Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 4/11: *Variables de ángulo–acción. Guía 7, problema 20.*[*]

■ Una partícula se mueve en el eje x en un potencial $V(x) = \lambda|x|$, con $\lambda > 0$. Dibuje el retrato de fase. Encuentre las ecuaciones de transformación entre las variables (x, p) y las variables de ángulo–acción (w, J). Grafique las curvas coordenadas de este sistema en el plano xp.

Notación

Variaciones con respecto a la clase: aquí la variable ángulo se llama w y la acción está definida como en el libro de Landau y Lifshitz, con un $1/2\pi$ respecto a la notación del Goldstein, que fue la usada en las clases. Yo prefiero la notación de L–L, donde el ángulo varía entre 0 y 2π, y no la del Goldstein, donde el ángulo varía entre 0 y 1. No hay una posición dominante en la literatura.

El retrato de fase

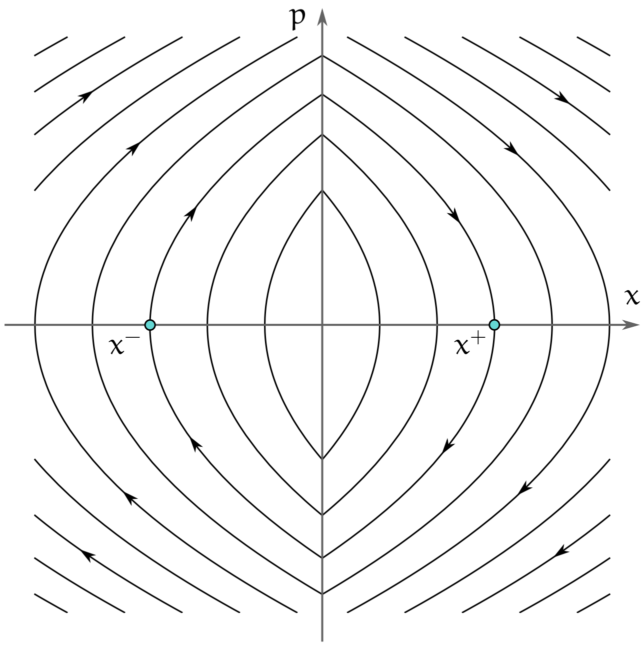
Para un hamiltoniano de la forma

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \lambda|x|, \tag{1}$$

el retrato de fase puede construirse en el cuadrante $x, p \geqslant 0$ y extenderse por simetría al resto del plano. En ese cuadrante

$$p(x, E) = \sqrt{2m}\sqrt{E - \lambda x}. \tag{2}$$

Pero en este problema es más sencillo graficar $x(p, E)$, porque son las mismas dos cuadráticas desplazadas a izquierda y derecha.



Para cada órbita existen dos puntos de retorno,

$$x^{\pm} = \pm\frac{E}{\lambda}. \tag{3}$$

[*]zanellaj@df.uba.ar

La función característica de Hamilton

La transformación entre las variables (x, p) y las variables de ángulo–acción (w, J) puede encontrarse a través de la función característica de Hamilton, W. Debido a que

$$w(x, E) = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial W}{\partial E}(x, E), \tag{4}$$

alcanza con calcular las derivadas de W. Como hemos dicho muchas veces, suele ser más fácil derivar primero e integrar después. Por lo tanto, no hay de por sí una razón para calcular W. Verán que el hecho de que E y x aparezcan en la integrales siempre en la combinación lineal $E \pm \lambda x$ hace que el cálculo explícito de W sea omitible. Necesitamos hacer una sola integral: aquella que define la acción.

Calcularemos W sólo con fines ilustrativos. Vamos a ir separando el cálculo cuadrante por cuadrante. Usaremos la convención de definir W mediante la integral de línea a lo largo de la órbita, partiendo desde el punto $(x^-, 0)$

$$W(x, E) = \int_{\mathcal{C}(x^-(E), x)} p \, dx. \tag{5}$$

La curva $\mathcal{C}$ es el tramo de la órbita que va entre el punto de partida y el punto con coordenadas (x, p), orientada en sentido horario (lo importante es que la integral sea igual al área). La función $W(x, E)$ es una función del extremo de integración x.

En el primer cuadrante ($x \leqslant 0$, $p \geqslant 0$) resulta

$$W_I(x, E) = \sqrt{2m} \int_{x^-}^{x} dx \, \sqrt{E + \lambda x} = \beta (E + \lambda x)^{3/2}, \tag{6}$$

donde

$$\beta = \frac{2\sqrt{2m}}{3\lambda}.$$

En el segundo cuadrante ($x \geqslant 0$, $p \geqslant 0$) es

$$W_{II}(x, E) = W_I(0, E) + \sqrt{2m} \int_{0}^{x} dx \, \sqrt{E - \lambda x} = \beta \left[2E^{3/2} - (E - \lambda x)^{3/2} \right]. \tag{7}$$

En el tercer cuadrante ($x \geqslant 0$, $p \leqslant 0$),

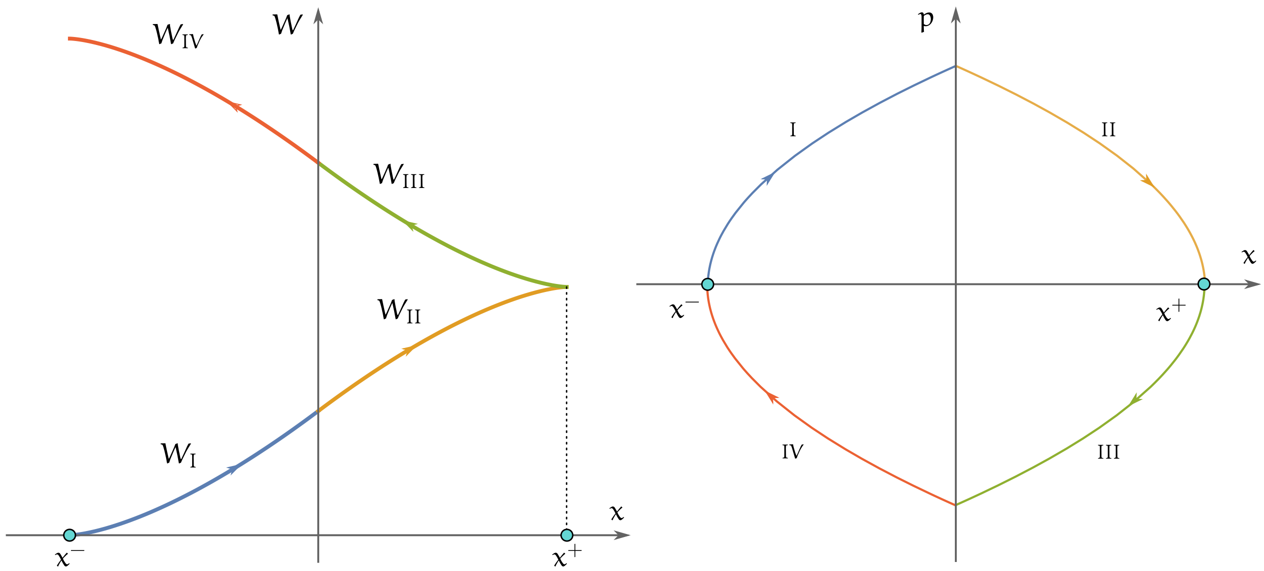
$$W_{III}(x, E) = W_{II}(x^+, E) - \sqrt{2m} \int_{x^+}^{x} dx \, \sqrt{E - \lambda x} = \beta \left[2E^{3/2} + (E - \lambda x)^{3/2} \right]. \tag{8}$$

Y en el último cuadrante ($x \leqslant 0$, $p \leqslant 0$),

$$W_{IV}(x, E) = W_{III}(0, E) - \sqrt{2m} \int_{0}^{x} dx \, \sqrt{E + \lambda x} = \beta \left[4E^{2/3} - (E + \lambda x)^{3/2} \right]. \tag{9}$$

El hecho de tener que dividir el cálculo según cuadrantes es secundario. Noten que siempre le damos continuidad a la integral que define W. Al integrar sobre el segundo cuadrante, sumamos todo lo que acumuló durante el primero, y así con los otros.

La función $W(x, E)$, para un valor fijo de la energía, se muestra en la siguiente figura, lado a lado con la órbita. Notar que W puede pensarse como una función multivaluada pero, sin embargo, continua respecto al movimiento del punto sobre la órbita.



La variable acción y el período del movimiento

La acción es simplemente

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} W_{IV}(x^-, E) = \frac{1}{2\pi}\, 4\beta E^{3/2} = \frac{4\sqrt{2m}}{3\pi\lambda} E^{3/2}, \tag{10}$$

lo que corresponde a haber integrado $p\,dq$ en un ciclo y dividido por 2π. Pueden verificar que tiene las unidades correctas de energía por tiempo. También pueden verificar que alcanzaba con calcular W en el primer cuadrante y hacer

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} 4 \times W_I(0, E). \tag{11}$$

A propósito de la acción, el período de las órbitas para una energía E es

$$T(E) = 2\pi J'(E) = \frac{4\sqrt{2mE}}{\lambda}. \tag{12}$$

Este problema es equivalente al de una partícula que rebota contra el piso en un campo gravitatorio uniforme con aceleración $g = \lambda/m$. El período que buscamos es cuatro veces el tiempo que tarda la partícula en caer desde una altura L determinada por la relación $E = mgL$. Según un alumno de Física 1, a quien interrogamos, ese tiempo es

$$T_c = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\lambda}. \tag{13}$$

En efecto, se verifica así que $T(E) = 4T_c$.

La variable ángulo

El cálculo de la función ángulo $w(x, E)$ también se divide por cuadrantes. Debido a que, en el integrando que define la función W, las variables E y x aparecen en combinación lineal, no es necesario derivar las expresiones finales de cada una de las ecuaciones anteriores. Por ejemplo, en el primer cuadrante sería

$$\begin{aligned} w_{\mathrm{I}}(x, E) &= \frac{1}{J'(E)}\sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial E}\int_{x^-}^{x} dx\, \sqrt{E+\lambda x} = \frac{1}{J'(E)}\frac{\sqrt{2m}}{\lambda}\int_{x^-}^{x} dx\, \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{E+\lambda x} \\ &= \frac{1}{J'(E)}\frac{\sqrt{2m}}{\lambda}\sqrt{E+\lambda x}. \end{aligned} \tag{14}$$

Noten que al final de todo quedó la integral de una derivada. Reemplazando aquí la función J de la ec. (10) queda

$$w_{\mathrm{I}}(x, E) = \pi\,\frac{\sqrt{E+\lambda x}}{2\sqrt{E}}. \tag{15}$$

Dentro de este cuadrante la variable ángulo toma valores entre 0 y $\pi/2$.

Procediendo de manera similar, en el segundo cuadrante obtenemos

$$w_{\mathrm{II}}(x, E) = w_{\mathrm{I}}(0, E) - \frac{1}{J'(E)}\frac{\sqrt{2m}}{\lambda}\left[\sqrt{E-\lambda x} - \sqrt{E}\right] = \pi\left[1 - \frac{\sqrt{E-\lambda x}}{2\sqrt{E}}\right]. \tag{16}$$

Y, del mismo modo,

$$w_{\mathrm{III}}(x, E) = w_{\mathrm{II}}(x^+, E) + \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{E-\lambda x}}{\sqrt{E}} = \pi\left[1 + \frac{\sqrt{E-\lambda x}}{2\sqrt{E}}\right], \tag{17}$$

$$w_{\mathrm{IV}}(x, E) = w_{\mathrm{III}}(0, E) + \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{E} - \frac{\sqrt{E+\lambda x}}{\sqrt{E}}\right] = \pi\left[2 - \frac{\sqrt{E+\lambda x}}{2\sqrt{E}}\right]. \tag{18}$$

En el segundo cuadrante la variable ángulo varía entre $\pi/2$ y π; en el tercero, entre π y $3\pi/2$; y en el cuarto, entre $3\pi/2$ y 2π.

Debe quedar claro que en ningún momento usamos el resultado de las integrales de las ecs. (6)–(9).

Las ecuaciones de transformación

Las ecuaciones de transformación de las variables x y p a las variables de ángulo–acción se obtienen reemplazando en las ecuaciones anteriores E en función de x y de p. En primer lugar, la acción es

$$J(x, p) = \frac{4\sqrt{2m}}{3\pi\lambda}\left(\frac{p^2}{2m} + \lambda|x|\right)^{3/2}. \tag{19}$$

Por otro lado, para la función ángulo queda

$$w_{\mathrm{I}}(x,p) = \pi \frac{p}{2\sqrt{p^2 - 2m\lambda x}}, \tag{20}$$

$$w_{\mathrm{II}}(x,p) = \pi \left[1 - \frac{p}{2\sqrt{p^2 + 2m\lambda x}}\right], \tag{21}$$

$$w_{\mathrm{III}}(x,p) = \pi \left[1 - \frac{p}{2\sqrt{p^2 + 2m\lambda x}}\right], \tag{22}$$

$$w_{\mathrm{IV}}(x,p) = \pi \left[2 + \frac{p}{2\sqrt{p^2 - 2m\lambda x}}\right]. \tag{23}$$

Notar que los tramos II y III para w comparten las mismas expresiones. Esto es debido a que durante el tiempo que la partícula recorre esa mitad de la órbita, siempre se encuentra en $x \geqslant 0$, de modo que la discontinuidad introducida por la función valor absoluto no afecta el paso de la partícula desde la región II a la III. Durante esa parte de la órbita, el movimiento es equivalente al movimiento de ascenso y descenso de una partícula lanzada hacia arriba en un campo gravitatorio uniforme.

Para calcular las transformaciones inversas, primero invertimos las relaciones (15)–(18) para despejar la función $x(w,E)$. Teniendo en cuenta el intervalo de variación del ángulo dentro de cada cuadrante, eso da

$$x(w,E) = \frac{E}{\lambda} \begin{cases} (2w/\pi)^2 - 1, & 0 \leqslant w \leqslant \frac{1}{2}\pi, \\ 1 - 4\,(1 - w/\pi)^2\,, & \frac{1}{2}\pi \leqslant w \leqslant \frac{3}{2}\pi, \\ 4\,(2 - w/\pi)^2 - 1, & \frac{3}{2}\pi \leqslant w \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{24}$$

Otra vez no hay discontinuidad en el tránsito entre el segundo y tercer cuadrante. Para que estas sean ecuaciones de transformación entre las variables originales y las de ángulo–acción, E debe ser entendida como función de J,

$$E(J) = \left(\frac{3\pi\lambda}{4\sqrt{2m}} J\right)^{2/3}. \tag{25}$$

Las ecuaciones de transformación para el impulso se calculan a partir de las de x y de la ecuación de conservación de la energía,

$$p(w,E) = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E - \lambda|x(w,E)|}, \tag{26}$$

tomando el signo adecuado según de qué cuadrante se trate.

Las curvas coordenadas

En el plano xp, las curvas coordenadas de J constante coinciden con las de E constante. Sin embargo, debido a que $J \propto E^{3/2}$, la separación entre las curvas de J será menor que entre las curvas de E, para una misma variación relativa. Para graficarlas, puede usarse la ecuación de conservación de la energía, despejando p como función de E y de x y escribiendo E como función de J a partir de la ec. (10). Así resulta

$$p(x, J) = \pm\sqrt{2m}\sqrt{E(J) - \lambda|x|} = \pm\sqrt{2m}\sqrt{\alpha J^{2/3} - \lambda|x|}, \tag{27}$$

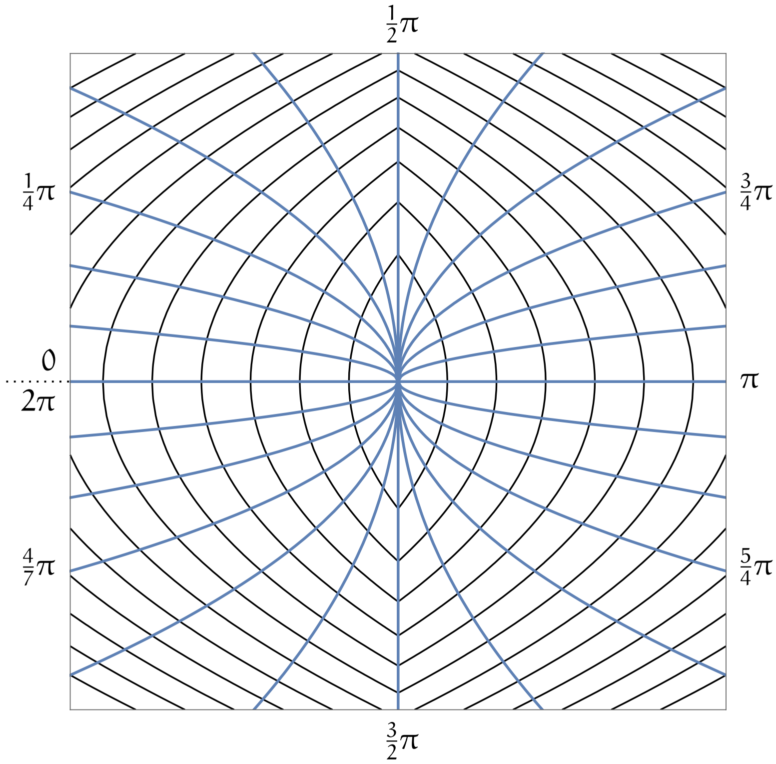
donde α es una constante que ustedes pueden calcular.

Las curvas de ángulo w constante están dadas en forma paramétrica a través de las ecuaciones de transformación para x y p, ecs. (24) y (26). Para graficarlas, se fija el valor de w y se hace variar E. Pero más directo que eso es tomar las expresiones (20)–(23) y despejar x como función de p y w. Por ejemplo, en el primer cuadrante, usando la ec. (20),

$$x(p, w) = \frac{p^2}{2m\lambda}\left[1 - (\pi/2w)^2\right]. \tag{28}$$

Las curvas coordenadas en ese cuadrante se obtienen fijando el valor de w entre 0 y $\pi/4$ y graficando x como función de p. Vemos que se trata de simples cuadráticas. El caso $w = 0$ debe considerarse por separado. En la ec. (20) si $w = 0$, entonces $p = 0$. Esa curva coordenada coincide con el semieje x negativo. Cuando $w = \pi/2$, la ec. (28) implica que la curva coordenada correspondiente es el semieje p positivo.

En la figura siguiente se muestra el sistema de curvas coordenadas de J y w. La separación entre dos curvas consecutivas de w constante es $\frac{1}{12}\pi$; sólo indicamos algunos valores.



La dinámica de las variables de ángulo–acción

La transformación que induce la función característica de Hamilton, $W(x, E(J))$, deja invariante al hamiltoniano, puesto que no depende del tiempo. En las nuevas coordenadas el hamiltoniano es

$$K(w, J) = E(J). \tag{29}$$

Así, la dinámica de las variables de ángulo–acción es trivial. La acción es una constante y

$$\dot{w}(t) = E'(J) \tag{30}$$

$$\Rightarrow \quad w(t) = E'(J)t + w_0 = \frac{1}{J'(E)}t + w_0 \equiv \omega(E)t + w_0. \tag{31}$$

Lo escribimos así porque nos interesa dejar las cosas en términos de la energía. La variable ángulo aumenta uniformemente con el tiempo. La ec. (12) nos da la frecuencia

$$\omega(E) = \frac{\pi\lambda}{\sqrt{2mE}}. \tag{32}$$

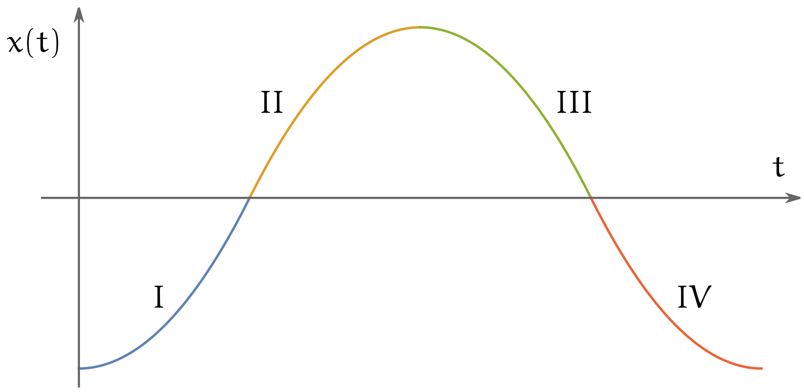
La variación uniforme de w implica que el tiempo que tarda la partícula en recorrer un intervalo Δw es independiente de la posición sobre la órbita. Por ejemplo, elijan una órbita cualquiera en la figura de la página anterior. El intervalo de tiempo que le toma a la partícula moverse entre dos curvas coordenadas de ángulo constante es siempre el mismo. La partícula tarda el mismo tiempo en ir desde la curva de $w = 0$ hasta la curva de $w = \pi/4$, que desde la curva de $w = \pi/4$ hasta la curva de $w = \pi/2$. Fíjense que son dos tramos de la órbita con una apariencia muy distinta. En el dibujo tienen longitudes visiblemente desiguales. Podrían construir un reloj (deformado según los estándares) usando el movimiento de la partícula, ubicando los números del cuadrante sobre curvas de w separadas por un intervalo Δw constante.

La dinámica de las variables originales

Analicemos un ciclo completo de movimiento, partiendo del punto de retorno x^- en $t = 0$, lo que corresponde a tomar $w_0 = 0$ en la ec. (31). La partícula va a estar un tiempo $T/4$ dentro de cada cuadrante, así que podemos separar el movimiento en intervalos de duración $T/4$, o bien en intervalos de $\pi/2$ en la variable ángulo. Reemplazando en las expresiones (24) la ec. (31) con $w_0 = 0$, resulta

$$x(t) = \frac{E}{\lambda}\begin{cases} (4t/T)^2 - 1, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}T, \\ \\ 1 - 4\,(1 - 2t/T)^2, & \frac{1}{4}T \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}T, \\ \\ 4\,(2 - 2t/T)^2 - 1, & \frac{3}{4}T \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{33}$$

La trayectoria se compone de tramos de parábolas, como muestra la figura.



La trayectoria es continua y tiene derivada continua. La discontinuidad ocurre en la derivada segunda, al pasar de la región I a la II y de la región III a la IV. No hay discontinuidades entre las regiones II y III, puesto que el potencial es ahí igual a λx.

A modo de verificación, deberían resolver las ecuaciones de movimiento directamente y comparar con los resultados anteriores. Es un movimiento muy sencillo. La aceleración es constante, como en un campo gravitatorio uniforme, pero cambia de signo al atravesar el punto $x = 0$. Un plano infinito con densidad de masa uniforme genera un potencial de este tipo.