

## Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

### Clase del 28/10: Método de Hamilton–Jacobi\*

El método de Hamilton–Jacobi . . . . .	1
1. Sistemas con un solo grado de libertad . . . . .	2
1.1. La dinámica de las variables originales . . . . .	5
1.2. Generalizaciones . . . . .	6
1.3. Restricciones: la constante aditiva . . . . .	7
2. Sistemas con más de un grado de libertad . . . . .	8
3. Sistemas conservativos . . . . .	10
4. Una clase de sistemas conservativos . . . . .	11
4.1. Un ejemplo . . . . .	14
4.2. Ningún misterio . . . . .	16

### El método de Hamilton–Jacobi

Hemos visto en el problema 12 de la Guía 7 que, mediante una transformación canónica adecuada, el problema del oscilador armónico, de por sí sencillo, podía llevarse a una forma todavía más sencilla. Encontramos una función generatriz  $F_2(q, P)$  que tomaba el hamiltoniano original

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (1)$$

y lo transformaba en

$$K(Q, P) = \omega P. \quad (2)$$

En estas nuevas coordenadas la dinámica es trivial. El impulso  $P$  es constante y

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \omega \\ \Rightarrow Q &= \omega t + Q_0. \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación de transformación

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}(q, P), \quad (4)$$

junto con el resultado (3) nos permiten, luego de una inversión, escribir

$$q = q(t, Q_0, P). \quad (5)$$

La ecuación diferencial más complicada que tuvimos que resolver fue  $\dot{Q} = \omega$ . Es cierto que esto no representa una gran simplificación respecto de las variables originales, en donde la ecuación es  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ . Pero sirve para asentar un hecho: mediante una transformación canónica adecuada el problema de resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento

---

\*zanellaj@df.uba.ar

puede volverse trivial; todo el peso del cálculo recae en invertir y componer funciones. Es preferible tener un sistema trivial de ecuaciones diferenciales y ciertas ecuaciones de transformación, que tener un sistema complicado de ecuaciones diferenciales y ninguna ecuación de transformación.

Lo que hicimos para el oscilador armónico tal vez lo podamos hacer con cualquier sistema. ¿No será más sencillo encontrar una transformación canónica que trivialice la dinámica, aunque luego tengamos que invertir y componer funciones, que resolver la dinámica en las variables originales? En tal caso, sería deseable que la búsqueda de la transformación adecuada no siga el procedimiento de prueba y error, sino que sea a través de un método sistemático.

Hay muchos hamiltonianos cuya dinámica podemos calificar de trivial; por ejemplo, algo de la forma (2). Sería un noble objetivo tratar de encontrar la transformación canónica que lleve de un hamiltoniano cualquiera  $H(q, p)$  a uno de la forma  $K(Q, P) = P$ . Pero sería un objetivo modesto. Puestos a resolver el problema de encontrar una transformación canónica que trivialice el hamiltoniano, nos fijaremos como objetivo que el hamiltoniano transformado sea el más trivial de los hamiltonianos. Llevados por la ambición nos proponemos que el nuevo hamiltoniano sea  $K = 0$ .

## 1. Sistemas con un solo grado de libertad

Con el método de Hamilton-Jacobi (H-J) se trata de obtener una función generatriz, en principio de tipo  $F_2$ , de manera que, en las nuevas coordenadas, el hamiltoniano sea idénticamente nulo,

$$K(Q, P, t) = K(Q, P) = 0. \quad (6)$$

Esto da ecuaciones de movimiento triviales,

$$Q(t) = Q, \quad P(t) = P. \quad (7)$$

Darí la impresión de que con esto hemos borrado el problema. Lo que no hay que perder de vista es que lo importante es lo que hacen las variables originales  $(q, p)$ , que son funciones de  $(Q, P)$  y del tiempo. La relación entre un sistema y otro está mediada por la función generatriz  $F_2$ . La dinámica de las variables originales queda cifrada en  $F_2$ . Si las ecuaciones diferenciales en las variables  $q$  y  $p$  eran complicadas, esa complicación será transferida a las ecuaciones de transformación. Pero desde el punto de vista de resolver el movimiento del sistema, es preferible que la complicación esté en las ecuaciones de transformación y no en las ecuaciones diferenciales. Es más sencillo hacer manipulaciones algebraicas que integrar ecuaciones diferenciales.

Respecto al problema general de encontrar una transformación canónica que cumpla ciertas propiedades. En general la relación entre el hamiltoniano original y el que resulta de un cambio de variables es

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H = K. \quad (8)$$

Muchas cosas están implícitas en esta ecuación. Por simplicidad hablaremos de un sistema con un grado de libertad, pero todo lo que digamos será aplicable al caso general. Una parte de un hamiltoniano  $H(q, p, t)$  y llega a un nuevo hamiltoniano  $K(Q, P, t)$ . La función generatriz, a su vez, es  $F_2(q, P, t)$ . Cada término de la ec. (8) tiene distintas variables naturales. Las ecuaciones de transformación para las variables canónicas son

$$p(q, P, t) = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q}, \quad Q(q, P, t) = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P}. \quad (9)$$

De modo que, para obtener  $K$  a partir de la ec. (8), es necesario invertir la segunda ecuación, de manera de tener

$$q = q(Q, P, t). \quad (10)$$

Hecho esto, leída por extenso la ec. (8) queda como

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(q(Q, P, t), P, t) + H(q(Q, P, t), p(q(Q, P, t), P, t), t) = K(Q, P, t). \quad (11)$$

Usando la primera ec. (9), también se puede escribir así

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(q(Q, P, t), P, t) + H\left(q(Q, P, t), \frac{\partial F_2}{\partial q}(q(Q, P, t), P, t), t\right) = K(Q, P, t). \quad (12)$$

Algo que resulta útil para no trabajar con expresiones tan recargadas es dejar para el final la transformación de las variables de  $(q, P)$  a  $(Q, P)$ . Eso nos da  $K$  como función de  $q$  y  $P$ . Seguimos usando la misma letra  $K$  para representar esta función, pero debe tenerse en cuenta que el nombre de las variables modifica el significado de la función. Entonces quedaría, de manera mucho más sencilla,

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(q, P, t) + H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t), t\right) = K(q, P, t). \quad (13)$$

La ec. (11) resultará útil si intentamos comunicarnos con una computadora para decirle cómo escribir el nuevo hamiltoniano. Entre humanos nos entendemos sin tantas formalidades.

En el método de H-J queremos que resulte  $K = 0$ , de manera que poco importa en qué variables escribamos  $K$ . El objetivo es que sea

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(q, P, t) + H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t), t\right) = 0. \quad (14)$$

Esto puede pensarse como una ecuación diferencial para  $F_2$  en las variables  $q$  y  $t$ . Si somos capaces de resolver esta ecuación tendremos la función generatriz buscada. El impulso  $P$  hace las veces de un simple parámetro; su presencia no es esencial.

Un ejemplo que sirve para entender el rol ignorable de la variable  $P$  en la ec (14) se da en la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, P) = f(x, P). \quad (15)$$

Si uno sabe cómo integrar la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \\ \Rightarrow f(x) &= Ce^x, \end{aligned} \tag{16}$$

entonces sabe integrar la ecuación en derivadas parciales (15). La presencia de  $P$  no introduce ninguna diferencia esencial. Tendremos

$$f(x, P) = C(P)e^x. \tag{17}$$

Volviendo a la ec. (14), lo que de verdad importa es considerar la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, t), t\right) = 0. \tag{18}$$

Si en la solución aparecen constantes de integración, esas constantes serán en realidad funciones de  $P$ , tal como en la ec. (17).

La ec. (18) es la ecuación de H-J. La solución  $S$  recibe el nombre de **función principal de Hamilton**. No necesitamos encontrar la solución general de esta ecuación. Sólo necesitamos una solución. Mejor dicho, una familia de soluciones que dependa de un parámetro  $\alpha$ . La dependencia en un parámetro es necesaria para poder definir a  $S$  como función de tres variables. Necesitamos que haya un espacio libre en el cual ubicar la variable  $P$  de la función generatriz.

La dependencia paramétrica en ciertas constantes de integración no debe resultarles extraña. Ocurre de manera habitual en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, si tenemos

$$f'(x) = f(x), \tag{19}$$

escribimos la solución como

$$f(x) = Ce^x, \tag{20}$$

o, más propiamente, como

$$f(x, C) = Ce^x. \tag{21}$$

La solución anterior depende de un parámetro, al que habitualmente nos referimos como "constante de integración". Otro ejemplo: cuando en Física 1 resuelven el problema del movimiento uniformemente acelerado,

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = a, \tag{22}$$

escriben la solución en la forma

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2. \tag{23}$$

De nuevo,  $x_0$ ,  $v_0$  y  $t_0$  son parámetros que caracterizan a las soluciones. Para indicar ese hecho, más correcto sería escribir

$$x(t, x_0, v_0, t_0) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2. \quad (24)$$

Noten que ni  $x_0$  ni  $v_0$  ni  $t_0$  aparecen en la ecuación diferencial (22). Deben ser incorporadas como variables dentro de la función  $x$  luego de resolver la ecuación diferencial. Una relación análoga hay entre la ecuación diferencial (18), en donde sólo aparecen las variables respecto de las cuales se deriva, y la eventual solución  $S(q, \alpha, t)$ , que incorpora la constante de integración a modo de nueva variable.

Si la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales (18) depende de un parámetro, entonces esa dependencia debe ser expresada de manera explícita:

$$S = S(q, \alpha, t). \quad (25)$$

Desde este punto de vista la dependencia paramétrica en  $\alpha$  se trata como la dependencia en una variable propiamente dicha. Llamar variables a unas cantidades y parámetros a otras es convencional. En última instancia, todas tienen el mismo estatus.

Entonces, supongamos que hemos encontrado una solución de la forma (25), o, si quieren, una familia de soluciones dependiente del parámetro  $\alpha$ . La función  $S$  es función de  $q$ , de  $\alpha$  y de  $t$  y satisface la ec. (18),

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, \alpha, t) + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, \alpha, t), t\right) = 0. \quad (26)$$

En definitiva, hemos encontrado una función que tiene lugar para acomodar tres variables y que satisface la misma ecuación diferencial (14) que una función generatriz  $F_2$  que toma al hamiltoniano original y lo transforma en el hamiltoniano nulo. Nada nos impide elegir

$$F_2(q, P, t) = S(q, P, t). \quad (27)$$

Así, el lugar ocupado por  $\alpha$ , perfectamente puede ser ocupado por  $P$ . Lo único esencial es que  $S$  tenga un lugar disponible para una variable adicional además de  $q$  y de  $t$ .

### 1.1. La dinámica de las variables originales

Una vez elegida la función  $F_2(q, P, t)$ , se escriben las ecuaciones de transformación

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t), \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}(q, P, t). \quad (28)$$

Puesto que el nuevo hamiltoniano es nulo, sabemos que, como funciones del tiempo,  $Q$  y  $P$  son constantes. La primera ecuación da la órbita en el espacio de fase,

$$p = p(q, P, t). \quad (29)$$

Invirtiéndolo la segunda ecuación se obtiene  $q$  como función del tiempo.

$$q = q(Q, P, t). \quad (30)$$

Si reemplazamos en (29) tendremos  $p$  como función del tiempo. Esto resuelve el problema mecánico original.

Notemos que hay aquí dos hechos entremezclados. Por un lado las ecuaciones de transformación, que nada dicen acerca de la dinámica de  $Q$  y  $P$ , y, por otro lado, las ecuaciones de Hamilton asociadas al hamiltoniano  $K = 0$ , que dicen que  $Q$  y  $P$  son constantes. Arribamos finalmente a una solución para  $q$  y  $p$  que depende de dos constantes, tantas como el número de condiciones iniciales que es necesario fijar para resolver las ecuaciones canónicas originales.

## 1.2. Generalizaciones

La elección (27) no es la única posible. Si definimos

$$F_2(q, P, t) = S(q, f(P), t), \quad (31)$$

para cualquier función bien comportada que se nos ocurra, seguiremos teniendo una función generatriz que satisfaga la ec. (14). No importa qué cosa escribamos en el lugar que corresponde a la segunda variable de la función  $S$ . Lo que importa es que exista ese lugar dentro de la función. La elección (27) identifica al nuevo impulso con la constante de integración  $\alpha$ . En cambio, la ec. (31) implica la identificación

$$P = f^{-1}(\alpha). \quad (32)$$

El significado y alcance de estas libertades quedará más claro en los ejemplos. En principio, vale la pena notar que distintas elecciones de la función  $f$  conducen a distintas ecuaciones de transformación,

$$p(q, P) = \frac{\partial F_2}{\partial q}(q, P, t) = \frac{\partial S}{\partial q}(q, f(P), t), \quad (33)$$

$$Q(q, P) = \frac{\partial F_2}{\partial P}(q, P, t) = \frac{\partial S}{\partial \alpha}(q, f(P), t) f'(P). \quad (34)$$

Veamos con un ejemplo por qué resulta útil tener la libertad de definir  $F_2$  a través de una función  $f$  del nuevo impulso, como en la ec. (31). Supongan que, al resolver la ecuación de H-J, encuentran que la solución depende de la constante de integración a través de una función  $g$ , es decir, algo del estilo

$$S(q, \alpha, t) = s(q, g(\alpha), t). \quad (35)$$

Por ejemplo, en la solución podría aparecer en todos lados no  $\alpha$  sino  $\sqrt{\alpha}$ . Si definiéramos

$$F_2(q, P, t) = S(q, P, t) = s(q, g(P), t), \quad (36)$$

estaríamos introduciendo una dependencia innecesariamente complicada en el nuevo impulso. En cambio, si definimos

$$F_2(q, P, t) = S(q, g^{-1}(P), t), \quad (37)$$

obtendríamos

$$F_2(q, P, t) = s(q, P, t), \quad (38)$$

evitando que  $P$  aparezca a través de la composición con la función  $g$ . Por ejemplo, supongan que encontraron

$$S = s(q, \sqrt{\alpha}, t), \quad (39)$$

entonces no están obligados a definir  $F_2(q, P, t) = s(q, \sqrt{P}, t)$ . Igualmente válido es definir

$$F_2(q, P, t) = s(q, P, t). \quad (40)$$

Si la constante de separación  $\alpha$  tenía un significado físico que conviene tener presente, entonces deberán llevar el registro de cuál es la relación entre  $\alpha$  y el nuevo  $P$ ; en este ejemplo

$$\alpha = P^2. \quad (41)$$

### 1.3. Restricciones: la constante aditiva

Hay que hacer aquí un breve comentario. Debido a que en la ec. (18) sólo aparecen las derivadas de  $S$  y no la propia función  $S$ , dada una solución particular  $S_0$  siempre podemos construir una familia de soluciones dependiente de un parámetro  $A$ ,

$$S(q, A, t) = S_0(q, t) + A. \quad (42)$$

Pero esta dependencia en la variable  $A$  no sirve para definir una función generatriz  $F_2$  como

$$F_2(q, P, t) = S_0(q, t) + P, \quad (43)$$

ni siquiera incluyendo una función arbitraria de  $P$ ,

$$F_2(q, P, t) = S_0(q, t) + f(P). \quad (44)$$

Ocurre que este tipo de función generatriz no define una transformación uno a uno invertible. Las ecuaciones de transformación serían

$$p = \frac{\partial S_0}{\partial q}(q, t), \quad Q = f'(P). \quad (45)$$

Evidentemente no hay aquí ninguna ecuación de transformación propiamente dicha entre las coordenadas originales y las nuevas. Debido a esto, al escribir la solución de la ecuación

de H-J, el lugar que ocupa la constante aditiva no puede ser aprovechado para ubicar uno de los nuevos impulsos.

Tenemos que formular en mejores términos el objetivo que se plantea al resolver la ecuación de H-J: para sistemas con un solo grado de libertad, se trata de encontrar una solución de la ec. (18) que dependa de una constante, sin contar la constante aditiva.

Aun en el caso de que hallamos encontrado una función  $S(q, \alpha, t)$  donde  $\alpha$  no es una constante aditiva, también serán soluciones todas las funciones de la forma

$$S(q, \alpha, t)_f = S(q, \alpha, t) + f(\alpha). \quad (46)$$

Si identificamos  $\alpha$  con el nuevo impulso  $P$ , no podemos decir que  $f(\alpha)$  es una constante aditiva, porque en definitiva depende del nuevo impulso. La ecuación de transformación para  $p$  no cambia, en tanto que la ecuación de transformación para  $Q$  es

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha}(q, P, t) + f'(P). \quad (47)$$

Esto no tiene ningún efecto en la dinámica del problema, ya que tanto  $Q$  como  $P$  son constantes. Siempre podremos absorber el término  $f'(P)$  redefiniendo la constante  $Q$ . Si con la función  $S$  original encontrábamos que

$$q(t) = \mathcal{F}(Q, P, t), \quad (48)$$

ahora encontramos que

$$q(t) = \mathcal{F}(Q - f'(P), P, t). \quad (49)$$

Como en última instancia los valores de  $Q$  y  $P$  se fijan a partir de las condiciones iniciales, da lo mismo decir que  $Q$  tiene que ser igual a  $Q_0$ , en el primer caso, que decir que  $Q - f'(P)$  tiene que ser igual a  $Q_0$ , en el segundo caso.

## 2. Sistemas con más de un grado de libertad

Todo lo anterior se generaliza para sistemas con  $n$  grados de libertad. En particular, la ecuación de H-J se lee como

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_n, t) + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}(q_1, \dots, q_n, t), \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}(q_1, \dots, q_n, t), t\right) = 0, \quad (50)$$

o, más concisamente,

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, t) + H(\mathbf{q}, \nabla S(\mathbf{q}, t), t) = 0. \quad (51)$$

Ahora lo fundamental es que, al resolver la ecuación de H-J, la solución que obtengamos dependa de tantas constantes de integración (sin contar la constante aditiva) como grados de libertad tenga el sistema. Este es el punto a remarcar: necesitamos una función que tenga el número suficiente de lugares libres entre sus variables como para acomodar a los



$n$  nuevos impulsos  $P_i$ . No queremos la solución general, nos alcanza con una función  $S$  que satisfaga la ecuación anterior y que dependa de  $n$  constantes de integración  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , ninguna de ellas aditiva,

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t). \quad (52)$$

Igual que para el caso con un grado de libertad, lo más sencillo es destinar los lugares de las constantes de integración directamente a los nuevos impulsos, definiendo

$$F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n, t) = S(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n, t). \quad (53)$$

Por experiencia, sé que lo que suele resultar más chocante del método de H–J es este aparente surgir de la nada de los nuevos impulsos. La pregunta–queja típica es: ¿cómo que los nuevos impulsos son los  $\alpha_i$ , de dónde sabés eso? Vuelvo a insistir con el punto esencial del método de H–J. El objetivo es encontrar una función  $S$  que satisfaga la ecuación de H–J y que sea lo suficientemente general como para depender de  $n$  constantes de integración (sin contar una constante aditiva). Esa dependencia es incorporada explícitamente dentro de la definición de la función, contrariamente a la práctica usual, en donde este paso suele ir de callado. Obtenemos así un objeto que depende del mismo número de variables que una eventual función generatriz  $F_2$ . Nada impide entonces que definamos nuestra  $F_2$  como en la ec. (53). Lo esencial no son los nombres de las variables. Lo esencial es encontrar una función que tenga el número suficiente de lugares para poner a las antiguas coordenadas, a los nuevos impulsos y al tiempo. Subrayen esto: el objetivo es obtener una función con el número suficiente de variables y que, respecto de las  $n$  primeras y de la última, satisfaga la ecuación diferencial (50).

La asociación  $\alpha_i \rightarrow P_i$  es la más simple. Pero ustedes tienen la libertad de definir los nuevos impulsos a través de  $n$  funciones  $f_i$  que mejor les parezcan, siempre que todo sea invertible:

$$F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n, t) = S\left(q_1, \dots, q_n, f_1(P_1, \dots, P_n), \dots, f_n(P_1, \dots, P_n), t\right). \quad (54)$$

Por ejemplo, para un sistema con dos grados de libertad, si ya encontraron la solución de la ecuación de H–J,

$$S = S(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2, t), \quad (55)$$

podrían elegir

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2, t) = S(q_1, q_2, P_1 + P_2, P_1 - P_2, t). \quad (56)$$

Este tipo de sustitución no altera el hecho de que  $F_2$  sea solución de la ecuación de H–J, que es una ecuación diferencial en las  $n$  primeras variables y el tiempo. No importa qué hagan con las  $n$  restantes variables, mientras no las mezclen ni con las  $q_i$  ni con el tiempo.

Es necesario notar que, por lo general, las constantes de integración primitivas,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tendrán asociado algún significado físico. Una constante puede ser la energía,

otras pueden ser momentos conservados, otra puede revelar una simetría inesperada. Es importante, entonces, tener un registro de cuál es la relación entre los impulsos y las constantes de integración. En el ejemplo anterior es

$$P_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad P_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (57)$$

Supongan que  $\alpha_1$  es la energía  $E$  y  $\alpha_2 = \Omega L_z$ , por decir algo. Cuando arriben por fin a la solución

$$q(Q_1, Q_2, P_1, P_2, t) \quad (58)$$

les interesará saber cuál es el significado físico de cada impulso. Será  $P_1 = \frac{1}{2}(E + \Omega L_z)$  y  $P_2 = \frac{1}{2}(E - \Omega L_z)$ .

### 3. Sistemas conservativos

Consideremos primero un sistema de un grado de libertad. Si el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, la ecuación de H-J es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \quad (59)$$

Se aplica aquí un método de solución que se llama **separación de variables**. Se busca la solución en la forma

$$S(q, t) = T(t) + W(q). \quad (60)$$

Reemplazando en la ec. (59) queda

$$T'(t) + H\left(q, W'(q)\right) = 0. \quad (61)$$

Tenemos una función de  $t$  sumada a una función de  $q$  y el resultado es igual a cero. Esto sólo puede ser cierto si

$$H\left(q, W'(q)\right) = \alpha, \quad (62)$$

$$T'(t) = -\alpha. \quad (63)$$

La segunda ecuación implica

$$T(t) = -\alpha t. \quad (64)$$

Omitimos aquí la constante aditiva. La ec. (62) es una ecuación diferencial ordinaria para  $W$ . Notar que la solución va a depender explícitamente de  $\alpha$ . Será

$$W = W(q, \alpha). \quad (65)$$

Podríamos agregar también una constante de integración aditiva, pero, según hemos visto, esa constante no es importante. Incorporando en  $S$  explícitamente la dependencia en la constante de separación  $\alpha$ , tenemos

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha t + W(q, \alpha). \quad (66)$$

En definitiva, haciendo la elección más directa para los nuevos impulsos, resulta

$$F_2(q, P, t) = -Pt + W(q, P). \quad (67)$$

Señalemos que, para esta elección, el nuevo impulso tiene un significado especial, como puede verse en la ec. (62) o a través de la ec. (67): sabemos que  $K = H + \partial F_2 / \partial t$ , pero  $K = 0$ , entonces  $H = -\partial F_2 / \partial t$ . Es decir,

$$H = P. \quad (68)$$

El nuevo impulso es constante y esa constante es igual a la energía. Cuando este es el caso, para resaltar la correspondencia, en lugar de  $P$  suele usarse la letra  $E$ .

Cuando el sistema tiene más de un grado de libertad, la solución se busca de la forma

$$S(q_1, \dots, q_n, t) = -\alpha t + W(q_1, \dots, q_n). \quad (69)$$

La ec. (62) se leerá como

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha. \quad (70)$$

La solución para  $W$  deberá buscarse de manera tal que dependa de  $n - 1$  constantes de integración (sin contar la constante aditiva). A la constante que aparece multiplicando al tiempo en la ec. (69) la distinguimos como  $\alpha_1$ . Al resto de las constantes las numeramos de 2 en adelante. La función principal de Hamilton quedará escrita como

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) = -\alpha_1 t + W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (71)$$

Lo más directo es definir la transformación  $F_2$  identificando los  $\alpha_i$  con los  $P_i$ , reservando para  $P_1$  el símbolo  $E$ ,

$$F_2(q_1, \dots, q_n, E, P_2, \dots, P_n) = -Et + W(q_1, \dots, q_n, E, P_2, \dots, P_n). \quad (72)$$

La función  $W$  recibe el nombre de **función característica de Hamilton** y tiene importancia por sí misma, independientemente de su relación con  $S$ .

#### 4. Una clase de sistemas conservativos

Todo problema unidimensional que se origine en un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad (73)$$

tiene por hamiltoniano

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (74)$$

La ecuación de H-J para la función principal de Hamilton es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0. \quad (75)$$

El sistema es conservativo, de modo que buscamos una solución de la forma

$$S = -Et + W(x). \quad (76)$$

Aquí ya hemos identificado la constante de separación con la energía. Ahora el problema es encontrar  $W(x)$ . Reemplazando en la ec. (75), la ecuación diferencial que satisface  $W$  es

$$H(x, W'(x)) = E. \quad (77)$$

Explícitamente,

$$\frac{W'(x)^2}{2m} + V(x) = E. \quad (78)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones para  $W'$ ,

$$W'(x) = \pm \sqrt{2m} \sqrt{E - V(x)}. \quad (79)$$

La integración es inmediata,

$$W(x, E) = \pm \sqrt{2m} \int_{x_0}^x dx \sqrt{E - V(x)}. \quad (80)$$

Notar que hemos incorporado en la definición de  $W$  la dependencia explícita con  $E$ .

Cuando el término cinético es  $p^2/2m$ , desde la ec. (79) en adelante siempre aparecerá la alternativa entre los signos  $+$  y  $-$ . Esta duplicidad indica que en realidad estamos obteniendo dos soluciones para  $W$ , y cada una de estas soluciones tendrá asociada una función generatriz  $F_2$ . Puesto que  $W' = p$ , la ec. (79), que es en donde se origina la disyuntiva entre los dos signos, permite ver que el signo positivo corresponde a regiones del movimiento en donde  $p$  es mayor o igual que cero, mientras que el signo negativo corresponde a regiones en donde  $p$  es menor o igual que cero. En otras palabras, la función generatriz  $F_2$  construida tomando el signo positivo servirá para calcular la trayectoria de la partícula en aquellos tramos en los que su impulso sea mayor o igual que cero. Y análogamente para la función  $F_2$  construida tomando el signo negativo.

Para no arrastrar el doble signo durante todo el cálculo, resulta más sencillo resolver para una sola de las ramas y usar propiedades conocidas del movimiento para extender la solución a todo tiempo. En lo que sigue trabajaremos con la solución que corresponde al signo positivo. Cuando veamos un ejemplo concreto mostraremos como extender la solución sin necesidad de repetir todo el cálculo para la otra elección del signo.

Cuando el movimiento tiene al menos un punto de retorno, resulta conveniente elegir  $x_0$  en la ec. (80) como uno de esos puntos. En un punto de retorno  $p = 0$  y, por lo tanto,

$$E - V(x) = 0. \quad (81)$$

Al resolver esta ecuación sus raíces serán funciones de  $E$ . Nos interesa que haya al menos una raíz. La denotaremos  $x_E$ .

Entonces, quedándonos de ahora en más con la solución que lleva el signo positivo en la ec. (80) y usando  $x_E$  como extremo inferior de integración, queda

$$W(x, E) = \sqrt{2m} \int_{x_E}^x dx \sqrt{E - V(x)}. \quad (82)$$

Una nota práctica: no se apuren a hacer esta integral. Sólo resuelvan esta integral como último recurso. Las ecuaciones de transformación involucran a las derivadas de  $W$ . Con frecuencia es mucho más sencillo derivar primero e integrar después. Por eso el enunciado de varios problemas pide encontrar una expresión integral para  $S$ . Lo que importan son las derivadas de esta función. Sé que siempre los estimulamos para que hagan las integrales sin consultar tablas ni depender de la computadora. Pero repito: no integren (82) por el simple hecho de que hay un símbolo de integración.

Construida la función principal de Hamilton

$$S(x, E, t) = -Et + W(x, E), \quad (83)$$

no parece haber ninguna razón para no hacer la identificación más directa

$$F_2(x, E, t) = S(x, E, t) = -Et + W(x, E) = -Et + \sqrt{2m} \int_{x_E}^x dx \sqrt{E - V(x)}. \quad (84)$$

La ecuación que determina la evolución de  $x$  es la ecuación de transformación para la nueva coordenada,

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial E}(x, E, t) = -t + \frac{\partial W}{\partial E}(x, E). \quad (85)$$

Al derivar respecto de  $E$  hay que tener en cuenta todas las dependencias que aparecen en la ec. (82),

$$\frac{\partial W}{\partial E}(x, E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_E}^x dx \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} - \sqrt{2m} \sqrt{E - V(x_E)} \frac{dx_E}{dE}. \quad (86)$$

La ventaja de haber elegido el extremo inferior de la integral como un punto de retorno es que el último término es nulo por definición. Entonces, volviendo a la ec. (85),

$$Q + t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_E}^x dx \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (87)$$

Recién aquí nos preocupamos por hacer la integral. El objetivo es resolver la integral para obtener una relación de la forma

$$Q + t = \mathcal{F}(x, E), \quad (88)$$

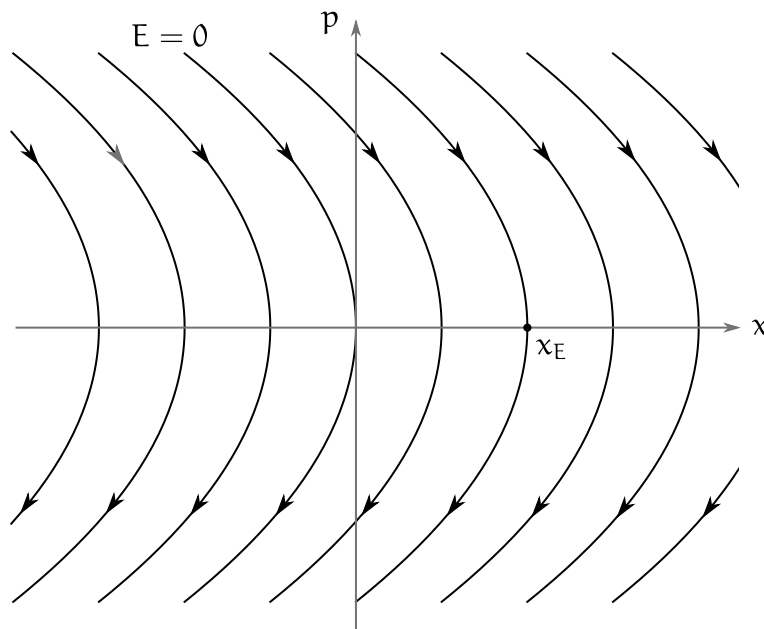
para luego invertirla y conseguir  $x$  en función de  $t$ ,

$$x(t, E, Q) = \mathcal{F}^{-1}(Q + t, E). \quad (89)$$

#### 4.1. Un ejemplo

Tomemos por ejemplo el caso de una partícula que se mueve sobre el eje  $x$  en un potencial  $V(x) = mgx$ . El retrato de fase está formado por la familia de curvas

$$p(x, E) = \pm \sqrt{2m} \sqrt{E - mgx}. \quad (90)$$



Todas las trayectorias tienen un punto de retorno,

$$x_E = \frac{E}{mg}. \quad (91)$$

Analizaremos primero la función generatriz asociada al tramo de las trayectorias con  $p \geq 0$ . Según la ec. (84) es

$$F_2(x, E, t) = -Et + \sqrt{2m} \int_{x_E}^x dx \sqrt{E - mgx}. \quad (92)$$

La dinámica de la coordenada  $x$  está contenida en la ecuación de transformación

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial E}(x, E, t) = -t + \sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_E}^x dx \sqrt{E - mgx}. \quad (93)$$

En este ejemplo la integración es trivial pero, según hemos indicado, habitualmente resulta más sencillo pasar la derivada dentro de la integral que integrar y luego tomar la derivada. Seguiremos aquí ese camino a modo ilustrativo, aunque la ventaja no llegue a apreciarse. Este ejemplo es tan simple que, debido a que  $E$  y  $x$  aparecen sólo en la combinación  $E - mgx$ , ni siquiera hay que hacer la integral. Dentro de la integral, la derivada respecto de  $E$  puede transformarse en una derivada respecto de  $x$ . En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial E} \int_{x_E}^x dx \sqrt{E - mgx} = \int_{x_E}^x dx \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{E - mgx} = -\frac{1}{mg} \int_{x_E}^x dx \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{E - mgx} = -\frac{1}{mg} \sqrt{E - mgx}. \quad (94)$$

Aquí hemos usado todas las propiedades del punto  $x_E$  que detallamos más arriba, es decir, que  $E - mgx_E = 0$  y que podemos pasar la derivada a través del símbolo integral, pese a que el extremo inferior depende de  $E$  a través de  $x_E$ . Luego, volviendo a la ec. (93),

$$Q = -t - \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\frac{E}{mg} - x} = -t - \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{x_E - x}. \quad (95)$$

Esta ecuación da  $x$  en función del tiempo

$$x(t, E, Q) = x_E - \frac{g}{2}(t + Q)^2. \quad (96)$$

El significado de la nueva coordenada  $Q$  es el de ser igual a menos el tiempo de paso de la partícula por el punto de retorno.

Si repiten el cálculo para la otra rama del movimiento, aquella que surge de tomar

$$W(x, E) = -\sqrt{2m} \int_{x_E}^x dx \sqrt{E - mgx}, \quad (97)$$

no es difícil seguir el rastro del signo menos. El signo menos siempre va acompañando a la raíz de  $E - mgx$ . Al llegar a la ec. (95) encontrarían que ahora es

$$Q = -t + \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{x_E - x}. \quad (98)$$

Cuando despejen  $x$  notarán que el signo frente a la raíz es irrelevante, porque lo van a estar elevando al cuadrado. La solución para  $x$  sigue siendo la misma ec. (96).

Esto también puede verse sin hacer el rastreo del signo a lo largo de las ecuaciones. Sabemos que la trayectoria es simétrica respecto del tiempo  $t_0$  en el que la partícula pasa por el punto de retorno. Debido a que  $Q = -t_0$ , la ec. (96) se lee como

$$x(t, E, Q) = x_E - \frac{g}{2}(t - t_0)^2, \quad (99)$$

que es simétrica respecto de  $t_0$ . Eso muestra que la solución es válida para todo tiempo.

## 4.2. Ningún misterio

Nuestro resultado principal ha sido la ec. (87), que contiene implícita la información sobre la dependencia de  $x$  en el tiempo,

$$Q + t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_E}^x dx \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (100)$$

Esta ecuación está al alcance de cualquier alumno de Física 1. No se necesita haber escuchado hablar ni de Hamilton ni de Jacobi. Miren la ecuación detenidamente antes de seguir leyendo, y traten de entender por qué decimos que es un resultado trivial. La explicación (que espero sea por completo innecesaria) está a vuelta de hoja. Noten el sacrificio que supone sobrepasar el número de ecuaciones cuando ha alcanzado la cabalística cifra de 100.



La ecuación de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \quad (101)$$

implica

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{E - V(x)}. \quad (102)$$

Podemos integrar esto de manera inmediata,

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (103)$$

Compárese con la ec. (100). Fin del misterio. La única diferencia está en la condición inicial.

Aplicado a un sistema unidimensional conservativo, el método de H-J no representa ninguna ventaja sobre el método directo de integración de la ecuación de conservación de la energía. El poder del método de H-J sólo se verá al tratar sistemas de más de un grado de libertad, pero muchas de las técnicas serán las que hemos visto aquí.