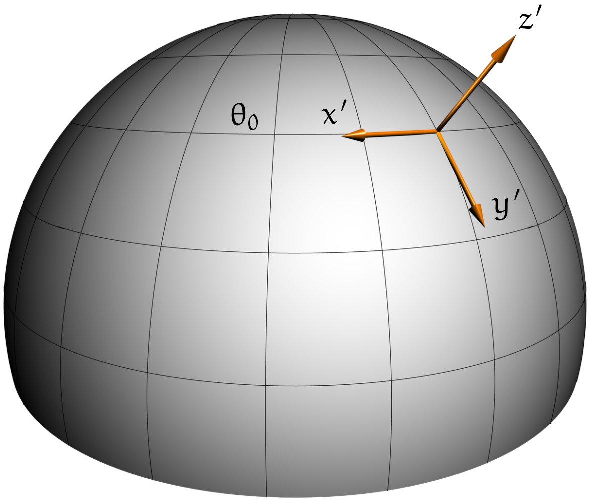
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

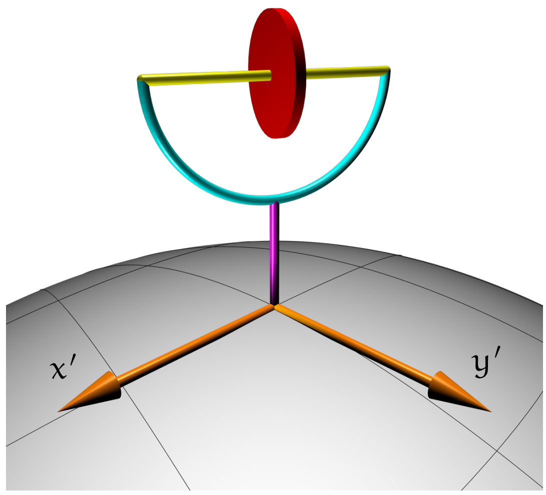
Clase del 21/11: *Repaso de cuerpo rígido*[*]

1. Guía 6, problema 11: girocompás

Un girocompás consiste en un cuerpo rígido simétrico montado de tal manera que está restringido a moverse en un plano horizontal paralelo a la superficie de la Tierra. Elegir un par de coordenadas generalizadas y escribir el lagrangiano para un girocompás en un punto fijo de la superficie terrestre a una latitud $\pi/2 - \theta_0$. Mostrar que la componente de la velocidad angular ω_3 a lo largo del eje de simetría se conserva. Mostrar que, si $\omega_3 > (I_1/I_3)\omega_0 \sin\theta_0$, donde ω_0 es la velocidad angular de rotación de la Tierra, entonces el eje de simetría oscila en el plano horizontal alrededor de la línea norte-sur. Encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

■ Ignorando el movimiento orbital de la Tierra, tomaremos como sistema de referencia ejes xyz con origen en el centro de la Tierra, con el eje z según el eje de rotación. El giróscopo está fijo a la superficie de la Tierra. La velocidad de su centro de masa es constante, de modo que toda la dinámica se reduce a la parte rotacional. Para que la descripción tenga una utilidad práctica para alguien que esté observando *in situ* el movimiento del giróscopo, deben usarse coordenadas generalizadas que describan su orientación respecto de ejes $x'y'z'$ fijos al punto de la superficie de la Tierra en la que se encuentra el giróscopo. Una elección natural es tomar esos ejes dirigidos según las direcciones norte–sur, este–oeste y nadir–cénit, como muestra la figura.





Respecto de estos ejes se definen los ángulos de Euler del giróscopo. Por hipótesis, el giróscopo está horizontal, de modo que $\theta = \pi/2$. Habrá únicamente dos coordenadas generalizadas, φ y ψ.

[*]zanellaj@df.uba.ar

Para calcular la energía de rotación del giróscopo necesitamos conocer su velocidad angular. Para eso aplicaremos la aditividad de las velocidades angulares. Si el giróscopo tiene una velocidad $\boldsymbol{\omega}'$ respecto a los ejes $x'y'z'$ fijos a la Tierra, y la Tierra tiene una velocidad angular $\omega_0\hat{z}$ respecto de los ejes fijos al espacio, luego la velocidad angular del giróscopo es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + \omega_0\hat{z}. \tag{1}$$

Su velocidad angular relativa a los ejes fijos a la superficie de la Tierra viene dada por la expresión general

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\varphi}\,\hat{z}' + \dot{\theta}\,\hat{\rho}' + \dot{\psi}\,\hat{e}_3. \tag{2}$$

Aquí $\dot{\theta} = 0$. Descomponiendo $\boldsymbol{\omega}'$ según los ejes fijos al cuerpo con $\theta = \pi/2$, resulta

$$\omega_1' = \dot{\varphi}\sin\psi, \quad \omega_2' = \dot{\varphi}\cos\psi, \quad \omega_3' = \dot{\psi}. \tag{3}$$

Para poder calcular de manera sencilla la energía de rotación del giróscopo necesitamos descomponer $\boldsymbol{\omega}$ según los ejes fijos al cuerpo. Parte del trabajo ya está hecho. Lo que hace falta es descomponer $\hat{z}$ según los versores fijos al cuerpo. Primero escribiremos $\hat{z}$ según la base $x'y'z'$,

$$\hat{z} = \cos\theta_0\,\hat{z}' - \sin\theta_0\,\hat{y}', \tag{4}$$

donde θ_0 es el ángulo polar que da la posición del giróscopo relativa a la Tierra ($\theta_0 = 0$ en el polo norte y $\theta_0 = \pi/2$ en el ecuador). Ahora usamos las relaciones entre los ejes fijos al cuerpo y la base asociada a los ejes $x'y'z'$, de nuevo, con $\theta = \pi/2$. A partir de las relaciones generales

$$\hat{e}_1 = \cos\psi\;\hat{\rho}' + \sin\psi(\sin\theta\;\hat{z}' + \cos\theta\;\hat{\varphi}') = \cos\psi\;\hat{\rho}' + \sin\psi\;\hat{z}', \tag{5}$$

$$\hat{e}_2 = -\sin\psi\;\hat{\rho}' + \cos\psi(\sin\theta\;\hat{z}' + \cos\theta\;\hat{\varphi}') = -\sin\psi\;\hat{\rho}' + \cos\psi\;\hat{z}', \tag{6}$$

$$\hat{e}_3 = \cos\theta\;\hat{z}' - \sin\theta\;\hat{\varphi}' = -\hat{\varphi}', \tag{7}$$

formando los productos escalares de $\hat{z}$ con cada uno de los versores, obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{z} =& (\cos\theta_0\;\sin\psi - \sin\theta_0\;\cos\psi\;\sin\varphi)\hat{e}_1 \\ &+ (\cos\theta_0\;\cos\psi + \sin\theta_0\;\sin\psi\;\sin\varphi)\hat{e}_2 + \sin\theta_0\;\cos\varphi\;\hat{e}_3.\end{aligned} \tag{8}$$

La velocidad angular total del giróscopo escrita según los ejes del cuerpo está dada por

$$\omega_i = \omega_i' + \omega_0\;\hat{z}\cdot\hat{e}_i. \tag{9}$$

Explícitamente,

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \psi + \omega_0 (\cos \theta_0 \ \sin \psi - \sin \theta_0 \ \cos \psi \ \sin \varphi), \tag{10}$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \cos \psi + \omega_0 (\cos \theta_0 \ \cos \psi + \sin \theta_0 \ \sin \psi \ \sin \varphi), \tag{11}$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \omega_0 \sin \theta_0 \ \cos \varphi. \tag{12}$$

Si el centro de masa del giróscopo no se mueve respecto de la superficie de la Tierra, el lagrangiano coincide con la energía cinética de rotación ($I_1 = I_2 = I$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) &= \frac{I_3}{2} \omega_3^2 + \frac{I}{2} \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 \right) \\ &= \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \omega_0 \sin \theta_0 \ \cos \varphi \right)^2 + \frac{I}{2} \Big[\dot{\varphi}^2 + \omega_0^2 \left(\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \ \sin^2 \varphi \right) + 2 \dot{\varphi} \omega_0 \cos^2 \theta_0 \Big]. \end{aligned} \tag{13}$$

Tal como hicieron notar en clase, esta expresión no depende de ψ. Eso indica que podríamos haberla deducido más fácilmente tomando $\psi = 0$ en las ecuaciones para las componentes de $\boldsymbol{\omega}$. Retrospectivamente nos damos cuenta de que es evidente que la energía de rotación no puede depender de ψ. Una variación de ψ no cambia el estado del giróscopo, sólo redefine el punto desde el cual se mide el ángulo ψ. Estaremos más atentos en el futuro a este tipo de simplificaciones.

A todos los efectos prácticos podemos eliminar el término constante y el término proporcional a $\dot{\varphi}$. Ninguno de los dos afecta las ecuaciones de movimiento: el primero, por ser constante; el segundo, por ser una derivada total respecto de t. Nos queda entonces

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \omega_0 \sin \theta_0 \ \cos \varphi \right)^2 + \frac{I}{2} \Big[\dot{\varphi}^2 + \omega_0^2 \sin^2 \theta_0 \ \sin^2 \varphi \Big]. \tag{14}$$

La coordenada ψ es cíclica, luego

$$\dot{\psi} + \omega_0 \sin \theta_0 \ \cos \varphi = \omega_3, \tag{15}$$

es un constante de movimiento. El lagrangiano tampoco depende del tiempo explícitamente, de manera que h es otra constante de movimiento. Para escribir h, lo más sencillo es recordar que si el lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0, \tag{16}$$

donde $\mathcal{L}_i$ es una función homogénea de grado i en las velocidades, entonces

$$h = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0. \tag{17}$$

En nuestro caso resulta

$$h = \frac{I_3}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega_0^2 \sin^2 \theta_0 \left(\frac{I_3}{2} \cos^2 \varphi + \frac{I}{2} \sin^2 \varphi \right). \tag{18}$$

Podemos eliminar $\dot\psi$ a través de la ec. (15), con lo que h se escribe como

$$h = \frac{I_3}{2}\left(\omega_3^2 + \omega_0^2 \sin^2\theta_0 \ \cos^2\varphi - 2\omega_3\omega_0\sin\theta_0 \ \cos\varphi\right) \\ + \frac{I}{2}\dot\varphi^2 - \omega_0^2\sin^2\theta_0\left(\frac{I_3}{2}\cos^2\varphi + \frac{I}{2}\sin^2\varphi\right). \tag{19}$$

Luego de una cancelación, de reemplazar en el último término $\sin^2\varphi$ por $1-\cos^2\varphi$ y de omitir los términos constantes, la ecuación de conservación es

$$h = \frac{I}{2}\dot\varphi^2 - I_3\omega_3\omega_0\sin\theta_0\left(\cos\varphi - \frac{I\omega_0\sin\theta_0}{2I_3\omega_3}\cos^2\varphi\right). \tag{20}$$

El problema unidimensional equivalente tiene un potencial efectivo

$$V(\varphi) = -I_3\omega_3\omega_0\sin\theta_0\left(\cos\varphi - \frac{I\omega_0\sin\theta_0}{2I_3\omega_3}\cos^2\varphi\right). \tag{21}$$

Por simetría, podemos tomar $\omega_3 > 0$, de manera el prefactor en la ecuación anterior es negativo. Habría que analizar qué forma tiene una función del tipo

$$f(x) = -\cos x + \frac{\alpha}{2}\cos^2 x. \tag{22}$$

Podemos restringir el análisis al intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Además, puesto que tomamos $\omega_3 > 0$ es $\alpha > 0$. Los puntos críticos de f satisfacen

$$f'(x) = (1-\alpha\cos x)\sin x = 0. \tag{23}$$

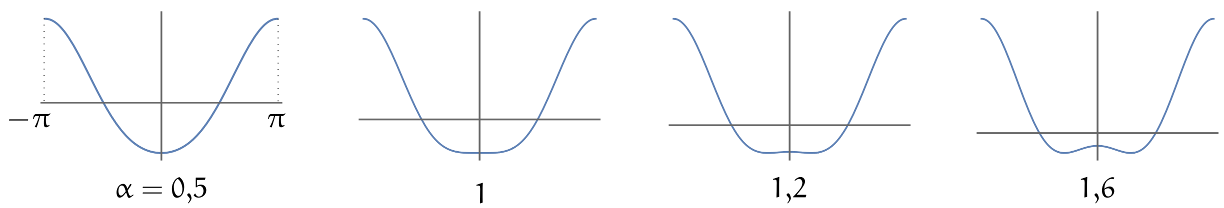
Siempre existen los puntos críticos, $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$. Allí la derivada segunda de f es

$$f''(x_1) = \cos x_1 - \alpha\cos 2x_1 = 1-\alpha, \qquad f''(x_2) = -1-\alpha. \tag{24}$$

Si α es menor que 1, estos son los únicos puntos críticos que existen. El punto $x = \pi$ es un máximo local y el punto $x = 0$ es un mínimo. Si $\alpha > 1$, además de estos puntos críticos existe un tercero, $x_1 < x_3 < \pi/2$, que satisface la ecuación

$$1 - \alpha\cos x_3 = 0. \tag{25}$$

En este caso, x_1 y x_2 son máximos locales. No hay mas alternativa que x_3 sea un mínimo. La figura muestra el cambio en la forma del potencial cuando se pasa de $\alpha < 1$ a $\alpha > 1$.



La conclusión es que el potencial tiene un mínimo en $\varphi = 0$ si

$$\alpha = \frac{I\omega_0 \sin\theta_0}{I_3\omega_3} < 1. \tag{26}$$

Para que el dispositivo tienda a alinearse con el eje norte–sur debe tener una velocidad de rotación

$$\omega_3 > \frac{I\omega_0 \sin\theta_0}{2I_3}. \tag{27}$$

Esta velocidad está medida respecto a los ejes fijos al espacio. Recordemos que $\omega_3 = \dot{\psi} + \omega_0 \sin\theta_0 \cos\varphi$. Aquí ω_0 es la velocidad de rotación de la Tierra, $\omega_0 \sim 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. Por lo tanto, a todos los fines prácticos $\omega_3 \approx \dot{\psi}$.

Suponiendo que el giróscopo forme un ángulo pequeño con la dirección norte–sur, el potencial viene dado por, salvo un término constante,

$$V \simeq \frac{1}{2} I_3\omega_3\omega_0 \sin\theta_0 \left(1 - \frac{I\omega_0 \sin\theta_0}{I_3\omega_3}\right) \varphi^2. \tag{28}$$

En general ω_3 será mucho mayor ω_0, con lo que el término entre paréntesis será aproximadamente igual a 1. La frecuencia de las oscilaciones alrededor de la dirección norte–sur será entonces

$$\Omega \simeq \sqrt{\frac{I_3}{I}\omega_3\omega_0 \sin\theta_0}. \tag{29}$$

Esto da una medida de la tendencia del giróscopo a permanecer alineado. Cuanto más grande sea Ω, más rápido regresará el giróscopo al mínimo de potencial. En aplicaciones prácticas habrá un mecanismo de amortiguación que evite que el giróscopo siga oscilando. Conocer la frecuencia de las oscilaciones permite averiguar la colatitud θ_0.