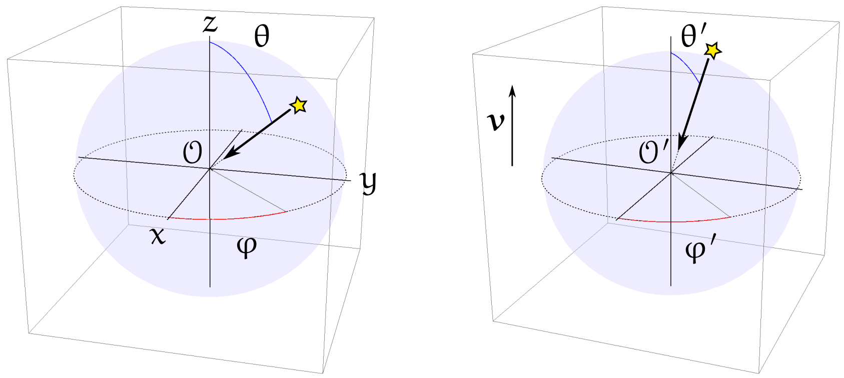
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 7/11: *El cielo relativista**

1. Guía 8, problema 1

El cielo relativista. El observador $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad relativa $\boldsymbol{v} = v\hat{z}$ respecto de $\mathcal{O}$ ($v > 0$). En cierto instante, los dos observadores coinciden casi en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz de una misma estrella. Los ejes de ambos observadores coinciden en el instante dado, de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; por ejemplo, según $\mathcal{O}$,

$$\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -\big(\cos\varphi\,\sin\theta\,\hat{x} + \sin\varphi\,\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\big)\,c.$$



a) Aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, verifique que $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$ y muestre que, según $\mathcal{O}'$, la luz proviene de la dirección definida por

$$\varphi' = \varphi, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta} \qquad (\beta = v/c)\,.$$

b) Deduzca esto mismo a partir de la transformación del cuadrivector $k^{\nu} = (\omega/c, \mathbf{k})$. Ya que está, encuentre la fórmula para el efecto Doppler relativista.

c) Existe una fórmula que relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ' y que pone de manifiesto cómo se comparan entre sí los dos ángulos. Deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2}.$$

d) Muestre que todas las estrellas en el hemisferio norte de $\mathcal{O}$ estarán concentradas, en el cielo de $\mathcal{O}'$, en cierto cono alrededor de su eje z. Suponiendo que hay igual número de estrellas en cada hemisferio del cielo de $\mathcal{O}$, ¿cuál es la relación entre el número de estrellas en cada hemisferio del cielo de $\mathcal{O}'$?

*zanellaj@df.uba.ar

e) El observador $\mathcal{O}$ ve una pequeña constelación triangular, cuyas 3 estrellas están en

$$\hat{r}_1 = \hat{r}(\theta, \varphi), \qquad \hat{r}_2 = \hat{r}(\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1), \qquad \hat{r}_3 = \hat{r}(\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2).$$

Halle las posiciones de las mismas estrellas según $\mathcal{O}'$ a primer orden en $\delta\theta_i$ y $\delta\varphi_i$. ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos que definen la constelación, según sea vista por uno u otro observador? ¿Pasará lo mismo con figuras más complicadas, como las Pléyades, o más extensas, como Orión?

■ **Transformación de velocidad**. De acuerdo al modo en que están relacionados los dos sistemas, las ecuaciones de transformación para la velocidad serán

$$u'_x = \frac{u_x/\gamma}{1 - u_z\beta/c}, \qquad u'_y = \frac{u_y/\gamma}{1 - u_z\beta/c}, \qquad u'_z = \frac{u_z - v}{1 - u_z\beta/c}. \tag{1}$$

Si la velocidad según $\mathcal{O}$ es

$$\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = \mathbf{u} = -\big(\cos\varphi\ \sin\theta\ \hat{x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \hat{y} + \cos\theta\ \hat{z}\big)\, c, \tag{2}$$

entonces, según $\mathcal{O}'$ es

$$\mathbf{c}_{\mathcal{O}'} = \mathbf{u}' = -\left(\frac{\cos\varphi\ \sin\theta}{\gamma(1+\beta\cos\theta)}\,\hat{x} + \frac{\sin\varphi\ \sin\theta}{\gamma(1+\beta\cos\theta)}\,\hat{y} + \frac{\cos\theta+\beta}{1+\beta\cos\theta}\,\hat{z}\right) c. \tag{3}$$

El módulo de $\mathbf{u}'$ está dado por

$$\begin{aligned} u'^2 &= \frac{c^2}{(1+\beta\cos\theta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin^2\theta + (\cos\theta+\beta)^2\right] \\ &= \frac{c^2}{(1+\beta\cos\theta)^2}\left(1 + \beta^2\cos^2\theta + 2\beta\cos\theta\right) = c^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Esto demuestra que lo que figura dentro del paréntesis en la ec. (3) es un versor, y que para los dos observadores la luz se propaga a velocidad c. A partir de la componente z de la ec. (3) leemos que

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1+\beta\cos\theta}. \tag{5}$$

Del cociente de las otras dos componentes resulta

$$\tan\varphi' = \tan\varphi. \tag{6}$$

La solución de esta ecuación tiene que ser $\varphi' = \varphi$, puesto que debe tender continuamente al resultado obtenido para $v = 0$.

Este método nos permitió encontrar cómo transforma la dirección de propagación pero no dice nada acerca de cómo transforma la frecuencia.

Transformación del cuadrivector k^ν. Una onda plana en el vacío está caracterizada por el siguiente cuadrivector número de onda

$$k^\nu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) = \frac{\omega}{c}(1, \hat{k}), \tag{7}$$

donde hemos usando la relación de dispersión $\mathbf{k} = \omega/c\ \hat{k}$. Definiendo al versor $\hat{k}$ mediante los ángulos θ y φ, queda

$$k^\nu = \frac{\omega}{c}(1, -\sin\theta\ \cos\varphi, -\sin\theta\ \sin\varphi, -\cos\theta). \tag{8}$$

La onda llega al observador desde la dirección $\hat{r}(\theta, \varphi)$, entonces debe propagarse en la dirección de $-\hat{r}(\theta, \varphi)$, de ahí que aparezcan los signos negativos.

En una transformación entre sistemas como la que propone el problema resulta

$$k'^\nu = \Big(\gamma(k^0 - \beta k_z), k_x, k_y, \gamma(k_z - \beta k^0)\Big). \tag{9}$$

Aplicando esta transformación al cuadrivector 8, obtenemos

$$k'^\nu = \frac{\omega}{c}\Big(\gamma(1 + \beta\cos\theta), -\sin\theta\ \cos\varphi, -\sin\theta\ \sin\varphi, -\gamma(\cos\theta + \beta)\Big). \tag{10}$$

Para leer de aquí ω' y los nuevos ángulos, hay que escribir k'^ν en la forma (7),

$$k'^\nu = \frac{\omega}{c}\gamma(1 + \beta\cos\theta)\left(1, -\frac{\sin\theta\ \cos\varphi}{\gamma(1 + \beta\cos\theta)}, -\frac{\sin\theta\ \sin\varphi}{\gamma(1 + \beta\cos\theta)}, -\frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}\right). \tag{11}$$

Respecto a la dirección de propagación, en esta expresión se leen los mismos resultados que en la ec. (3). Como resultado adicional obtenemos el modo en que transforma la frecuencia:

$$\omega' = \gamma(1 + \beta\cos\theta)\omega. \tag{12}$$

Notar que esta ecuación da la frecuencia medida según $\mathcal{O}'$ en términos de la dirección de propagación según $\mathcal{O}$. Sería deseable una ecuación para ω' en términos de θ'. Tal ecuación se obtiene a partir de la relación inversa a la ec. (12). (La aplicación de fórmulas que parecen ir en el sentido contrario de lo que uno se propone es típica de relatividad. Para llegar de A a B, a veces hay que escribir la ecuación que va de B a A). Simplemente con cambiar el signo de la velocidad en la ec. (12) obtenemos la transformación de la frecuencia de $\mathcal{O}'$ a $\mathcal{O}$,

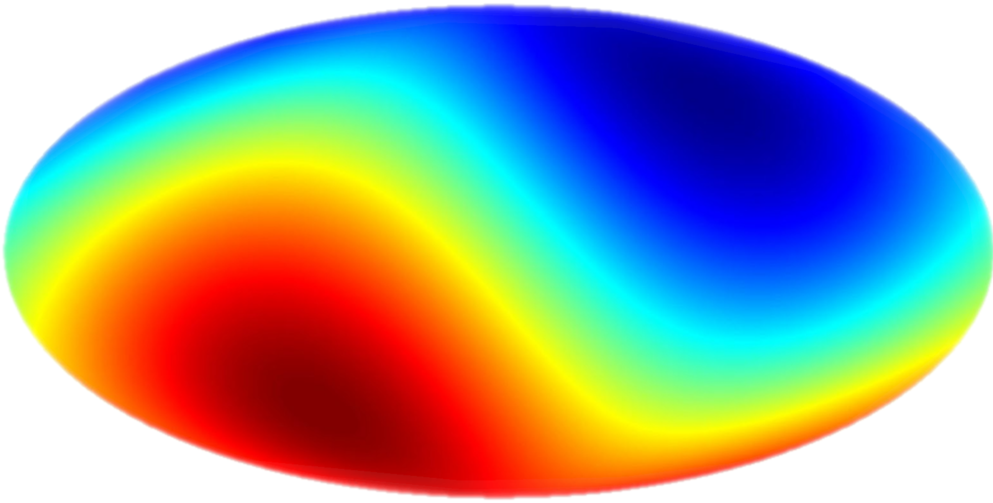
$$\omega = \gamma(1 - \beta\cos\theta')\omega', \tag{13}$$

de modo que la ecuación buscada es

$$\omega' = \frac{\omega/\gamma}{1 - \beta\cos\theta'}. \tag{14}$$

Todas las estrellas del hemisferio norte del cielo de $\mathcal{O}'$ estarán corridas hacia el azul, y viceversa.

Una buena ilustración de ese fenómenos es la anisotropía dipolar en la radiación cósmica de fondo, producida por el movimiento de nuestra galaxia respecto al sistema en el cual la radiación cósmica de fondo es isótropa (al menos con gran precisión).



■ **La fórmula de aberración relativista**. Una cosa que no es evidente de la ecuación para la transformación del ángulo polar,

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}, \tag{15}$$

es si θ' es mayor o menor que θ. Intuitivamente esperaríamos que, para $\beta > 0$, fuese menor. Pero el numerador y el denominador en la fórmula anterior corren en direcciones opuestas, de modo que no es algo que se pueda decir a simple vista. Si usamos la identidad trigonométrica

$$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}, \tag{16}$$

fácilmente se puede demostrar que

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2}. \tag{17}$$

Ahora no hay duda de que θ' es menor que θ para todo θ.

Los *items d)* y *e)* quedan como entretenimiento para el lector.