Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019
Guía 8: El hamiltoniano en coordenadas polares.

Los dos últimos problemas de las Guía 8 son acerca del movimiento relativista en un campo central.

10) **Kepler relativista**. Una partícula se mueve en un plano en un potencial central $V(r) = -k/r$, con $k > 0$. A partir del hamiltoniano relativista

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - \frac{k}{r},$$

usando coordenadas polares, encuentre la ecuación de la órbita $dr(\varphi)/d\varphi$ y resuélvala. *Ayuda:* encuentre una ecuación para $\dot{r}$, otra para $\dot{\varphi}$ y de ahí deduzca la ecuación para $dr/d\varphi$. Muestre que, para valores suficientemente bajos del momento angular p_φ, la partícula cae al centro de fuerza, y que, si este no es el caso, la órbita es una elipse en precesión. Estime la velocidad de precesión para Mercurio y compare con los $40''$ por siglo predichos por la relatividad general.

11) **Kepler relativista con H–J**. Muestre que el problema anterior es separable en coordenadas polares y encuentre una expresión integral para la función principal de Hamilton S. Siguiendo este método, encuentre la órbita $r(\varphi)$.

Para escribir el hamiltoniano necesitarán definir p_r y p_φ, o, al menos, escribir p^2 en términos de p_r y p_φ. Para que puedan hacer los problemas, aquí tienen la solución

$$p^2 = p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}. \tag{1}$$

Es el mismo resultado de mecánica no relativista. Acuérdense de que el término cinético de un sistema cuya energía cinética fuera

$$T = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 \tag{2}$$

aparecía en el hamiltoniano en la forma

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right). \tag{3}$$

Para demostrar que la misma fórmula (1) sigue siendo válida en el contexto relativista, pueden calcular la parte cinética del hamiltoniano directamente a partir del término cinético del lagrangiano relativista

$$\mathcal{L}_0 = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{4}$$

En coordenadas polares es

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{5}$$

Luego,

$$\mathcal{L}_0 = -mc^2\sqrt{1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)/c^2}. \tag{6}$$

Para calcular el hamiltoniano deberán obtener primero los momentos conjugados

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{r}}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\varphi}}, \tag{7}$$

despejar de esas fórmulas $\dot{r}$ y $\dot{\varphi}$ en términos de p_r y p_φ y escribir la parte cinética del hamiltoniano como

$$H_0 = p_r\,\dot{r} + p_\varphi\,\dot{\varphi} - \mathcal{L}_0. \tag{8}$$

Es álgebra de la más elemental, pero un poco engorrosa. Se pueden usar varios atajos. La solución compacta cabe en seis líneas.