Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019 – Segundo parcial – 28/11

Problemas en hojas separadas, pasados en limpio, estilo *Comunicación rápida*. Pueden entregar borradores aparte. Hora de entrega: 13:30 hs estricta. Sólo consultas de interpretación.

1. (4 pts.) Una partícula de masa m se mueve en un potencial que, en coordenadas esféricas, se escribe como

$$U(r, \theta, \varphi) = V(r) + \frac{g(\theta)}{r^2}.$$

a) Escribir el hamiltoniano en coordenadas esféricas.

b) Mostrar que la ecuación de H–J es separable en coordenadas esféricas.

c) Encontrar una expresión integral para la función característica de Hamilton W. (Por simplicidad, al tomar raíces cuadradas, omitir el símbolo $\pm$).

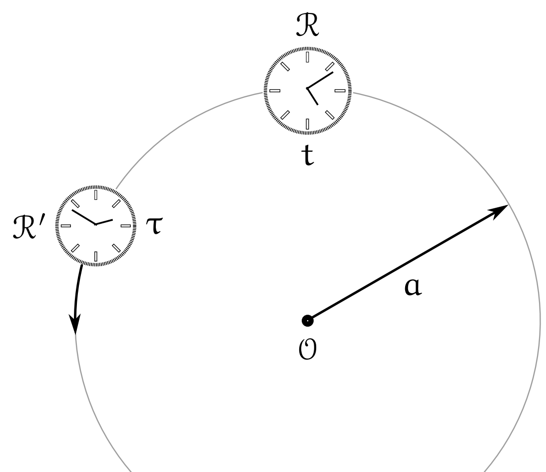
d) A partir de la función W escribir las expresiones que, de llevar a cabo las integrales, dan la solución de las ecuaciones de movimiento.

2. (2 pts.) Un reloj $\mathcal{R}$ está fijo en un sistema inercial $\mathcal{S}$ a una distancia a del origen. Este reloj marca el tiempo t del sistema $\mathcal{S}$. Un segundo reloj $\mathcal{R}'$ se mueve en una órbita circular de radio a y frecuencia angular ω, como muestra la figura. Este reloj marca su tiempo propio τ. En el instante inicial ambos relojes coinciden en el mismo punto del espacio y sus lecturas son $t = \tau = 0$.

a) ¿Cuál es la diferencia Δ_n entre las lecturas de los dos relojes al cumplirse el n–ésimo período de la órbita del reloj $\mathcal{R}'$, contando a partir de $t = 0$?

b) ¿Cuál es el tiempo $t_{\mathcal{R}}(\tau)$ que marca el reloj $\mathcal{R}$ $\mathfrak{visto}$ desde $\mathcal{R}'$ como función de τ? Graficar durante varios períodos de la órbita.

c) Dar una estimación del número de años necesarios para que en la Tierra transcurra un año menos respecto de un reloj fijo en un punto de su órbita.



Notación: $\beta = \omega a/c$, $T = 2\pi/\omega$, $t_0 = 2a/c$.

3. (4 pts.) Una partícula de masa m está fija al marco interno de un giróscopo mediante un semicírculo de radio a, como muestran las figuras. El marco externo rota alrededor del eje vertical. El marco interno rota alrededor del eje horizontal que pasa por los puntos que lo unen al marco externo. La peonza central puede rotar sobre su propio eje. El giróscopo tiene momentos de inercia respecto de su CM $I_1 = I_2 \equiv I$ e I_3 (los marcos tienen masa despreciable). **Vale la siguiente relación: $ma^2 = I$.** Hay gravedad.

   a) Escribir el lagrangiano. Encontrar al menos 3 constantes de movimiento.

   b) Formular un problema unidimensional para el ángulo de Euler θ. Considerar de ahora en más que las condiciones iniciales son tales que

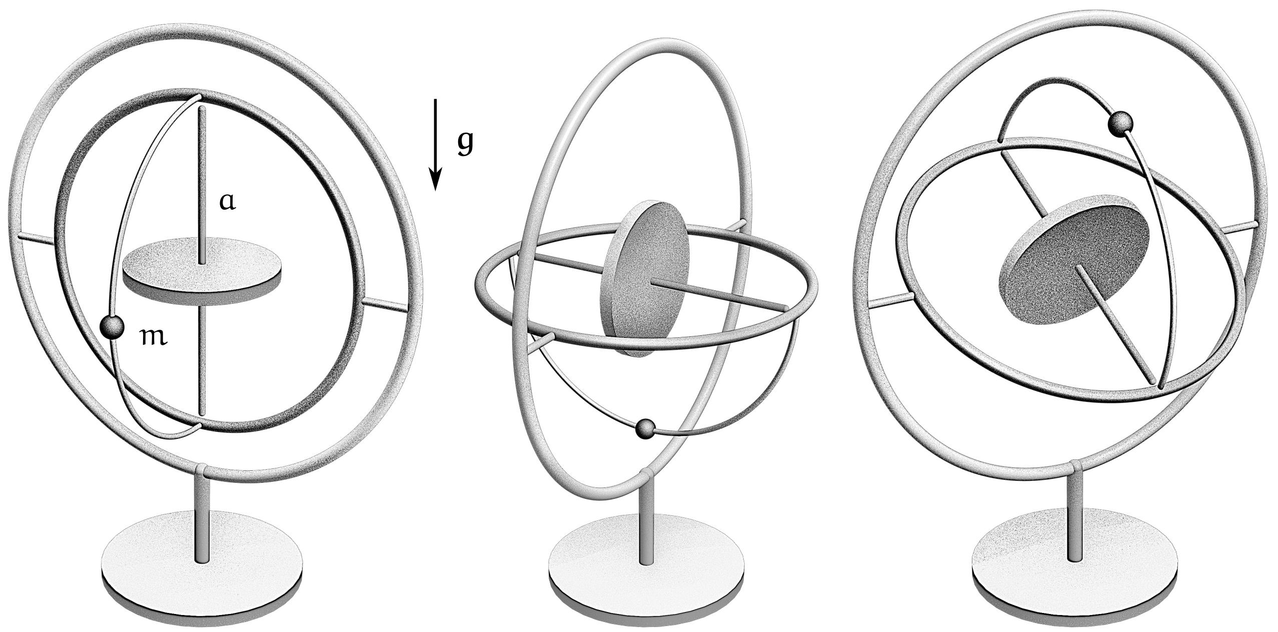
   $$\dot{\varphi}(0) = 0, \quad p_{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = \omega_3.$$

   c) Mostrar que $\theta = \pi/2$ es siempre un punto de equilibrio estable para el problema 1D.

   d) Mostrar que existe ω_0 tal que para $|\omega_3| > \omega_0$ hay otro punto de equilibrio estable θ_1. ¿Cuál es este punto de equilibrio y cuánto vale ω_0?

   e) Resolver el movimiento del sistema cuando θ realiza pequeñas oscilaciones alrededor de θ_1, con $\theta(0) = \theta_1 + \delta\theta_0$, donde $|\delta\theta_0| \ll 1$, y $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. (Es decir, dar expresiones para los tres ángulos de Euler como funciones del tiempo).

   f) En la misma aproximación, calcular $\hat{e}_3(t)$ y graficar la curva que describe su extremo.



$\theta = 0$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

Notación: $\omega_g = \sqrt{g/a}$, $\alpha = (I_3\omega_3/I\omega_g)^2$.

Se aprueba con un mínimo de 6 y con los problemas 1 y 3 con un mínimo del 60 % de su puntaje.