos entonces las siguientes ecuaciones

$$m\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{f}, \tag{40}$$

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -a\,\hat{z} \times \mathbf{f}. \tag{41}$$

Vemos que $\hat{z} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_z = 0$. Existe una tercera ecuación, que es la condición de rodadura,

$$\dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\rho}} - a\,\hat{z} \times \boldsymbol{\omega} = 0. \tag{42}$$

Con la ayuda de esta ecuación podemos escribir una de las incógnitas en términos de la otra. Derivando (42) con respecto al tiempo resulta

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = a\,\hat{z} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}. \tag{43}$$

Reemplazando en la ec. (40),

$$ma\,\hat{z} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}. \tag{44}$$

Tomando el producto vectorial con $\hat{z}$, usando la ec. (41) y el resultado de que $\hat{z} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$,

$$-\,ma\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{I}{a}\dot{\boldsymbol{\omega}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0. \tag{45}$$

Confirmamos el resultado que obtuvimos por medio de las ecuaciones de E-L: la velocidad angular es constante. La ec. (43) implica, a su vez, que $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ es constante y, por lo tanto, $\dot{\mathbf{r}}$.

Este método resultó mucho más elegante que el anterior. No siempre va a suceder eso. Aquí estuvimos auxiliados por el hecho de que el tensor de inercia fuera proporcional al tensor identidad. En otros casos, será más directo el primer método, que también cuenta con la ventaja de que es fácil de programar, porque todas las coordenadas están a la vista.

Al usar el segundo método en ningún momento tuvimos que introducir coordenadas, nos manejamos con ecuaciones vectoriales. El primer método proporciona un algoritmo ya listo para implementar en la computadora y fácil de generalizar. En el segundo método no seguimos un algoritmo definido; fuimos deduciendo relaciones, más o menos al tanteo. Si en algún punto hubiéramos introducido coordenadas, habríamos llegado a las ecuaciones que obtuvimos con el primer método.

2. Esfera en un plano que rota

Una esfera de radio a, masa m y momento de inercia I se mueve sin deslizar sobre un plano horizontal. El plano rota alrededor del origen. Se trata de encontrar el movimiento de la esfera. Usaremos las ecuaciones para la fuerza y el torque más la condición de rodadura.

La posición del centro de la esfera es $\boldsymbol{\rho} + a\,\hat{z}$, donde $\boldsymbol{\rho} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$ está en el plano horizontal. Las fuerzas externas son la normal y el rozamiento. La normal será igual al peso de la esfera. En esa dirección no pasa nada interesante. La fuerza de rozamiento, $\mathbf{f}$, sólo tendrá componentes en el plano horizontal. Las ecuaciones para el movimiento del centro de masa y para la variación del impulso angular respecto del centro de masa son

$$m\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{f}, \tag{46}$$

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -a\,\hat{z} \times \mathbf{f}. \tag{47}$$

La segunda ecuación implica la constancia de ω_z. Usando el hecho de que $\mathbf{f}$ está en el plano xy, si hacemos el producto vectorial de la segunda ecuación con el versor $\hat{z}$, queda

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{z} = -a\mathbf{f}. \tag{48}$$

Reemplazando en la ec. (46), obtenemos una relación entre la aceleración y $\dot{\boldsymbol{\omega}}$,

$$m\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{I}{a}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{z}. \tag{49}$$

El punto del plano en contacto con la esfera está en la posición $\mathbf{r}_p = \boldsymbol{\rho}$. Si el plano rota con velocidad $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$ alrededor del origen, la velocidad de ese punto es

$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}. \tag{50}$$

Por otro lado, la velocidad del punto de la esfera en contacto con el plano es

$$\boldsymbol{v}_e = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (-a\,\hat{z}) = \dot{\boldsymbol{\rho}} - a\boldsymbol{\omega} \times \hat{z}. \tag{51}$$

La condición de rodadura es $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}_e$, lo que implica

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} - a\boldsymbol{\omega} \times \hat{z} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}. \tag{52}$$

Derivando esta ecuación respecto del tiempo obtenemos una relación entre las derivadas de $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\omega}$,

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = a\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{z} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}. \tag{53}$$

De aquí podemos despejar el término $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{z}$ y reemplazarlo en la ec. (49), con lo que se obtiene una ecuación cerrada para $\boldsymbol{\rho}$,

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\lambda\Omega\, \dot{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{z}, \tag{54}$$

donde

$$\lambda = \frac{I}{I + ma^2}. \tag{55}$$

Para una esfera homogénea es $\lambda = 2/7$.

La ec. (54) tiene la misma forma que la ecuación de movimiento en un plano de una partícula cargada en presencia de un campo magnético, que en el sistema CGS es

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{q}{mc}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \tag{56}$$

Recordarán que en ese caso las órbitas son círculos. Por lo tanto, la posición del centro de masa de la esfera en el plano rotatorio también describirá círculos, con $\nu = |\dot{\boldsymbol{\rho}}|$ constante. La forma de obtener el radio de órbita consiste en igualar la aceleración centrípeta con la fuerza,

$$\frac{\nu^2}{R} = \lambda|\Omega|\nu \Rightarrow R = \frac{\nu}{\lambda|\Omega|} \tag{57}$$

Tiene sentido que para $\Omega \to 0$, $R \to \infty$. El período del movimiento circular es

$$T = \frac{2\pi R}{\nu} = \frac{2\pi}{\lambda|\Omega|}. \tag{58}$$

Todas las esferas que tengan el mismo valor de λ, tendrán órbitas con el mismo período, independientemente de su masa, de su radio, de su velocidad o del radio de la órbita.

Para obtener otras propiedades de la órbita, sin resolverla por completo, notemos que en ambos miembros de la ec. (54) aparece una derivada total respecto del tiempo, lo que permite reducir en uno el grado de la ecuación,

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = -\lambda\Omega(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{A}) \times \hat{z}, \tag{59}$$

donde $\mathbf{A}$ es un vector constante en el plano xy. En términos de las condiciones iniciales es

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_0 = -\lambda\Omega(\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{A}) \times \hat{z}. \tag{60}$$

Tomando el producto vectorial con $\hat{z}$ se puede despejar $\mathbf{A}$ en función de las condiciones iniciales,

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \times \hat{z} = \lambda\Omega(\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \times \hat{z}}{\lambda\Omega}. \tag{61}$$

Sin alterar el contenido de la ec. (59), podemos reescribirla como

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{A}) = -\lambda\Omega(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{A}) \times \hat{z}. \tag{62}$$

Una ecuación de este tipo implica que el módulo de $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{A}$ es constante. Esto quiere decir que el centro de la esfera se mueve en un círculo cuyo centro está en $\mathbf{A}$ y cuyo radio es, como vimos antes,

$$R = |\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{A}| = \frac{|\dot{\boldsymbol{\rho}}_0|}{\lambda|\Omega|}. \tag{63}$$

Ustedes deberían demostrar que la ecuación de la trayectoria del centro de la esfera en el plano xy es

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{A} + \frac{1}{\lambda\Omega}\big[\cos(\lambda\Omega t)\,(\dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \times \hat{z}) + \sin(\lambda\Omega t)\,\dot{\boldsymbol{\rho}}_0\big]. \tag{64}$$

Esto hace evidente que la órbita es un círculo centrado en $\mathbf{A}$, pero no está claro si en $t = 0$ es $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$. Pueden verificar que la ecuación anterior también se escribe como

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{A} + (\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{A})\cos(\lambda\Omega t) + [\hat{z} \times (\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{A})]\sin(\lambda\Omega t), \tag{65}$$

lo que pone de manifiesto que en $t = 0$ es $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$.

De manera muy poco intuitiva, el problema tiene simetría de traslación en el plano xy (compárese con el problema 13 de la Guía 3). Si la velocidad inicial es la misma, distintas posiciones iniciales dan como resultado órbitas semejantes. Lo único que las diferencia es la posición de sus centros. Es muy extraño que el hecho de que el plano rote alrededor del origen no haga que el origen sea un punto en alguna manera especial, en lo que respecto al movimiento del centro de la esfera.

Con un poco más de trabajo también pueden calcular $\boldsymbol{\omega}(t)$,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{1-\lambda}{a}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0). \tag{66}$$

Como era de esperarse, aquí ya no existe la simetría de traslación. Para mantener la condición de rodadura, órbitas centradas en distintos puntos requerirán velocidades angulares diferentes, dependiendo de la distancia al centro de rotación del plano.

Ejercicio propuesto. Resolver el problema de la esfera sobre el plano giratorio cuando el plano está inclinado un ángulo α respecto de la vertical. El eje de giro sigue siendo la normal al plano. Intuitivamente uno esperaría que la esfera rodase cuesta abajo. Encuentren el problema equivalente en términos de una carga eléctrica en campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Consulten las soluciones de ese problema en cualquier libro de Física 3 o de electromagnetismo y apliquen esas soluciones al problema de la esfera en el plano giratorio inclinado.

3. Esfera sobre un plano movedizo

Es un problema que no está en la guía y que no llegamos a ver en clase. El resultado es sorprendente y, lo que es mejor, es muy sencillo hacer el experimento, basta con una pelota de tenis o similar y una hoja de papel.

Inicialmente ($t < 0$) una esfera de radio a, masa m y momento de inercia I se mueve sin deslizar sobre un plano horizontal en reposo. Entre $t = 0$ y $t = T$ el plano se mueve de manera arbitraria paralelamente a sí mismo (es decir, no sube ni baja, sólo se mueve hacia los costados y puede rotar alrededor de cualquier punto). El movimiento puede ser lo suficientemente brusco como para que la condición de rodadura deje de cumplirse. Para $t > T$ el plano está otra vez en reposo y la esfera vuelve a rodar sin deslizar. Debido a los resultados del primer problema, sabemos que para $t < 0$ la velocidad $\boldsymbol{v}_0$ del centro de masa de la esfera y su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0$ son constantes. Para $t > T$, serán constantes su velocidad final $\boldsymbol{v}_f$ y su velocidad angular final $\boldsymbol{\omega}_f$. Hay que demostrar que son iguales a las iniciales.

Solución. El análisis del movimiento del centro de masa puede restringirse al plano horizontal. En todo momento la fuerza que actúa sobre la esfera es paralela al plano, digamos $\mathbf{f}(t)$. Las ecuaciones de movimiento son

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \mathbf{f}, \tag{67}$$

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = -a\,\hat{z} \times \mathbf{f}. \tag{68}$$

Debido a que no hay torque en la dirección z, es posible anticipar que

$$\omega_{0z} = \omega_{fz}. \tag{69}$$

No conocemos los detalles intermedios para $0 \leqslant t \leqslant T$, pero la forma de las ecuaciones nos permite concluir algunas cosas. Eliminando $\mathbf{f}$ de la ec. (67) y reemplazando en la ec. (68) es

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = -ma\,\hat{z} \times \dot{\boldsymbol{v}}. \tag{70}$$

Esta ecuación puede integrarse explícitamente. Existe entonces la siguiente relación, válida para todo t,

$$I\left[\boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\omega}_0\right] = -ma\,\hat{z} \times \left[\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}_0\right]. \tag{71}$$

En particular, para $t > T$,

$$I(\boldsymbol{\omega}_f - \boldsymbol{\omega}_0) = -ma\,\hat{z} \times (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_0). \tag{72}$$

Tanto para $t < 0$ como para $T > 0$, se cumple la condición de rodadura

$$\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{\omega} \times \hat{z} = 0. \tag{73}$$

Teniendo en cuenta que en la ec. (72) aparece el producto vectorial de $\hat{z}$ con las velocidades, tomando el producto vectorial de la ec. (73) con $\hat{z}$ resulta

$$\hat{z} \times \boldsymbol{v} - a\boldsymbol{\omega} + a\omega_z \, \hat{z} = 0. \tag{74}$$

Esto vale para $t < 0$, en cuyo caso tenemos

$$\hat{z} \times \boldsymbol{v}_0 - a\boldsymbol{\omega}_0 + a\omega_{0z} \, \hat{z} = 0, \tag{75}$$

y vale también para $t > T$, en donde es

$$\hat{z} \times \boldsymbol{v}_f - a\boldsymbol{\omega}_f + a\omega_{fz} \, \hat{z} = 0. \tag{76}$$

Tomando la diferencia de ambas ecuaciones y usando que $\omega_{0z} = \omega_{fz}$, obtenemos

$$\hat{z} \times (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_0) - a(\boldsymbol{\omega}_f - \boldsymbol{\omega}_0) = 0. \tag{77}$$

Entonces la ec. (72) implica

$$(I + ma^2) \, \hat{z} \times (\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_0) = 0, \tag{78}$$

lo que, dada la perpendicularidad entre las velocidades y la dirección $\hat{z}$, significa que

$$\boldsymbol{v}_f - \boldsymbol{v}_0 = 0. \tag{79}$$

Volviendo a la ec. (72), tenemos también.

$$\boldsymbol{\omega}_f - \boldsymbol{\omega}_0 = 0, \tag{80}$$

y esto completa la demostración.

Es fácil hacer el siguiente experimento: se hace rodar una esfera (una pelota de tenis, de golf, una canica, una bola de los antiguos *mouses*) de modo tal que pase sobre una hoja de papel. Mientras la esfera está sobre la hoja, mueven la hoja en cualquier dirección. El resultado del problema predice que, cuando la esfera abandone la hoja de papel o cuando el papel quede de nuevo en reposo, la esfera se seguirá moviendo con la misma velocidad que antes. El efecto es bastante asombroso de contemplar. Como ejemplo, uno puede mover la hoja de papel paralela a la velocidad de la esfera, pero tan rápido que ésta empiece a girar hacia el lado contrario. Cuando vuelve a tocar la mesa, se da vuelta otra vez. Otro experimento empieza con la esfera en reposo sobre el papel. Entonces mueven el papel de cualquier forma (sin levantarlo y con cuidado de que no tenga arrugas), y cuando lo detengan la esfera volverá a estar en reposo. Esto ocurrirá incluso si retiran el papel, lenta o rápidamente, como en el famoso truco del mantel y las copas.

4. Animales esféricos

La esfera es el más uniforme de los cuerpos sólidos, ya que todos los puntos de la superficie equidistan del centro. Por eso y por su facultad de girar alrededor del eje sin cambiar de lugar y sin exceder sus límites, Platón (Timeo, 33) aprobó la decisión del Demiurgo, que dio forma esférica al mundo. Juzgó que el mundo es un ser vivo y en las Leyes (898) afirmó que los planetas y las estrellas también lo son. Dotó, así, de vastos Animales Esféricos a la zoología fantástica y censuró a los torpes astrónomos que no querían entender que el movimiento circular de los cuerpos celestes era espontáneo y voluntario.

Más de quinientos años después, en Alejandría, Orígenes enseñó que los bienaventurados resucitarían en forma de esferas y entrarían rodando en la eternidad. En la época del Renacimiento, el concepto de Cielo como animal reapareció en Vantini; el neoplatónico Marsilio Ficino habló de los pelos, dientes y huesos de la Tierra, y Giordano Bruno sintió que los planetas eran grandes animales tranquilos, de sangre caliente y de hábitos regulares, dotados de razón. A principios del siglo XVII, Kepler discutió con el ocultista inglés Robert Fludd la prioridad de la concepción de la Tierra como monstruo viviente, "cuya respiración de ballena, correspondiente al sueño y a la vigilia, produce el flujo y el reflujo del mar". La anatomía, la alimentación, el color, la memoria y la fuerza imaginativa y plástica del monstruo fueron estudiados por Kepler.

En el siglo XIX, el psicólogo alemán Gustav Theodor Fechner (hombre alabado por William James, en la obra *A Pluralistic Universe*) repensó con una suerte de ingenioso candor las ideas anteriores. Quienes no desdeñan la conjetura de que la Tierra, nuestra madre, es un organismo, un organismo superior a la planta, al animal y al hombre, pueden examinar las piadosas páginas de su Zend-Avesta. Ahí leerán, por ejemplo, que la figura esférica de la tierra es la del ojo humano, que es la parte más noble de nuestro cuerpo. También, "que si realmente el cielo es la casa de los ángeles, estos sin duda son las estrellas, porque no hay otros habitantes del cielo".

El libro de los seres imaginarios —J. L. Borges.