Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 31/10: *Método de Hamilton–Jacobi**

El método de Hamilton–Jacobi (repaso)

Recordemos que el objeto del método de Hamilton–Jacobi (H–J) es encontrar una función generatriz

$$F_2 = F_2(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n, t) \tag{1}$$

que opere la transformación entre el hamiltoniano

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \tag{2}$$

y el hamiltoniano nulo; es decir,

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + H\big(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} F_2, t\big) = 0. \tag{3}$$

Como funciones del tiempo, los nuevos impulsos $\mathbf{P}$ y las coordenadas canónicamente conjugadas $\mathbf{Q}$ son constantes. Las ecuaciones de transformación son las que contienen la dinámica de las variables originales:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \qquad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t). \tag{4}$$

Invirtiendo el segundo conjunto de ecuaciones encontramos las funciones

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), \tag{5}$$

y, reemplazando en el primer conjunto de ecuaciones, encontramos

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t). \tag{6}$$

Existe el número suficiente de constantes para fijar las $2n$ condiciones iniciales.

El método de H–J consiste en encontrar una solución S de la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, t) + H\big(\mathbf{q}, \nabla S(\mathbf{q}, t), t\big) = 0, \tag{7}$$

que dependa de n constantes de integración, ninguna de ellas aditiva,

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, t). \tag{8}$$

*zanellaj@df.uba.ar

La ec. (7) es la ecuación de H–J. La solución (8) tiene el número suficiente de variables extra como para alojar a los n impulsos que aparecen en la definición de la función generatriz (1). La asociación más directa consiste en definir

$$F_2(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n, t) = S(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n, t), \tag{9}$$

pero lo mismo serviría tomar un sistema invertible de n funciones de n variables y escribir

$$F_2(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n, t) = S\big(q_1, \ldots, q_n, f_1(P_1, \ldots, P_n), \ldots, f_n(P_1, \ldots, P_n), t\big). \tag{10}$$

La función S recibe el nombre de función principal de Hamilton.

1. Coordenadas cíclicas

En la clase anterior vimos que si H no dependía explícitamente del tiempo, la solución de la ecuación de H–J podía buscarse en la forma de una función lineal del tiempo más una función de las coordenadas,

$$S(q_1, \ldots, q_n, t) = -Et + W(q_1, \ldots, q_n). \tag{11}$$

Ocurre una separación similar cuando hay coordenadas cíclicas, es decir, coordenadas que no aparecen explícitamente en el hamiltoniano H. Estas coordenadas están ligadas a la existencia de cantidades de movimiento conservadas que, a todos los fines, pueden servir como nuevos impulsos.

Es suficientemente ilustrativo considerar un sistema con 2 grados de libertad. Supongamos que el sistema sea conservativo y que la coordenada q_2 sea cíclica, de modo que

$$H = H(q_1, p_1, p_2). \tag{12}$$

La ecuación de H–J se lee como

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, q_2, t) + H\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}(q_1, q_2, t), \frac{\partial S}{\partial q_2}(q_1, q_2, t), t\right) = 0. \tag{13}$$

Por analogía con el modo en que separamos la variable t, buscamos ahora una solución de la forma

$$S(q_1, q_2, t) = -\alpha_1 t + \alpha_2 q_2 + W_1(q_1). \tag{14}$$

Reemplazando en la ecuación de H–J resulta

$$H\Big(q_1, W_1'(q_1), \alpha_2\Big) = \alpha_1. \tag{15}$$

La variable q_2 ha sido eliminada. Obtenemos así una ecuación diferencial ordinaria para $W_1(q_1)$, cuya solución dependerá de las dos constantes de movimiento α_i,

$$W_1 = W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2). \tag{16}$$

La constante α_1 se identifica con la energía E (o más precisamente con la constante h) y la constante α_2 con la cantidad de movimiento conservada p_2. Del mismo modo, la función principal de Hamilton podrá considerarse función de las constantes de separación

$$S = S(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2, t) = -\alpha_1 t + \alpha_2 q_2 + W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2). \tag{17}$$

Tenemos así el número suficiente de variables para definir F_2.

En general, en sistemas conservativos con más de un grado de libertad, si la coordenada q_n es cíclica, entonces debemos buscar una solución de la forma

$$S(q_1, \dots, q_n, t) = -\alpha_1 t + \alpha_n q_n + W_{n-1}(q_1, \dots, q_{n-1}). \tag{18}$$

Si las últimas m coordenadas son cíclicas, será

$$S(q_1, \dots, q_n, t) = -\alpha_1 t + \sum_{j=n-m+1}^{n} \alpha_j q_j + W_{n-m}(q_1, \dots, q_{n-m}), \tag{19}$$

y W_{n-m} será solución de la ecuación

$$H\left(q_1, \dots, q_{n-m}, \frac{\partial W_{n-m}}{\partial q_1}(q_1, \dots, q_{n-m}), \dots, \frac{\partial W_{n-m}}{\partial q_{n-m}}(q_1, \dots, q_{n-m}), \alpha_{n-m+1}, \dots, \alpha_n\right) = \alpha_1. \tag{20}$$

Cuanto mayor sea el número de coordenadas cíclicas menor será el número de variables de las que depende la función W_{n-m}. El caso más favorable es que, salvo una, todas las coordenadas sean cíclicas.

En la ec. (20) aparecen $m + 1$ constantes de separación. La solución para W_{n-m} será función de estas constantes,

$$W_{n-m} = W_{n-m}\big(q_1, \dots, q_{n-m}, \alpha_1, \alpha_{n-m+1}, \dots, \alpha_n\big). \tag{21}$$

El resto de las constantes de integración necesarias para poder construir la función F_2 aparecerá al resolver la ecuación diferencial (20).

1.1. Un ejemplo

En el problema del movimiento plano de una partícula en un potencial central, en coordenadas polares el hamiltoniano no depende del ángulo azimutal,

$$H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r). \tag{22}$$

Buscamos la función principal de Hamilton separando las variables t y φ,

$$S(r, \varphi, t) = -Et + \alpha_2 \varphi + W_r(r). \tag{23}$$

Puesto que

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \tag{24}$$

vemos que la constante de separación α_2 es igual al impulso conservado p_φ. La ecuación para la función W resulta

$$H\big(r, W_r'(r), p_\varphi\big) = E. \tag{25}$$

Explícitamente es

$$\frac{1}{2m}W_r'(r)^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) = E. \tag{26}$$

Debido a que $W_r' = p_r$, reconocemos aquí la ecuación de conservación del problema unidimensional equivalente para el movimiento radial. Esta ecuación combina la conservación de la energía con la del momento angular. Al resolver la ec. (26), se incorporan en la definición de W_r las dependencias en E y p_φ. El resultado es

$$W_r(r, E, p_\varphi) = \pm \int^r dr\, \sqrt{2m\big[E - V(r)\big] - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}, \tag{27}$$

y la función principal de Hamilton se escribe como

$$S(r, \varphi, E, p_\varphi) = -Et + p_\varphi \varphi \pm \int^r dr\, \sqrt{2m\big[E - V(r)\big] - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}. \tag{28}$$

2. Problema 22 (primera parte)

Considere el hamiltoniano

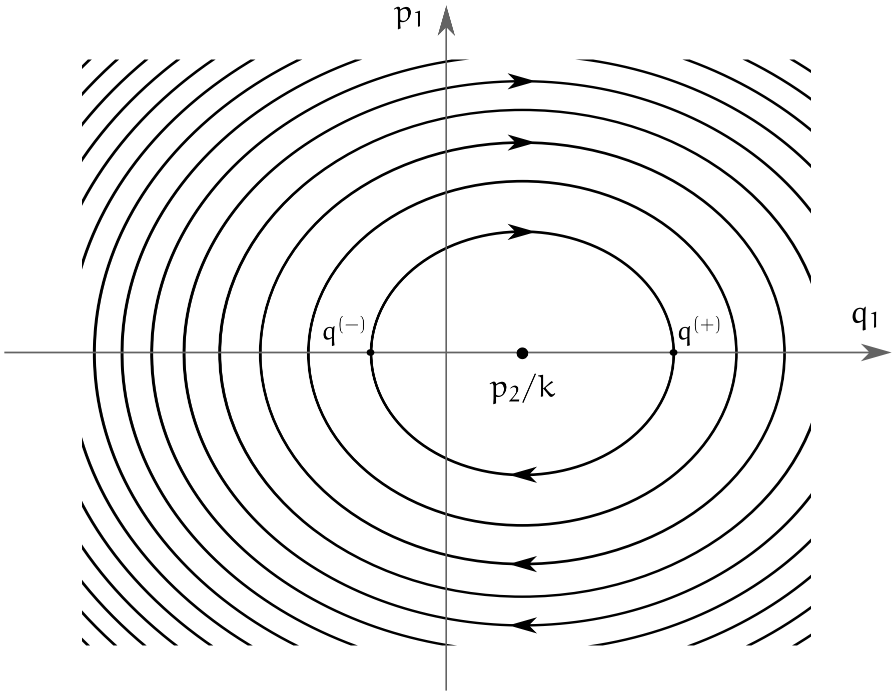
$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2. \tag{29}$$

Resuelva el problema con el método de H–J. ¿Qué sistema podría corresponder a este problema?

Analicemos brevemente el tipo de órbitas que podemos esperar en este problema. La coordenada q_2 es cíclica, por lo tanto p_2 es una constante de movimiento. Para cada valor de p_2 podemos graficar el retrato de fase en el plano $q_1 p_1$, es decir, las órbitas proyectadas en ese plano que corresponden a valores determinados de E y p_2. A partir del hamiltoniano (29) esas órbitas satisfacen la ecuación

$$\frac{p_1^2}{2mE} + \frac{(q_1 - p_2/k)^2}{2mE/k^2} = 1. \tag{30}$$

Son elipses en el plano $q_1 p_1$ centradas en $(p_2/k, 0)$ como muestra la figura.



El sentido de circulación está dado por la relación $\dot{q}_1 = p_1/m$, de modo q_1 aumenta para $p_1 > 0$ y disminuye para $p_1 < 0$ (notar que $\dot{q}_2 \neq p_2/m$). Además, para cada par de valores de E y p_2 la órbita en el plano $q_1 p_1$ tiene dos puntos de retorno, donde $\dot{q}_1 = 0$,

$$q^{(\pm)}(E, p_2) = \frac{1}{k}\left(p_2 \pm \sqrt{2mE}\right). \tag{31}$$

Debido a que el sistema es conservativo y a que la coordenada q_2 es cíclica, buscaremos una solución de la ecuación de H–J para la función principal de Hamilton de la forma

$$S(q_1, q_2, t) = -Et + p_2 q_2 + W_1(q_1). \tag{32}$$

Aquí ya usamos p_2 como constante de separación; podríamos haberle llamado α_2, pero como la identificación es inmediata eso no tiene mayor sentido.

Teniendo en cuenta que el hamiltoniano no depende de q_2 la ecuación de H–J es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}\right) = 0. \tag{33}$$

Cuando S tiene la forma (32) la ecuación de H–J se reduce a esta otra

$$H\big(q_1, W_1'(q_1), p_2\big) = E. \tag{34}$$

Explícitamente, para el hamiltoniano (29) queda

$$\frac{1}{2m} W_1'(q_1)^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2 = E. \tag{35}$$

De aquí despejamos

$$W_1'(q_1) = \pm\sqrt{2mE - (p_2 - kq_1)^2}. \tag{36}$$

El signo positivo corresponde a las regiones de movimiento en donde $p_1 \geqslant 0$, y viceversa. Para integrar la ec. (36) usaremos como límite inferior de integración el punto $q^{(-)}(E, p_2)$,

$$W_1(q_1, E, p_2) = \pm \int_{q^{(-)}(E,p_2)}^{q_1} dq \sqrt{2mE - (p_2 - kq)^2}. \tag{37}$$

Notar que en la definición de W incorporamos su dependencia en E y p_2. Por enésima vez hacemos énfasis en que no es necesario resolver la integral en esta instancia. Lo fundamental es calcular las derivadas de W_1. Suele ser más fácil derivar primero e integrar después.

La manera más directa de definir la función generatriz F_2 es alojando a los nuevos impulsos en los lugares que ocupan E y p_2 dentro de la función S,

$$F_2(q_1, q_2, E, p_2) = S(q_1, q_2, E, p_2) = -Et + p_2 q_2 + W(q_1, E, p_2). \tag{38}$$

La nueva coordenada conjugada de E es

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W_1}{\partial E}(q_1, E, p_2) = -t \pm m \int_{q^{(-)}(E,p_2)}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{2mE - (p_2 - kq)^2}}. \tag{39}$$

Es importante notar que al introducir la derivada dentro de la integral pudimos pasar por alto el hecho de que el extremo de integración fuera una función de E. Si derivamos respecto al extremo inferior de integración, tendríamos que evaluar el integrando de la ec. (37) en $q^{(-)}$. Pero, por definición de los puntos de retorno, el integrando es nulo cuando se lo evalúa en cualquiera de ellos.

La integral en la ec. (39) es elemental. El resultado es

$$Q_1 = -t \pm \frac{m}{k} \left[\arccos\left(\frac{p_2 - kq_1}{\sqrt{2mE}} \right) - \arccos\left(\frac{p_2 - kq^-(E, p_2)}{\sqrt{2mE}} \right) \right]. \tag{40}$$

Usando la definición (31), tenemos

$$\frac{p_2 - kq^{\pm}(E, p_2)}{\sqrt{2mE}} = \mp 1. \tag{41}$$

Luego,

$$Q_1 = -t \pm \frac{m}{k} \arccos\left(\frac{p_2 - kq_1}{\sqrt{2mE}} \right). \tag{42}$$

Invirtiendo la ec. (42) obtenemos q_1 como función del tiempo y de las constantes de movimiento

$$q_1(t, E, p_2, Q_1) = \frac{1}{k} \left[p_2 - \sqrt{2mE} \cos\left(\frac{k}{m}(t + Q_1) \right) \right]. \tag{43}$$

La duplicidad de signos desapareció al tomar el coseno. En $t = -Q_1$ la partícula está en el punto de retorno $q^{(-)}$.

La coordenada canónicamente conjugada a p_2 también será constante. La ecuación de transformación que define esta coordenada es

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial p_2} = q_2 + \frac{\partial W_1}{\partial p_2}(q_1, E, p_2). \tag{44}$$

Aquí también podemos pasar la derivada a través del signo integral en la ec. (37),

$$Q_2 = q_2 \pm \int_{q^{(-)}(E,p_2)}^{q_1} dq \ \frac{\partial}{\partial p_2}\sqrt{2mE - (p_2 - kq)^2}. \tag{45}$$

En el integrando, p_2 aparece sólo en la combinación $p_2 - kq$. Derivar con respecto a p_2 será, salvo una constante multiplicativa, equivalente a derivar respecto de q, con la ventaja de que entonces estaremos calculando la integral de una derivada:

$$Q_2 = q_2 \mp \frac{1}{k}\int_{q^{(-)}(E,p_2)}^{q_1} dq \ \frac{\partial}{\partial q}\sqrt{2mE - (p_2 - kq)^2} = q_2 \mp \frac{1}{k}\sqrt{2mE - (p_2 - kq_1)^2}. \tag{46}$$

Como ya ocurrió otras veces, el término que correspondería a evaluar en el extremo inferior de la integral es nulo, porque se trata de un punto de retorno. La ecuación anterior no involucra al tiempo, da q_2 como función de q_1 y, por lo tanto, representa la proyección de la órbita en el plano q_1q_2. La ecuación que satisfacen es

$$(q_2 - Q_2)^2 + \left(q_1 - \frac{p_2}{k}\right)^2 = \frac{2mE}{k^2} \tag{47}$$

No son otra cosa que círculos. Las constantes Q_2 y p_2 dan la ubicación del centro de la órbita en el plano q_1q_2, mientras que la constante E da el radio,

$$R(E) = \frac{1}{k}\sqrt{2mE}. \tag{48}$$

Además, pueden verificar que en $t = -Q_1$, $q_2 = Q_2$. De la ec. (43) obtenemos el período de la órbita

$$T = \frac{2\pi m}{k}. \tag{49}$$

Para escribir q_2 como función del tiempo, reemplazamos la solución (43) en la ec. (46), de lo que resulta

$$q_2 = Q_2 \pm \frac{1}{k}\sqrt{2mE}\left|\sin\left(\frac{k}{m}(t + Q_1)\right)\right|. \tag{50}$$

El signo positivo corresponde a los intervalos de tiempo en los que $\dot{q}_1 > 0$, y viceversa. Pero, según la ec. (43),

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\left(\frac{k}{m}(t + Q_1)\right). \tag{51}$$

Esto quiere decir que cuando

$$\sin\left(\frac{k}{m}(t+Q_1)\right) > 0, \tag{52}$$

corresponde usar el signo positivo en la ec. (50), y viceversa. Pero esos son los mismos signos que corresponde elegir al escribir el valor absoluto de la función seno. En definitiva

$$q_2 = Q_2 + \frac{1}{k}\sqrt{2mE}\,\sin\left(\frac{k}{m}(t+Q_1)\right). \tag{53}$$

Para tener ambas ecuaciones de movimiento a la vista, copiamos aquí la ec. (43),

$$q_1 = \frac{p_2}{k} - \frac{1}{k}\sqrt{2mE}\,\cos\left(\frac{k}{m}(t+Q_1)\right). \tag{54}$$

Está claro entonces que si $k > 0$ la trayectoria en el plano q_1q_2 es recorrida en el sentido horario, y en sentido antihorario si $k < 0$.

Mostraremos ahora que el hamiltoniano de este sistema corresponde al de una partícula que se mueve en el plano xy en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\hat{z}$. En general es

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2. \tag{55}$$

Para obtener algo parecido al hamiltoniano del enunciado,

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2, \tag{56}$$

deberíamos tener un potencial vector de la forma $\mathbf{A} = \lambda x\,\hat{y}$. En efecto, tomando el rotor de este potencial encontramos

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\lambda x\,\hat{y}) = \lambda\,\hat{z}. \tag{57}$$

Por lo tanto, debe ser $\lambda = B$ y

$$\mathbf{A}(x,y) = xB\,\hat{y}. \tag{58}$$

Entonces resulta

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eB}{c}x\right)^2. \tag{59}$$

Los hamiltonianos (56) y (59) son equivalentes si identificamos a x e y con q_1 y q_2 y si

$$k = \frac{eB}{c}. \tag{60}$$

Para una órbita de radio R, el equilibrio entre la fuerza y la aceleración centrípeta (asumiendo $eB > 0$) da

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{eBv}{c}, \tag{61}$$

lo que implica

$$R = \frac{mc}{eB}v = \frac{c}{eB}\sqrt{2mE}. \tag{62}$$

Si identificamos k como en la ec. (60), asumiendo $k > 0$, obtenemos

$$R = \frac{1}{k}\sqrt{2mE}, \tag{63}$$

que coincide con el resultado (48).