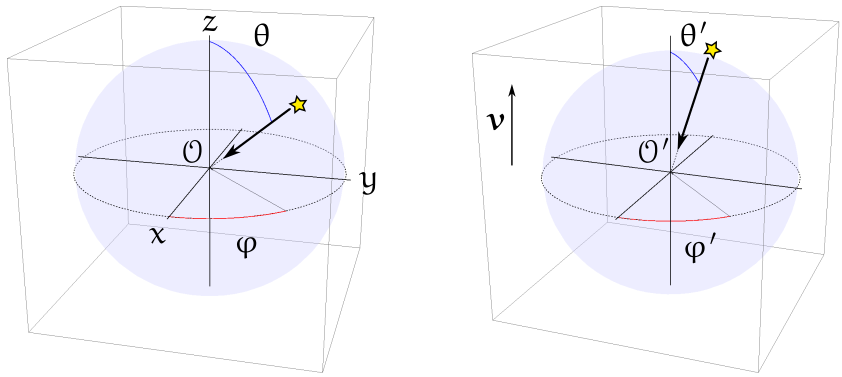
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Guía 8: *Relatividad especial.*

1. **El cielo relativista**. El observador $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad relativa $\boldsymbol{v} = v\hat{z}$ respecto de $\mathcal{O}$ ($v > 0$). En cierto instante, los dos observadores coinciden casi en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz de una misma estrella. Los ejes de ambos observadores coinciden en el instante dado, de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; por ejemplo, según $\mathcal{O}$,

$$\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -\big(\cos\varphi\ \sin\theta\ \hat{x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \hat{y} + \cos\theta\ \hat{z}\big)\, c.$$



a) Aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, verifique que $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$ y muestre que, según $\mathcal{O}'$, la luz proviene de la dirección definida por

$$\varphi' = \varphi, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta} \qquad (\beta = v/c)\,.$$

b) Deduzca esto mismo a partir de la transformación del cuadrivector $k^{\nu} = (\omega/c, \mathbf{k})$. Ya que está, encuentre la fórmula para el efecto Doppler relativista.

c) Existe una fórmula que relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ' y que pone de manifiesto cómo se comparan entre sí los dos ángulos. Deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2}.$$

d) Muestre que todas las estrellas en el hemisferio norte de $\mathcal{O}$ estarán concentradas, en el cielo de $\mathcal{O}'$, en cierto cono alrededor de su eje z. Suponiendo que hay igual número de estrellas en cada hemisferio del cielo de $\mathcal{O}$, ¿cuál es la relación entre el número de estrellas en cada hemisferio del cielo de $\mathcal{O}'$?

e) El observador $\mathcal{O}$ ve una pequeña constelación triangular, cuyas 3 estrellas están en

$$\hat{r}_1 = \hat{r}(\theta, \varphi), \qquad \hat{r}_2 = \hat{r}(\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1), \qquad \hat{r}_3 = \hat{r}(\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2).$$

Halle las posiciones de las mismas estrellas según $\mathcal{O}'$ a primer orden en $\delta\theta_i$ y $\delta\varphi_i$. ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos que definen la constelación, según sea vista por uno u otro observador? ¿Pasará lo mismo con figuras más complicadas, como las Pléyades, o más extensas, como Orión?

2. Dos problemas de física aplicada

EL MONSTRUO RELATIVISTA O LO QUE MATA ES EL RELUMBRÓN

Example 3.7 A sphere subtends an angle 2θ when seen from a point P in its rest frame. An observer O passes through P with velocity $\boldsymbol{v}$. Show that to O, the sphere appears to subtend an angle 2α such that

$$c\cot\alpha = \gamma(v)(c\cot\theta + \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}\operatorname{cosec}\theta),$$

where $\boldsymbol{e}$ is a unit 3-vector in the frame of the sphere in the direction from P to the centre of the sphere.

A disconcerting consequence of the formula in this example is that $\alpha \to \pi$ as $\boldsymbol{v} \to -c\boldsymbol{e}$. If O accelerates instantaneously directly *away* from the sphere, and increases his speed towards the velocity of light, then the area of the sky filled by the sphere grows. When his speed is $c\cos\theta$, $\alpha = \pi/2$, and the sphere occupies half the sky. At higher speeds, it occupies more than half the sky, and in the limit, only a small hole in the observer's forward direction is left uncovered.

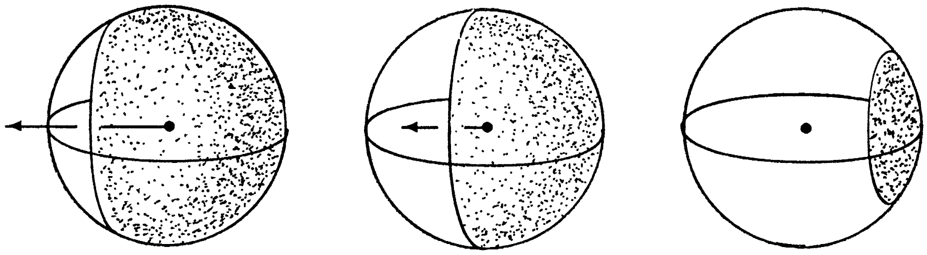


Fig. 3.6. The outline of the sphere as O accelerates away from it to the left. The spheres in the figure represent the sky, with the observer at the centre. The shaded portions are the areas covered by the images of the solid sphere

If an astronaut sees a space monster approaching, with jaws open ready to swallow his spaceship, and if he attempts to accelerate sharply away from the danger, then, when his speed exceeds $c\cos\theta$, where 2θ is the angle originally subtended by the jaws, he appears to be inside the monster's mouth. As he accelerates further, the jaws close around him. He is eventually killed by the glint on the monster's teeth, which is blue-shifted to high-frequency gamma radiation (exercise).

(Woodhouse, *Special Relativity*, 1992.)

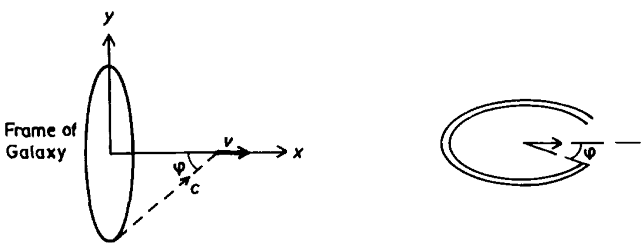
LA APUESTA DE FEYNMAN

In a simplified version of the ending of one of Fred Hoyle's novels, the hero, traveling at high Lorentz factor at right angles to the plane of our galaxy (Fig. 3.12), said he appeared to be inside and heading toward the mouth of a "goldfish bowl" with a blue rim and a red body (Fig. 3.13). Feynman betted 25 cents that the light from the galaxy would not look that way. We want to see who was right. Take the relative speed to be $\beta = 0.99$ and the angle φ in the frame of the galaxy to be 45° (Fig. 3.12).

(a) Derive (or recall) an expression for the relativistic aberration and use it to calculate (Fig. 3.13) the direction from which light from the edge of the galaxy appears to come when viewed in the spacecraft.

(b) Derive (or recall) the relativistic Doppler effect and use it to calculate the frequency ratio ν'/ν for light from the edge.

(c) Calculate φ' and ν'/ν at enough angles φ to decide who won the bet.

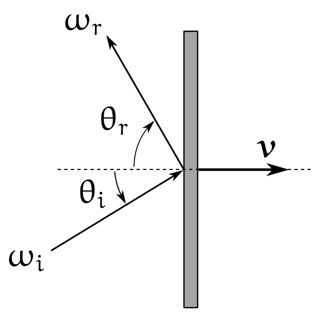


(Yung-Kuo Lim, *Problems and solutions on Mechanics*, 1994.)

3. **Espejo relativista**. Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ paralela a su normal incide luz de frecuencia ω_i con un ángulo de incidencia θ_i.

   a) Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento. Si no sabe por dónde empezar, resuelva primero el problema de las partículas no relativistas.

   b) Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando $v \ll c$ y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo partículas no relativistas o de sonido contra una pared en movimiento.



4. **Ver no es lo mismo que medir**. El sistema $\mathcal{S}'$ se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ respecto a $\mathcal{S}$. Un observador $\mathcal{O}$, en reposo en $\mathcal{S}$, dispone de un reloj que marca el tiempo t del sistema $\mathcal{S}$. Cuando su reloj marca $t = 0$, el observador $\mathcal{O}$ ve pasar justo frente a él, a una distancia despreciable, un reloj $\mathcal{R}'$ fijo en el sistema $\mathcal{S}'$ y que justo marca el tiempo $t' = 0$ del sistema $\mathcal{S}'$. En general, ¿cuál es el tiempo que marca el reloj $\mathcal{R}'$ **visto** por el observador $\mathcal{O}$ como función de t, tanto para $t \geqslant 0$ como para $t < 0$? Si a tiempo t el observador $\mathcal{O}$ ve pasar al reloj $\mathcal{R}'$ justo por la posición de un reloj $\mathcal{R}$ del sistema S, ¿cuál es el tiempo que marca el reloj $\mathcal{R}$ según las observaciones de $\mathcal{O}$?

5. **No es lo que parece**. Si tuviera que dispararle al Sol con un rayo láser. ¿En qué dirección apuntaría para no fallar? Tiene 3 tiros.

6. **Transformación relativista de la fuerza**. Encuentre la ley de transformación relativista del vector fuerza $\mathbf{F}$, definido por

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm\gamma(u)\mathbf{u}}{dt},$$

   al pasar de un sistema $\mathcal{O}$ a un sistema $\mathcal{O}'$ que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ respecto del primero. ¿Se comporta $\mathbf{F}$ como la parte espacial de un cuadrivector F^{ν}?

7. **La fórmula $m\ddot{\mathbf{r}}$ relativista**. A partir de la ecuación de movimiento relativista

$$\frac{dm\gamma(v)\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

   deduzca la versión relativista de la ecuación $m\dot{\boldsymbol{v}} = \mathbf{F}$, a saber,

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\gamma(v)}\left[\mathbf{F} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right].$$

8. **Movimiento hiperbólico**. Encuentre el movimiento para todo t de una partícula de masa m y carga e en un campo eléctrico constante y uniforme $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\hat{x}$. Asumir $e\mathcal{E} > 0$. En $t = 0$ la carga está en el origen y tiene velocidad nula. Demuestre que, en el sistema instantáneamente en reposo respecto de la carga, la aceleración siempre toma el mismo valor $e\mathcal{E}/m$.

9. **Movimiento en un campo magnético constante**. Encuentre el movimiento de una partícula de masa m y carga e en un campo magnético constante y uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$ con condiciones iniciales arbitrarias.

10. **Kepler relativista**. Una partícula se mueve en un plano en un potencial central $V(r) = -k/r$, con $k > 0$. A partir del hamiltoniano relativista

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - \frac{k}{r},$$

usando coordenadas polares, encuentre la ecuación de la órbita $dr(\varphi)/d\varphi$ y resuélvala. *Ayuda:* encuentre una ecuación para $\dot{r}$, otra para $\dot{\varphi}$ y de ahí deduzca la ecuación para $dr/d\varphi$. Muestre que, para valores suficientemente bajos del momento angular p_φ, la partícula puede caer centro de fuerza, y que, si este no es el caso, la órbita es una elipse en precesión o alguna otra generalización de las órbitas no relativistas no acotadas. Estime la velocidad de precesión para Mercurio y compare con los 43″ por siglo predichos por la relatividad general.

11. **Kepler relativista con H–J**. Muestre que el problema anterior es separable en coordenadas polares y encuentre una expresión integral para la función principal de Hamilton S. Siguiendo este método, encuentre la órbita $r(\varphi)$.