Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 11/11: *Relatividad especial, en el día del tránsito de Mercurio**

1. Guía 8, problema 6

Transformación relativista de la fuerza. Encuentre la ley de transformación relativista del vector fuerza $\mathbf{F}$, definido por

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d m\gamma(u)\mathbf{u}}{dt},$$

al pasar de un sistema $\mathcal{S}$ a un sistema $\mathcal{S}'$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto del primero. ¿Se comporta $\mathbf{F}$ como la parte espacial de un cuadrivector F^μ?

■ La fuerza, como está definida más arriba, es

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{1}$$

El vector $\mathbf{p}$ es la componente espacial de un cuadrivector, pero no puede decirse lo mismo de $\mathbf{F}$. El cuadrivector análogo a la fuerza en mecánica relativista, g^μ, se define derivando no con respecto al tiempo t sino con respecto al tiempo propio τ, que es un escalar de Lorentz:

$$g^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = mc\frac{du^\mu}{d\tau} = m\frac{d}{d\tau}\big[\gamma(u)(c,\mathbf{u})\big]. \tag{2}$$

Aquí u^μ es el cuadrivector velocidad,

$$u^\mu = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(u)\left(1, \frac{\mathbf{u}}{c}\right). \tag{3}$$

La relación entre $d\tau = dt/\gamma(u)$ implica

$$g^\mu = \gamma(u)\left(mc\frac{d\gamma(u)}{dt}, \mathbf{F}\right), \tag{4}$$

donde $\mathbf{F}$ es el vector definido por la ec. (1). Las componentes espaciales de g^μ están relacionadas con la fuerza. La componente temporal es

$$g^0 = \gamma(u)mc\frac{d\gamma(u)}{dt} = \frac{\gamma(u)}{c}\frac{dE(u)}{dt}, \tag{5}$$

donde $E(u) = mc^2\gamma(u)$ es la energía cinética (más la energía de la masa en reposo).

*zanellaj@df.uba.ar

En otro sistema S', el cuadrivector debe estar definido de la misma manera. Para que sea un objeto con significado físico, la interpretación del cuadrivector debe ser la misma en todos los sistemas. Así

$$g'^{\mu} = \gamma(u') \left(mc \frac{d\gamma(u')}{dt'}, \mathbf{F}' \right). \tag{6}$$

Supongamos que S' se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$ con respecto a S. Entonces, independientemente de lo anterior, tenemos las siguientes ecuaciones de transformación

$$g'_x = \gamma(v) \left(g_x - v g^0/c \right), \qquad g'_y = g_y, \qquad g'_z = g_z. \tag{7}$$

De la conjunción de estas ecuaciones con la ec. (6) resulta

$$\begin{aligned} \gamma(u')F'_x &= \gamma(v)\gamma(u) \left(F_x - mv \frac{d\gamma(u)}{dt} \right), \\ \gamma(u')F'_y &= \gamma(u)F_y, \\ \gamma(u')F'_y &= \gamma(u)F_z. \end{aligned} \tag{8}$$

Es importante entender la lógica detrás de este resultado: por un lado sabemos que cierto objeto g^{μ} es un cuadrivector. Por otro lado sabemos que sus componentes son funciones de otras magnitudes, a, b, c, $\ldots$,

$$g^0 = f_0(a, b, c, \ldots), \tag{9}$$
$$g_x = f_x(a, b, c, \ldots), \tag{10}$$
$$\text{etc.} \tag{11}$$

Tienen que ser las mismas funciones en todos los sistemas,

$$g'^0 = f_0(a', b', c', \ldots), \tag{12}$$
$$g'_x = f_x(a', b', c', \ldots), \tag{13}$$
$$\text{etc.} \tag{14}$$

Entonces las transformaciones de Lorentz, además de implicar una relación entre las componentes de g^{μ} en distintos sistemas, también aportan información sobre las relaciones de las magnitudes a, b, c, $\ldots$ en cada sistema, aunque estas magnitudes no sean ni escalares, ni cuadrivectores ni tensores de ningún tipo.

Por ejemplo, cuando transforman el cuadrivector velocidad

$$u^{\mu} = (u^0, u^1, u^2, u^3) \tag{15}$$

saben que su componente temporal en el nuevo sistema será

$$u'^0 = \gamma(v)(u^0 - vu^1/c). \tag{16}$$

Pero además saben que $u^0 = \gamma(u)$. En S' la componente temporal de u'^0 también tiene que ser igual a la función $\gamma(u')$. Si un objeto se interpreta en tales términos en un sistema, tiene que interpretarse en los mismos términos en todos los sistemas. Entonces para ver cómo transforma $\gamma(u)$ al pasar de un sistema a otro, no necesitan calcular primero cómo transforma u, lo que incluye la transformación de las tres componentes espaciales de la velocidad, el cálculo de su módulo y la aplicación de la función γ a ese resultado ($\leftarrow$ ejercicio). Simplemente transforman la componente temporal de u^μ. Ya saben que el resultado tiene que ser $\gamma(u')$. Dicho sea de paso, este sería el método más directo para calcular cómo transforma el módulo de la velocidad: lo despejan a partir de $\gamma(u')$.

Volviendo a las ecs. (8), si supiéramos escribir $\gamma(u')$ en términos de las magnitudes del sistema S tendríamos las ecuaciones de transformación para el vector fuerza. Según observamos en el párrafo anterior, $\gamma(u')$ puede obtenerse mediante la transformación del cuadrivector velocidad, del cual $\gamma(u)$ es la componente temporal

$$u^\mu = \gamma(u)\left(1, \frac{\mathbf{u}}{c}\right). \tag{17}$$

Explícitamente,

$$\gamma(u') = \gamma(v)\gamma(u)(1 - u_x v/c^2). \tag{18}$$

Así que, en principio, sería

$$F'_x = \frac{F_x - mv\dot{\gamma}(u)}{1 - u_x v/c^2}, \qquad F'_y = \frac{F_y/\gamma(v)}{1 - u_x v/c^2}, \qquad F'_y = \frac{F_z/\gamma(v)}{1 - u_x v/c^2}. \tag{19}$$

El único lunar en estas expresiones es $\dot{\gamma}(u)$, pero se puede escribir también en términos de la fuerza. En efecto,

$$\dot{\gamma}(u) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) = \frac{\gamma(u)^3}{c^2}\,\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}. \tag{20}$$

Por otro lado, a partir de la ec. (1),

$$\mathbf{F} = m\dot{\gamma}(u)\mathbf{u} + m\gamma(u)\,\frac{d\mathbf{u}}{dt}. \tag{21}$$

Tomando el producto escalar con $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = mu^2\dot{\gamma}(u) + m\gamma(u)\,\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \tag{22}$$

que permite escribir

$$\gamma(u)\,\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} - u^2\dot{\gamma}(u). \tag{23}$$

Con esto la ec. (20) se lee como

$$\dot{\gamma}(u) = \frac{\gamma(u)^2}{c^2}\left(\frac{1}{m}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} - u^2\dot{\gamma}(u)\right). \tag{24}$$

Notar la siguiente identidad, que se usa con frecuencia,

$$\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1. \tag{25}$$

Aplicada en la ec. (24) para escribir $\gamma(u)^2u^2/c^2$ está ecuación se reduce a

$$\dot{\gamma}(u) = \frac{\gamma(u)^2}{c^2}\frac{1}{m}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} - \left[\gamma(u)^2 - 1\right]\dot{\gamma}(u). \tag{26}$$

Finalmente,

$$\dot{\gamma}(u) = \frac{1}{mc^2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}. \tag{27}$$

Esta ecuación es importante. Debido a que la energía es

$$E = m\gamma(u)c^2, \tag{28}$$

vemos que

$$\dot{E} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}, \tag{29}$$

que coincide con su versión no relativista.

Volviendo a la primera ec. (19), resulta

$$F'_x = \frac{F_x - v\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}/c^2}{1 - u_x v/c^2}. \tag{30}$$

La transformación de la fuerza escrita de manera vectorial se lee como

$$\mathbf{F} = \frac{1}{1 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2}\left[\mathbf{F}\cdot(\hat{v} - v\,\mathbf{u}/c^2)\,\hat{v} - \frac{1}{\gamma(v)}\hat{v}\times(\mathbf{F}\times\hat{v})\right]. \tag{31}$$

Nos faltaría ver qué pasa con la componente temporal del cuadrivector fuerza,

$$g^\mu = \gamma(u)\left(\dot{E}/c, \mathbf{F}\right). \tag{32}$$

La ecuación de transformación para su componente temporal es

$$\gamma(u')\dot{E}' = \gamma(v)\gamma(u)\left(\dot{E} - vF_x\right). \tag{33}$$

Usando el resultado de la ec. (18) obtenemos

$$\dot{E}' = \frac{\dot{E} - vF_x/c}{1 - u_x v/c^2}, \tag{34}$$

que relaciona la potencia en los dos sistemas.

2. Guía 8, problema 7

La fórmula $m\ddot{r}$ relativista. A partir de la ecuación de movimiento relativista

$$\frac{dm\gamma(v)\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{35}$$

deduzca la versión relativista de la ecuación $m\dot{\boldsymbol{v}} = \mathbf{F}$, a saber,

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\gamma(v)}\left[\mathbf{F} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right]. \tag{36}$$

■ La versión relativista de la ecuación $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ es más complicada que su contrapartida no relativista. La dificultad está en que $\mathbf{p} = m\gamma\,\boldsymbol{v}$; luego

$$\mathbf{F} = m\dot{\gamma}\,\boldsymbol{v} + m\gamma\,\dot{\boldsymbol{v}}. \tag{37}$$

Usando el resultado del problema anterior para la derivada de γ respecto del tiempo, ec. (27), obtenemos la fórmula del enunciado,

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{F} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right]. \tag{38}$$

Ya que la solución ha sido tan breve, diremos algunas cosas más.

Aunque la fuerza $\mathbf{F}$ no dependa de la velocidad, en general la aceleración será una función de $\boldsymbol{v}$. Cuando las velocidades son relativistas, fuerzas perpendiculares o paralelas a la velocidad producen efectos de muy distinta magnitud. Si $\mathbf{F}$ es paralela a $\boldsymbol{v}$, digamos, $\mathbf{F} = F\,\hat{v}$, se obtiene

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\gamma^3}\mathbf{F}. \tag{39}$$

El factor de supresión es $1/\gamma^3$. Si $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\boldsymbol{v}$,

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\gamma}\mathbf{F}, \tag{40}$$

y el factor es sólo $1/\gamma$. A igual módulo, para velocidades relativistas, es mucho mayor la aceleración producida por una fuerza perpendicular que por una fuerza paralela. Esto es de gran importancia en los problemas de radiación.

Otro aspecto de la ec. (38) es que cuando $v \to c$, la aceleración es

$$m\dot{\boldsymbol{v}} \simeq \frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\hat{v})\hat{v}\right] = \frac{1}{\gamma}\hat{v}\times(\mathbf{F}\times\hat{v}). \tag{41}$$

Independientemente de la dirección de la fuerza, la aceleración tiende a ser perpendicular a la velocidad. Una aceleración perpendicular a la velocidad implica que el módulo se mantiene constante. Es posible desviar a la partícula pero no hacer que se mueva más rápido.

3. Guía 8, problema 8

Movimiento hiperbólico. Encuentre el movimiento para todo t de una partícula de masa m y carga e en un campo eléctrico constante y uniforme $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\hat{x}$. Asumir $e\mathcal{E} > 0$. En $t = 0$ la carga está en el origen y tiene velocidad nula. Demuestre que, en el sistema instantáneamente en reposo respecto de la carga, la aceleración siempre toma el mismo valor $e\mathcal{E}/m$.

■ Resolveremos primero la última cuestión. Puesto que se pide calcular la aceleración en un sistema de referencia en el que la partícula está momentáneamente en reposo, será válida la ecuación no relativista

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'. \tag{42}$$

Las cantidades están primadas para distinguirlas de aquellas medidas en el sistema S, donde la carga se mueve con velocidad $\mathbf{u}$. Para calcular la aceleración $\mathbf{a}'$ necesitamos conocer la fuerza $\mathbf{F}'$.

En el sistema S, la única componente no nula de la fuerza está en en la dirección x,

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E}\,\hat{x}. \tag{43}$$

Debido a que la carga parte del reposo, esta fuerza sólo produce aceleración sobre el eje x. Notar que la ec. (38) implica que la fuerza y la aceleración no son siempre paralelas. En este caso sí. La carga se mantiene entonces siempre sobre el eje x.

El sistema S' en el que la carga está instantáneamente en reposo tiene la misma velocidad de la carga, $\mathbf{v} = u_x\,\hat{x}$. La transformación de la fuerza involucra, por lo tanto, un movimiento relativo en la dirección x. Según las ecs. (19), las componentes de la fuerza perpendiculares a la velocidad también son nulas en S' y, por lo tanto, serán nulas las componentes de la aceleración en esas direcciones. La ec. (30) da la transformación de la componente de la fuerza paralela a la velocidad relativa entre los sistemas S y S',

$$F'_x = \frac{F_x - v\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}/c^2}{1 - u_x v/c^2}, \tag{44}$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de la partícula en el sistema S. Debemos tomar $v = u_x$, de manera que el resultado, un poco inesperado, es que

$$F'_x = F_x, \tag{45}$$

aún cuando la velocidad u_x está cambiando todo el tiempo.

La aceleración en el sistema en el que la carga está instantáneamente en reposo siempre tiene el mismo valor

$$a'_x = \frac{e\mathcal{E}}{m}. \tag{46}$$

Este resultado implica que el campo eléctrico en la dirección x no depende del sistema de referencia, cuando el movimiento relativo es según x. Todos los sistemas con velocidades entre menos y más c son visitados por la carga, y en todos esos sistemas su aceleración es siempre la misma. Eso implica que el campo eléctrico debe ser el mismo. Encontramos así un resultado que volverán a ver en Física Teórica 1 y que vale también para el campo magnético: las componentes de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ paralelas a la velocidad según la cual se realiza la transformación son invariantes. Esto, por supuesto, descarta toda hipótesis de que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ sean las componentes espaciales de algún cuadrivector. Si tal fuera el caso, sus componentes paralelas a la velocidad deberían transformar como las de un cuadrivector.

Ahora sí, resuelta la cuestión secundaria, y como aplicación de la ec. (38), resolvamos el problema de la carga e que se acelera desde el reposo en un campo eléctrico en la dirección x. La fuerza es $\mathbf{F} = e\mathcal{E}\,\hat{x}$, con $e\mathcal{E} > 0$. La aceleración estará dirigida también según esa dirección. Tendremos $\mathbf{u} = u\,\hat{x}$, y la ecuación de movimiento será

$$\dot{u} = \frac{1}{\gamma^3(u)}\frac{e\mathcal{E}}{m} = \left(1 - u^2/c^2\right)^{3/2}\frac{e\mathcal{E}}{m}. \tag{47}$$

No es la más bella de las ecuaciones diferenciales,

$$\frac{du}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} = \frac{e\mathcal{E}}{m}dt. \tag{48}$$

La primitiva se obtiene por adivinación. Puesto que la partícula parte del reposo queda

$$\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{e\mathcal{E}}{m}t. \tag{49}$$

De aquí se despeja

$$\dot{x} = \frac{e\mathcal{E}t/m}{\sqrt{1 + (e\mathcal{E}t/mc)^2}}. \tag{50}$$

El signo de la raíz se ha elegido conforme al hecho de que la partícula se acelera en el sentido creciente de x. La integral que queda por hacer es elemental. El resultado es

$$x = \frac{mc^2}{e\mathcal{E}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{e\mathcal{E}t}{mc}\right)^2} - 1\right]. \tag{51}$$

Deberían verificar que las unidades de cada término son las correctas. Recuerden que $e\mathcal{E}$ tiene unidades de fuerza, es decir, de energía sobre longitud, y además mc^2 tiene unidades de energía.

Este tipo de movimiento se conoce con el nombre de movimiento hiperbólico, y volverá a aparecer en el problema 17 de la Guía 7, en donde se resuelve el mismo sistema pero mediante la ecuación de Hamilton–Jacobi. Allí se discuten más detalles de la trayectoria.

Otro método (sin integrales)

Puesto que la fuerza está en la dirección x y es constante, la ecuación $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ se lee como

$$\dot{p}_x = e\mathcal{E}, \tag{52}$$

que, para una partícula que parte del reposo, implica

$$p_x = e\mathcal{E}t. \tag{53}$$

Por otro lado, la fórmula para la potencia, ec. (29),

$$\dot{E} = e\mathcal{E}\dot{x}, \tag{54}$$

se integra inmediatamente y da

$$E = e\mathcal{E}x + E_0, \tag{55}$$

donde $E_0 = mc^2$ es la energía inicial. Además

$$E^2 = (mc^2)^2 + (p_x c)^2 = (mc^2)^2 + (e\mathcal{E}tc)^2. \tag{56}$$

Las dos ecuaciones implican

$$x = \frac{mc^2}{\mathcal{E}E}\left[\sqrt{1 + 1\left(\frac{e\mathcal{E}t}{mc}\right)^2} - 1\right], \tag{57}$$

que es el mismo resultado de antes pero sin tener que haber resuelto ninguna integral.

El problema siguiente trata el mismo sistema mediante el método de Hamilton–Jacobi. Es importante advertir que hasta aquí, cuando escribimos que la energía era E, nos referíamos puramente a la energía cinética (que incluye la energía de la masa en reposo)

$$E = mc^2\gamma(u). \tag{58}$$

Es una cantidad que varía con el tiempo, debido a que el campo eléctrico realiza trabajo. En el siguiente problema, el campo eléctrico será tenido en cuenta a través de su potencial. Ahí E incluirá tanto el término cinético como el potencial y será una constante de movimiento.

4. Guía 7, problema 17

El hamiltoniano de una partícula relativista de masa m y carga e que se mueve sobre el eje x en un campo eléctrico constante y uniforme $\mathbf{E} = \mathcal{E}\,\hat{x}$ es

$$H(x, p) = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - \lambda x, \tag{59}$$

donde c es la velocidad de la luz y $\lambda = e\mathcal{E} > 0$. Dibuje el retrato de fase. Encuentre la solución general del movimiento mediante el método de H–J.

■ Seguiremos el método de H–J resolviendo la ecuación diferencial para la función característica de Hamilton W y la usaremos como función generatriz. La transformación dará como resultado un hamiltoniano constante.

Tendremos en cuenta que $\lambda = e\mathcal{E} > 0$. El retrato de fase es el gráfico de las curvas de nivel de la función $H(x, p)$. Aunque podríamos despejar $p(x, E)$ a partir de la ec. (59), conviene ver primero si no se trata de una ecuación reconocible. Si la energía es E, entonces

$$(\lambda x + E)^2 - (pc)^2 = \epsilon^2, \tag{60}$$

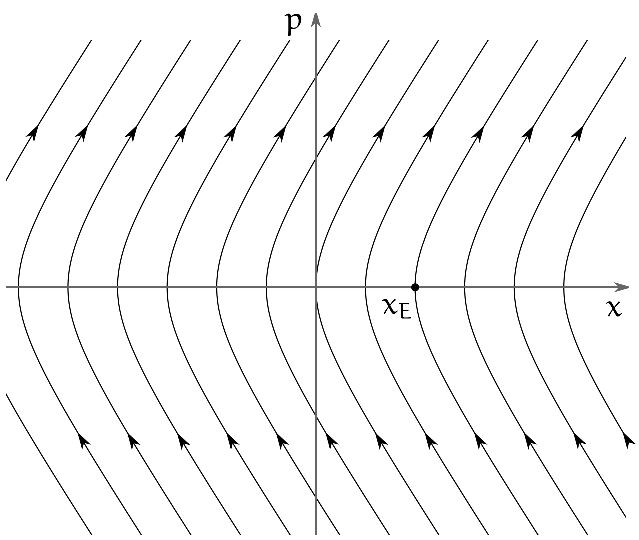
donde $\epsilon = mc^2$, y con la condición adicional

$$x > \frac{\epsilon - E}{\lambda}, \tag{61}$$

que proviene del hecho de que $\lambda x + E = \sqrt{\epsilon^2 + (pc)^2} > \epsilon$. La ec. (60) representa hipérbolas con vértices en el eje x en las posiciones

$$x_\pm = \frac{\pm\epsilon - E}{\lambda}. \tag{62}$$

Según la ec. (61) debemos quedarnos únicamente con la rama derecha de estas hipérbolas. El mínimo valor de x alcanzado será $x_E = (\epsilon - E)/\lambda$. La partícula se aproxima a x_E desde $x \to \infty$ en $t \to -\infty$, pasa por x_E en cierto instante t_0 y para $t \to \infty$ de nuevo es $x \to \infty$.



Procedimos por inercia. Mucho más fácil hubiera sido romper un poco con el tratamiento especial que parece recibir x cada vez que hacemos un retrato de fase. ¿Por qué deberíamos siempre graficar las funciones $p(x)$? ¿Por qué no graficar las funciones $x(p)$? En este problema ésta es la forma más sencilla de dibujar el retrato de fase. Apenas si hay que despejar algo. A partir de la ec. (59) tenemos

$$x(p, E) = \frac{1}{\lambda}\left(\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - E\right). \tag{63}$$

El gráfico de esta función no necesita de tanto análisis como el de las hipérbolas. No hay ningún signo que definir. Está claro que tienen que ser curvas como las de la figura, y no de otra forma.

Hay que notar que la relación entre velocidad e impulso ya no es $p = m\dot{x}$, sino

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{pc^2}{\sqrt{\epsilon^2 + (pc)^2}}. \tag{64}$$

Sigue siendo cierto que p y $\dot{x}$ tienen el mismo signo, pero cuando $|p| \to \infty$ la magnitud de la velocidad tiende a c. El sentido de las flechas en la figura está determinado por la ecuación anterior: $\dot{x}$ tiene el mismo signo que p.

Debido a que se trata de un sistema conservativo, buscaremos la función característica de Hamilton, que satisface la ecuación

$$H\big(x, W'(x)\big) = E, \tag{65}$$

que en el presente problema se lee como

$$\sqrt{\epsilon^2 + W'(x)^2 c^2} - \lambda x = E. \tag{66}$$

Despejando,

$$cW'(x) = \pm\sqrt{(E + \lambda x)^2 - \epsilon^2}. \tag{67}$$

La solución dependerá explícitamente de E. Será

$$W(x, E) = \pm\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} dx\, \sqrt{(E + \lambda x)^2 - \epsilon^2}. \tag{68}$$

Como siempre, no hay que apresurarse a calcular esta integral. En este tipo de potencial todas las trayectorias tienen un punto de retorno donde $p = 0$,

$$x_E = \frac{\epsilon - E}{\lambda}. \tag{69}$$

Resulta práctico tomar el límite inferior de la integral (68) en $x_0 = x_E$, definiendo

$$W(x, E) = \pm\frac{1}{c}\int_{x_E}^{x} dx\, \sqrt{(E + \lambda x)^2 - \epsilon^2}. \tag{70}$$

Según hicimos notar en otro ejemplo, esto tiene la ventaja de que la derivada respecto de E puede pasar a través del símbolo integral.

Considerada como una función generatriz de tipo 2, la función característica de Hamilton $W(x, E)$ transforma al hamiltoniano original en

$$K(Q, E) = E, \tag{71}$$

donde E es el nuevo impulso y Q es la coordenada conjugada de E. La dinámica de Q está dada simplemente por

$$Q = t + Q_0, \tag{72}$$

donde Q_0 es una constante de integración. Aquí la función W tiene dos ramas, de modo que necesitamos distinguir entre las variables y constantes de integración de una y otra. La rama correspondiente al signo positivo en la ec. (68) resuelve el movimiento para $p \geqslant 0$, y viceversa. Para no arrastrar el doble signo durante todo el cálculo, resulta más sencillo resolver para una sola de las ramas y usar propiedades conocidas del movimiento para extender la solución a todo tiempo.

Del análisis que hicimos al construir el retrato de fase, sabemos que si la partícula alcanza el punto $x = x_E$ en $t = t_0$, la trayectoria debe ser simétrica respecto de ese instante,

$$x(t_0 - \Delta t) = x(t_0 + \Delta t), \tag{73}$$

que es lo mismo que decir que

$$x(t) = x(2t_0 - t), \tag{74}$$

independientemente de la relación de orden entre t y t_0. Si hemos encontrado la solución para $t \geqslant t_0$, que es cuando $p \geqslant 0$, podemos usar la fórmula anterior para calcular $x(t)$ para valores de $t < t_0$, cuando es $p < 0$.

Concentrémonos entonces en la rama con $p \geqslant 0$. La ecuación de transformación para la nueva coordenada es

$$Q = \frac{\partial W}{\partial E}(x, E). \tag{75}$$

Combinando esta relación con la ec. (72), el resultado es una ecuación que contiene la dinámica de la coordenada x original,

$$t + Q_0 = \frac{\partial W}{\partial E}(x, E). \tag{76}$$

Reemplazando el resultado de la ec. (70) y pasando la derivada respecto de E a través del símbolo integral se obtiene

$$t + Q_0 = \frac{1}{c} \int_{x_E}^{x} dx \, \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{(E + \lambda x)^2 - \epsilon^2}. \tag{77}$$

Recién ahora enfrentamos el problema de resolver integrales. Necesitamos calcular

$$\int_{x_E}^{x} dx \, \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{(E + \lambda x)^2 - \epsilon^2}. \tag{78}$$

El hecho de que E aparezca en la combinación $E + \lambda x$ permite obviar la integración propiamente dicha, pues resulta

$$\int_{x_E}^{x} dx \, \frac{\partial}{\partial E} \sqrt{(E+\lambda x)^2 - \epsilon^2} = \frac{1}{\lambda} \int_{x_E}^{x} dx \, \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{(E+\lambda x)^2 - \epsilon^2} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{(E+\lambda x)^2 - \epsilon^2}. \tag{79}$$

Esta clase de simplificación ocurrirá siempre que E y x aparezcan en una combinación lineal. En general, la derivada respecto de E puede transformarse en una derivada respecto de x, pero la transformación nunca va a resultar tan simple como aquí. Hay que ver caso por caso.

Reemplazando el resultado (79) en la ec. (77) queda

$$t + Q_0 = \frac{1}{c\lambda} \sqrt{(E+\lambda x)^2 - \epsilon^2}. \tag{80}$$

En esta ecuación vemos que para $t = -Q_0$ resulta $x = x_E$. De esta manera, la constante $-Q_0$ coincide con el tiempo de paso por el punto de retorno,

$$Q_0 = -t_0. \tag{81}$$

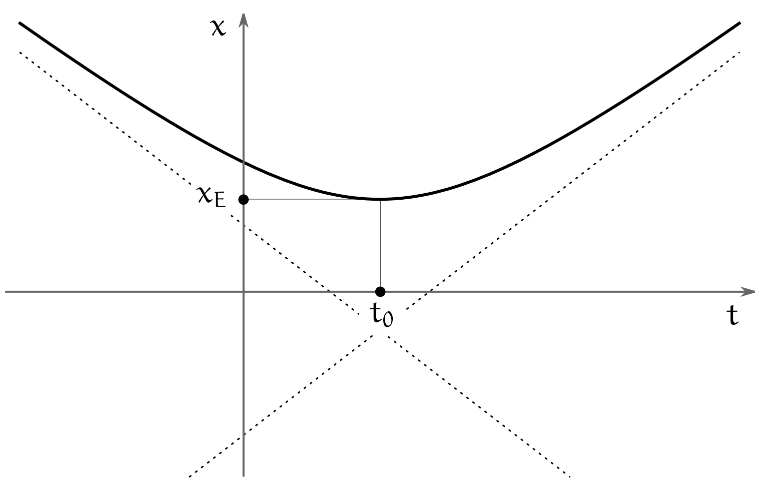
La ec. (80) será válida para $t \geqslant t_0$, donde es $p \geqslant 0$. Al despejar x hay que tomar el signo de la raíz que implica $\dot{x} \geqslant 0$ para $t \geqslant t_0$,

$$x(t, E, t_0) = \frac{1}{\lambda} \left[\sqrt{\epsilon^2 + [c\lambda(t - t_0)]^2} - E \right]. \tag{82}$$

Esta expresión es simétrica respecto de t_0, por lo tanto para obtener la solución válida para $t < t_0$ no es necesario introducir ninguna modificación. Otra forma de escribirla es

$$x(t, E, t_0) = x_E + \frac{1}{\lambda} \left[\sqrt{\epsilon^2 + [c\lambda(t - t_0)]^2} - \epsilon \right]. \tag{83}$$

Aquí vemos de nuevo que el signo frente a la raíz es el correcto. De otro modo la partícula se movería a la izquierda del punto de retorno, lo que no puede ser.



Este tipo de movimiento se conoce con el nombre de movimiento hiperbólico. Para

$$c\lambda|t - t_0| \ll \epsilon, \tag{84}$$

es decir, cuando la partícula está cerca del punto en el que su velocidad se anula, resulta

$$x(t) \simeq x_E + \frac{1}{2}\frac{\lambda c^2}{\epsilon}(t - t_0)^2 = x_E + \frac{e\mathcal{E}}{2m}(t - t_0)^2. \tag{85}$$

Este es el resultado no relativista para la trayectoria de una partícula con aceleración $e\mathcal{E}/m$ constante. Notar que no depende de c. En contraste, para $c\lambda|t - t_0| \gg \epsilon$,

$$x(t) \simeq x_E + c|t - t_0| - \frac{\epsilon}{\lambda} = x_E + c|t - t_0| - \frac{mc^2}{e\mathcal{E}}, \tag{86}$$

lo que da la ecuación de las asíntotas. Notar que $mc^2/(e\mathcal{E})$ tiene unidades de longitud; es la longitud que corresponde a una diferencia de energía potencial igual a la energía en reposo de la partícula. A su vez, el tiempo $\epsilon/(c\lambda) = mc^2/(ce\mathcal{E})$ es el tiempo característico en el que la partícula alcanza velocidades relativistas.