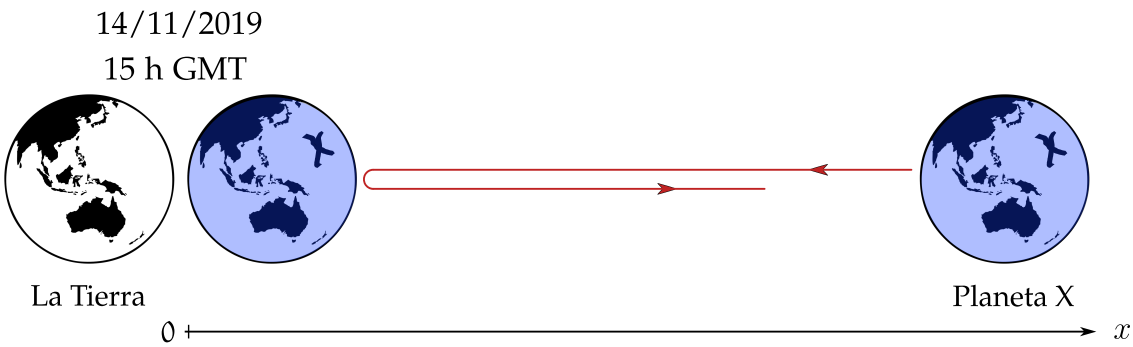
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 14/11 (extra): *Relatividad especial*[*]

Historia de dos planetas[†]

Consulten el link para ver el enunciado completo del problema. En estas notas está la solución del problema completo.

> En un espacio infinito y eterno hay dos planetas gemelos: la Tierra y el Planeta X. La Tierra está en reposo en un sistema inercial. En cambio, el Planeta X sigue un movimiento hiperbólico dirigido hacia la Tierra, con aceleración propia $g = 1\ \mathrm{m/s^2}$. A todos los efectos prácticos, la distancia de máximo acercamiento puede tomarse igual a cero; unas pocas décimas de segundos–luz bastarán para asegurar que los planetas no choquen. Las condiciones iniciales son tales que el máximo acercamiento entre la Tierra y su gemelo será justo hoy [14 de noviembre de 2019] a las 15 horas de Greenwich, según los relojes de ambos planetas. La figura siguiente describe el encuentro.



a) Mostrar que la trayectoria del Planeta X en el sistema de referencia inercial que tiene a la Tierra en su origen es

$$x(t) = l_0 \left[\sqrt{1 + (t/t_0)^2} - 1 \right].$$

con $t_0 = c/g$ y $l_0 = ct_0$, y $t = 0$ en el momento del encuentro.

b) Mostrar que el tiempo propio en el Planeta X, cuando los relojes de la Tierra marcan t, es

$$\tau(t) = t_0 \operatorname{arcsinh}(t/t_0)\,.$$

c) Calcular la trayectoria $x_{\,\mathrm{ap}}(t)$ del Planeta X según es vista desde la Tierra.

d) Calcular el tiempo $\tau_X(t)$ que marcan los relojes del Planeta X vistos desde la Tierra a tiempo t.

etc.

---

[*]zanellaj@df.uba.ar

[†]http://materias.df.uba.ar/mca2019c2/files/2019/11/planeta_X_2019.pdf

Trayectoria del Planeta X

Todo ocurre sobre el eje x. La información es que en $t = 0$ el Planeta X pasa por el origen de coordenadas y que la aceleración propia del Planeta X es constante e igual a $g > 0$. La aceleración propia de un objeto es la aceleración medida en un sistema de referencia en donde el objeto está instantáneamente en reposo. Que sea constante implica que, para un observador que se mueva con el objeto, el estado de cosas siempre es el mismo, tal como para nosotros aquí en el campo gravitatorio de la Tierra.

El dato es que la aceleración en el sistema propio del objeto es g. Para escribir una ecuación de movimiento en el sistema de la Tierra necesitamos la aceleración en el sistema de la Tierra. Tenemos que saber cómo transforma la aceleración. Supongamos que el sistema S' se mueve con velocidad v respecto del sistema S y que en S' una partícula tenga velocidad u' y aceleración a', todo según el eje x. Podemos relacionar las aceleraciones antitransformando directamente la expresión du/dt. Tenemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{u'+v}{1+u'v/c^2}\right)}{d\gamma(v)(t'+x'v/c^2)} = \frac{1}{\gamma(v)(1+u'v/c^2)}\left[\frac{1}{1+u'v/c^2} - \frac{(u'+v)v/c^2}{(1+u'v/c^2)^2}\right]\frac{du'}{dt'}. \tag{1}$$

Con unas simplificaciones queda

$$\frac{du}{dt} = \frac{a'}{\gamma(v)^3(1+u'v/c^2)^3}. \tag{2}$$

Si S' es el sistema en donde la partícula está instantáneamente en reposo, $u' = 0$ y $v = u$. En el sistema S la aceleración es entonces

$$\frac{du}{dt} = \frac{a'}{\gamma(u)^3}. \tag{3}$$

El dato es que $a' = g$ es constante. Ya hemos integrado esta ecuación otras veces:

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = gt. \tag{4}$$

Despejando $\dot{x} = u$, queda

$$\dot{x} = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt/c)^2}}. \tag{5}$$

Al tomar la raíz cuadrada se ha elegido el signo que produce un movimiento con aceleración positiva. La solución de esta ecuación diferencial es inmediata

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+(gt/c)^2} - 1\right]. \tag{6}$$

La trayectoria es una hipérbola. En esta ecuación hay dos parámetros dimensionales que definen las escalas típicas de tiempo y longitud. La escala de longitud es

$$l_0 = \frac{c^2}{g}, \tag{7}$$

y la de tiempo,

$$t_0 = \frac{c}{g}. \tag{8}$$

Lo más cómodo es adoptar estas escalas como unidades de longitud y tiempo. Con esta elección la ecuación de la trayectoria se escribe simplemente como

$$x(t) = \sqrt{1+t^2} - 1. \tag{9}$$

Además, en estas unidades, la velocidad de la luz es $c = 1$. Para la aceleración $g = 1\ m/s^2$ con la que se mueve el Planeta X, la escala de tiempo es

$$t_0 \approx 3 \times 10^8 s \approx 9{,}5 \text{ años}, \tag{10}$$

y la escala de longitud es, obviamente,

$$l_0 \approx 9{,}5 \text{ años luz}. \tag{11}$$

Estas son las escalas de tiempo y de distancia en las que el Planeta X, luego de su paso por la Tierra, alcanza velocidades relativistas. En efecto.

$$\dot{x}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7c. \tag{12}$$

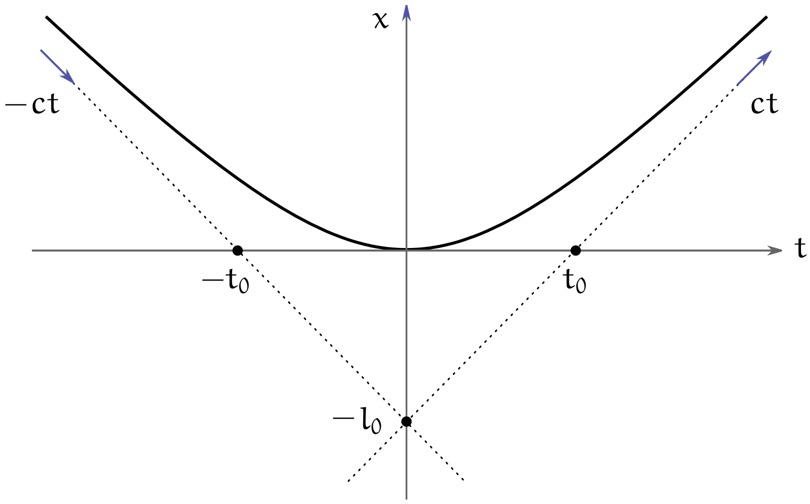
Para $|t| \ll 1$ (esto es, $|t| \ll t_0$) obtenemos la expresión no relativista de un movimiento uniformemente acelerado,

$$x(t) \simeq \frac{t^2}{2}. \tag{13}$$

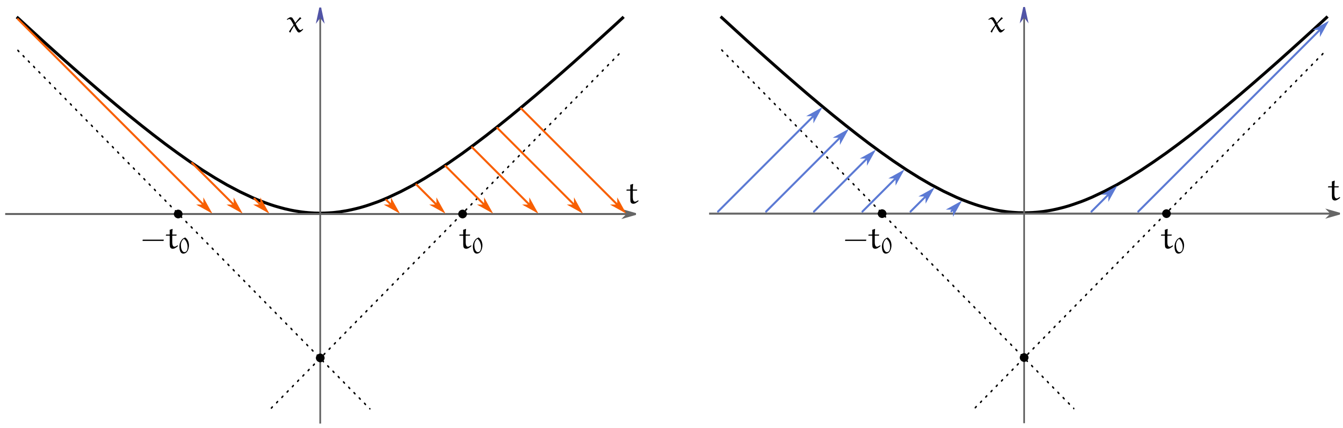
Para $|t| \gg 1$ (esto es, para $|t| \gg t_0$) obtenemos el límite ultrarrelativista

$$x(t) \simeq |t| - 1, \tag{14}$$

El gráfico de la trayectoria es como muestra la figura, en donde hemos restituido las escalas originales de tiempo y longitud.



La hipérbola es la trayectoria del Planeta X en el sistema de referencia de la Tierra. La trayectoria de la Tierra es el propio eje horizontal, $x = 0$. Todo el tiempo el Planeta X y la Tierra están emitiendo señales de luz que se propagan con velocidad c. En la siguiente figura se muestran las señales que emite cada planeta en la dirección del otro.



Es claro que la Tierra no recibe señales del Planeta X antes de $-t_0$, ni el Planeta X recibirá señales de la Tierra emitidas después de t_0. Aunque el Planeta X haya estado constantemente acercándose a la Tierra, en la Tierra recién se hace visible a tiempo $t = -t_0$, es decir, allá por el 15 de mayo de 2010 a las 16:19:02 horas GMT.

El tiempo propio en el Planeta X

El tiempo propio de una partícula (aquí el Planeta X) que se mueve con velocidad u satisface la siguiente ecuación

$$d\tau = dt/\gamma(u). \tag{15}$$

Para el movimiento que estamos considerando es

$$u(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{16}$$

lo que implica

$$\gamma(u) = \sqrt{1 + t^2}. \tag{17}$$

Entonces,

$$\tau(t) = \int_0^t dt \, \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = \operatorname{arcsinh} t. \tag{18}$$

El significado de esta ecuación es el siguiente: si a tiempo t un observador fijo en el sistema de referencia de la Tierra y que está a una distancia despreciable del Planeta X observa los relojes del Planeta X (por ejemplo, sintoniza una radio AM del Planeta X), entonces el tiempo que observa es $\tau(t)$.

La función arcsinh tiene un crecimiento extremadamente lento, de manera que para tiempos t mucho mayores que 1 (pero ni siquiera tanto) es $\tau(t) \ll t$. Este es el fenómeno de dilatación temporal. Por ejemplo, si el reloj del observador que está justo en la vecindad del Planeta X marca el tiempo $t = 10t_0 \approx 95$ años, los relojes del Planeta X marcan

$$\tau(1) = \operatorname{arcsinh} 10 \approx 3t_0 \approx 28 \text{ años}. \tag{19}$$

El observador en el sistema de la Tierra que registre el paso del Planeta X cuando en el Planeta X celebren la llegada del año 2100 verá que su reloj (por llamarlo de alguna manera) marca el tiempo

$$t = \sinh\left(\frac{2100 - \text{hoy}}{t_0}\right) \approx 2302{,}8 \; t_0 \approx 21891 \text{ años}. \tag{20}$$

Sumando este tiempo a la fecha de referencia, obtenemos que para el observador del sistema de referencia de la Tierra es el 17 de mayo del año 23896. Y esto no es nada. A esa altura el Planeta X está a una distancia de la Tierra de

$$x(2302{,}8 \; t_0) \approx 2301{,}8 \; l_0 \approx 21881 \text{ años luz}, \tag{21}$$

de manera que la Tierra recibe las noticias del año nuevo 2100 del Planeta X alrededor del año terrestre 45763, meses más, meses menos, teniendo en cuenta los años bisiestos (en ese lapso de tiempo hacen una diferencia de 30 años).

La posición aparente del Planeta X

Debido a la velocidad finita de propagación de la luz, ningún objeto en movimiento está necesariamente en la posición en la que lo estamos viendo. Si a tiempo t recibimos la imagen del Planeta X, o sus transmisiones de radio o de television, la luz que forma estas señales debió haber partido desde el Planeta X un tiempo lo suficientemente anterior como para alcanzar a la Tierra justo a tiempo t. Las señales deben recorrer la distancia que había entre el Planeta X y la Tierra en el momento de su emisión. Llamando t_{ap} al momento de emisión, debe cumplirse que

$$c(t - t_{ap}) = x(t_{ap}). \tag{22}$$

En decir, pasando a las unidades naturales del problema,

$$t - t_{ap} = \sqrt{1 + t_{ap}^2} - 1. \tag{23}$$

De aquí obtenemos t_{ap} como función de t,

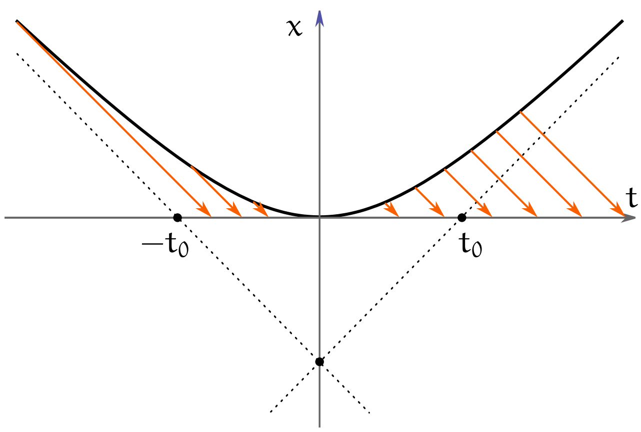
$$t_{ap}(t) = \frac{t+1}{2} - \frac{1}{2(t+1)}. \tag{24}$$

Estas señales que salieron del Planeta X a tiempo t_{ap} llevan la imagen de la situación del Planeta X en ese instante de tiempo. En particular, la posición observada del Planeta X a tiempo t es

$$x_{ap}(t) = x(t_{ap}) = t - t_{ap}(t) = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2(t+1)}. \tag{25}$$

Notar que para evaluar x_{ap} resultó mucho más sencillo calcular la distancia en términos del tiempo de viaje de la señal que evaluar directamente la función $x(t_{ap})$, ya que son lo mismo.

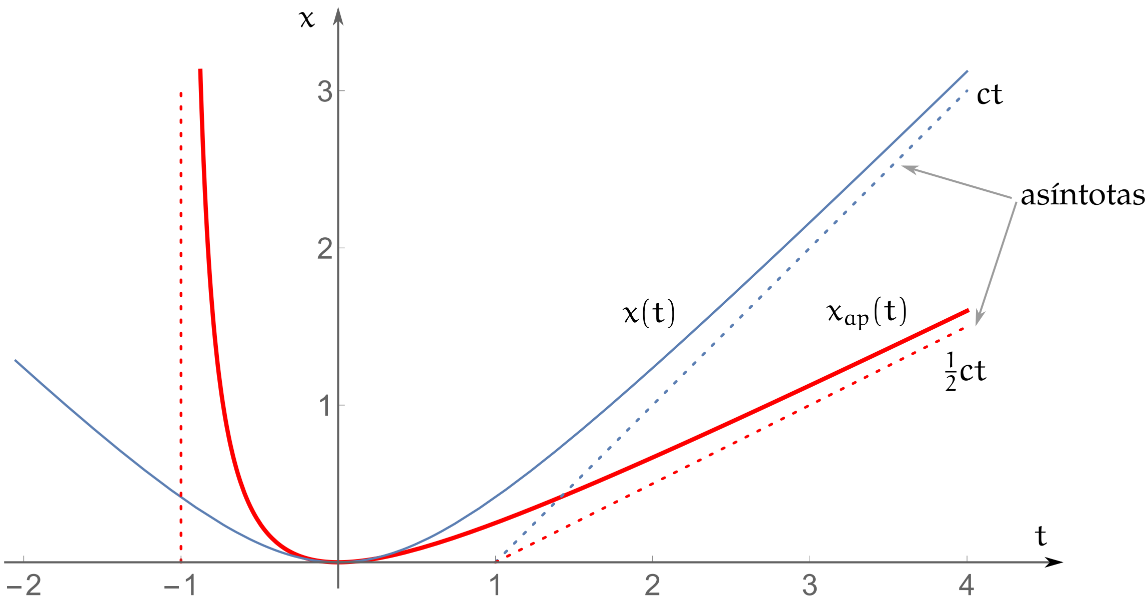
En la ec. (25) pasan cosas extrañas. La función x_{ap} diverge cuando $t \to -1$, es decir cuando $t \to -t_0$. Para tiempos próximos a $-t_0$ la imagen del Planeta X lo muestra arbitrariamente lejano. Este resultado tiene mucho sentido cuando se grafican las trayectorias de los rayos de luz emitidos por el Planeta X.



La hipérbola representa la línea de universo (vulgarmente, trayectoria) del Planeta X. El eje horizontal es la línea de universo de la Tierra. Desde la línea de universo del Planeta X parten señales de luz que intersectan en algún momento la línea de universo de la Tierra. Todas las señales de luz emitidas por el Planeta X entre $t \to -\infty$ y el tiempo en que pasa junto a la Tierra están condensadas en el intervalo de tiempo entre $-t_0$ y $t = 0$. Desde la Tierra, la imagen del Planeta X se moverá desde $x \to \infty$ para $t \to -t_0$ hasta $x = 0$ para $t = 0$. De ahí que la fórmula para $x_{ap}(t)$ diverja para $t \to -t_0$. También diverge la velocidad a la que se mueve la imagen del Planeta X. Por ejemplo, cuando $t \approx -0{,}55\ t_0$ la velocidad aparente es igual a 2c.

Cuando el Planeta X se aleja de la Tierra, el comportamiento de su posición aparente cambia por completo. Para tiempos mucho mayores que t_0, desde la Tierra ven que el Planeta X se aleja con una velocidad que tiende a $c/2$.

La trayectoria aparente del Planeta X es como muestra la figura. Se han graficado también la trayectoria real y algunas de las asíntotas. La posición actual está siempre a la izquierda de la posición aparente. La posición aparente no es una función simétrica respecto de $t = 0$.



El tiempo que marcan los relojes del Planeta X vistos desde la Tierra

Ya hemos calculado el tiempo que marcan los relojes del Planeta X en función del tiempo en el sistema de referencia fijo a la Tierra. Es decir: sabemos que a tiempo t, un observador del sistema de la Tierra en la vecindad del Planeta X verá que los relojes del Planeta X marcan el tiempo $\tau(t)$, dado por la ec. (18). La imagen que se recibe en la Tierra de los relojes del Planeta X (o bien la hora que dan las emisoras de televisión del Planeta X) es la que corresponde al tiempo t_{ap} en la que fueron emitidas, que a su vez corresponde al tiempo $\tau(t_{ap})$ del Planeta X. Dicho de una buena vez: la imagen que se recibe en la Tierra del Planeta X corresponde al tiempo propio del Planeta X evaluado en t_{ap},

$$\tau_X(t) = \tau(t_{ap}). \tag{26}$$

A partir de las ecs. (18) y (24) encontramos

$$\tau_X(t) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{t+1}{2} - \frac{1}{2(t+1)}\right). \tag{27}$$

Podemos intentar simplificar esto usando la definición de la función arcsinh,

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \tag{28}$$

No es necesario evaluar todos los términos. Sabemos que el tiempo aparente satisface la ecuación

$$1 + t_{ap}^2 = (1 + t - t_{ap})^2 . \tag{29}$$

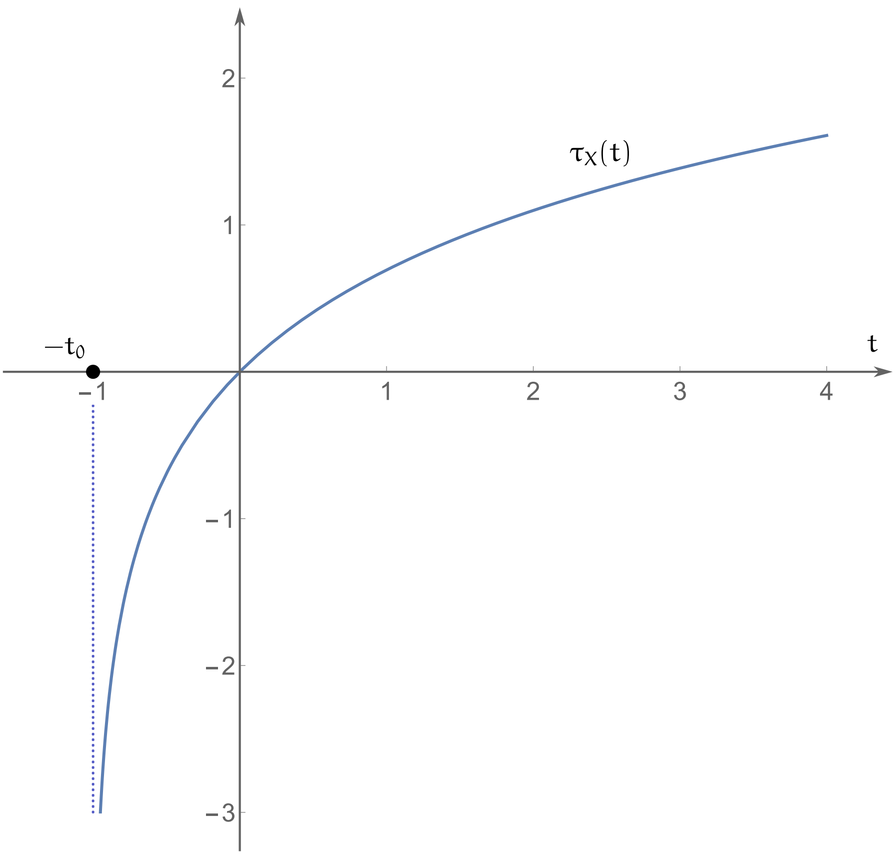
Luego,

$$\operatorname{arcsinh} t_{ap} = \log(t_{ap} + 1 + t - t_{ap}) = \log(1 + t). \tag{30}$$

En definitiva,

$$\tau_X(t) = \log(1 + t). \tag{31}$$

Encontramos nuevamente una divergencia cuando $t \to -t_0$. Eso corresponde al hecho de que toda la historia del Planeta X entre $\tau \to -\infty$ y $\tau = 0$ llega condensada a la Tierra entre $t = -t_0$ y $t = 0$. Este es el gráfico de la función $\tau_X(t)$:



El ritmo al que marchan los relojes del Planeta X observados desde la Tierra

Desde la Tierra ven que los relojes del Planeta X marchan a un ritmo

$$\dot{\tau}_X(t) = \frac{1}{1 + t}. \tag{32}$$

Por definición los relojes de la Tierra marchan a velocidad igual a 1. La fórmula anterior debe leerse así: por cada segundo que pasa en los relojes de la Tierra, la imagen de los relojes del

Planeta X muestra que estos marcan $\dot{\tau}_X(t)$ segundos. Sólo para tiempos en valor absoluto mucho menores que t_0 la marcha observada en los relojes del Planeta X estará pareja con la de los relojes de la Tierra.

Podemos preguntarnos, por ejemplo, en qué momento vemos pasar los días del Planeta X a uno por segundo. Debe ser

$$\dot{\tau}_X(t) = 86400. \tag{33}$$

Haciendo las cuentas se encuentra que eso sucede en $t \approx -0{,}999988 t_0$. Aquí es importante trabajar con mucha precisión, porque todo el infinito pasado el Planeta X está comprimido en un intervalo de longitud t_0 de la Tierra. Una diez milésima de t_0 puede hacer una diferencia de varios años. La fecha en la Tierra que corresponde a ese tiempo es el 15 de mayo de 2010 a las 17:16:51 horas GMT, esto es, unos 58 minutos después de aparecer en el cielo de la Tierra. ¿Qué época de la historia del Planeta X es la que se observa desde la Tierra en ese momento? Según la ec. (31), es (cálculo de fechas mediante) 20 de noviembre de 1911. Otro cálculo muestra que el 20 de noviembre de 1912 (un año después en el Planeta X) es observado en la Tierra a las 17:23:17 del día de la aparición del Planeta X. Un año completo del Planeta X es visto desde la Tierra en un intervalo de tiempo de unos 6 minutos. (Hay alrededor de 360 días en un año, a un día por segundo, da 6 minutos. Este resultado muestra que la aceleración en la marcha de los relojes ya es mucho más lenta).

Para que los sucesos del Planeta X sean vistos desarrollarse al doble de la velocidad con la que ocurrieron debe ser, según la ec. (32), $t = -t_0/2$, que cae el 13 de febrero de 2015, lo que corresponde, en la historia del Planeta X, a la fecha

$$\tau_X(-\tfrac{1}{2}) = -\log 2 \approx 0{,}69\ t_0, \tag{34}$$

que cae el 14 de abril de 2013 del Planeta X.

Cuando el Planeta X se acerca a la Tierra vemos que sus relojes marchan a un ritmo mayor al de los relojes en la Tierra. Y, al contrario, cuando se aleja de la Tierra vemos que sus relojes marchan a un ritmo más lento que los de la Tierra. ¿Pero esto no debería ocurrir siempre, tanto al alejarse como al acercarse? ¿Por qué no hay dilatación temporal mientras los relojes se acercan? La pregunta es capciosa: sí hay dilatación temporal, lo que ocurre es que no estamos calculando la velocidad $\dot{\tau}(t)$ del tiempo que marcan los relojes del Planeta X en el sistema de la Tierra sino la velocidad $\dot{\tau}_X(t)$ del tiempo que marcan las imágenes de los relojes del Planeta X vistos en la Tierra.

Para medir el ritmo de los relojes del Planeta X necesitamos que un observador del sistema de la Tierra esté justo en el lugar donde se encuentra el Planeta X. Entonces sí, el ritmo al que marchan los relojes del Planeta X es, según la ec. (18)

$$\dot{\tau}(t) = \frac{1}{\gamma(u)}. \tag{35}$$

Lo que se ve desde la Tierra no tiene en principio que ver con la dilatación temporal, sino con el efecto Doppler ordinario. La dilatación temporal modifica las fórmulas pero no es la causa intrínseca del fenómeno. Cuando el Planeta X se acerca, la frecuencia de todas sus señales (incluidos los tic tac de sus relojes) está incrementada por el efecto Doppler. Este efecto compensa y sobrepasa el de la dilatación temporal.

Cuando el Planeta X se aleja, el efecto Doppler disminuye la frecuencia de sus señales. Esto se amplifica debido a la dilatación temporal. Para tiempos mucho mayores que t_0 los relojes del Planeta X parecen marchar cada vez más y más lento (sin embargo apenas poco más lento que el factor $1/\gamma$ de dilatación temporal: ¿por qué no mucho más lento? Si la velocidad del Planeta X tiende a c ¿no debería tender rápidamente la frecuencia a cero?). Cuando $t = t_0$, vemos marchar a los relojes de Planeta X a la mitad de la velocidad.

El tiempo que marcan los relojes de la Tierra vistos desde Planeta X

Sólo las señales cuyos tiempos de emisión sean anteriores a t_0 pueden llegar desde la Tierra hasta el Planeta X. Si una señal de luz de la Tierra llega al Planeta X a tiempo t debió haber recorrido toda la distancia que hay entre la Tierra y el Planeta X en ese momento. Por lo tanto, tiene que haber sido emitida en un tiempo t_T dado por

$$c(t - t_T) = x(t). \tag{36}$$

En unidades naturales queda

$$t - t_T = \sqrt{1 + t^2} - 1, \tag{37}$$

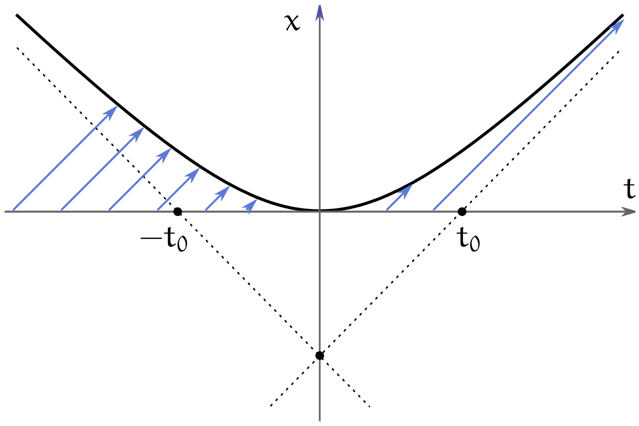
lo que implica

$$t_T = 1 + t - \sqrt{1 + t^2}. \tag{38}$$

Queremos expresar t_T no en términos de t sino en términos del tiempo propio del Planeta X cuando la señal es recibida. Ese tiempo está dado por la ec. (18). Resulta así

$$t_T(\tau) = 1 + \sinh\tau - \cosh\tau = 1 - e^{-\tau}. \tag{39}$$

Luego de la invención de la televisión en el Planeta X, esta será la hora que muestren las pantallas de televisión del Planeta X que sintonicen a los canales de la Tierra. Esta función tiene características que son evidentes cuando se grafican las líneas de universo de los planetas y de las señales de luz emitidas desde la Tierra.



Desde el Planeta X no pueden recibirse señales emitidas con posterioridad a t_0. Por eso cuando τ tiende a infinito t_T tiende a 1, es decir, a t_0.

El ritmo al que marcha la historia de la Tierra vista desde el Planeta X es

$$t_T'(\tau) = e^{-\tau}. \tag{40}$$

No diverge para ningún tiempo τ finito, aunque puede ser arbitrariamente grande antes del encuentro con la Tierra. Luego de transcurridos unos pocos t_0 en el Planeta X, la imagen de la Tierra queda prácticamente congelada en $t \approx t_0$. En otras palabras, en el Planeta X no podrán ver lo que suceda en la Tierra más allá del 15 de mayo de 2029.

A modo de comparación con el resultado obtenido para los habitantes de la Tierra, veamos en qué momento del Planeta X los relojes de la Tierra parecen marchar al doble del ritmo. La ecuación anterior da

$$\tau = -\log 2. \tag{41}$$

Este es un resultado interesante, porque la ec. (34) indica que este es el momento en la historia del Planeta X en que sus relojes son vistos desde la Tierra marchando al doble del ritmo. En cambio, los relojes de la Tierra son vistos marchar al doble del ritmo cuando marcaban el tiempo

$$t_T(-\log 2) = -1. \tag{42}$$

En ese momento los relojes del Planeta X eran vistos desde la Tierra marchando a un ritmo infinito. La simetría era sólo aparente.

El ritmo de los relojes en el Planeta X vistos desde la Tierra cuando en el Planeta X observan a los relojes de la Tierra marchar a un ritmo r, y viceversa.

Llamemos t_r al momento en el que en la Tierra los relojes del Planeta X parecen ir a un ritmo r. Análogamente, sea τ_r el tiempo en el que los relojes de la Tierra parecen marchar a ritmo r vistos desde el Planeta X. A partir de las ecs. (32) y (40), que repetimos a aquí abajo

$$\dot{\tau}_X(t) = \frac{1}{1+t}, \tag{43}$$

$$t_T'(\tau) = e^{-\tau}, \tag{44}$$

igualando a r estas derivadas, esos tiempos son

$$t_r = \frac{1}{r} - 1, \tag{45}$$

$$\tau_r = -\log r. \tag{46}$$

En t_r los relojes del Planeta X eran vistos marcando el tiempo

$$\tau_X(t_r) = \log(1+t_r) = -\log r, \tag{47}$$

y en τ_r los relojes de la Tierra eran vistos marcando el tiempo

$$t_T(\tau_r) = 1 - e^{-\tau_r} = 1 - r. \tag{48}$$

El ritmo con el que los relojes de la Tierra son observados en $\tau_X(t_r)$ es

$$r_T(r) = t_T'(-\log r) = r. \tag{49}$$

El ritmo con el que los relojes del Planeta X son observados en $t_T(\tau_r)$ es

$$r_X(r) = \dot{\tau}_X(1-r) = \frac{1}{2-r} \tag{50}$$

La ec. (49) es desconcertante. Si en la Tierra ven a los relojes del Planeta X marcar un tiempo τ y marchar a un ritmo r, en el Planeta X a tiempo τ ven marchar a los relojes de la Tierra al mismo ritmo r. Pero si en el Planeta X ven marchar a los relojes de la Tierra a ritmo r cuando marcan un tiempo t, en ese tiempo t en la Tierra ven a los relojes del Planeta X ir a un ritmo $1/(2-r)$.

Llegada del hombre a la Luna

Suponiendo que las historias de los dos planetas tengan el mismo decurso, la llegada del hombre a la Luna ocurrirá a las 20:18:04 horas GMT del 24 de julio de 1969. La pregunta es cuándo ven los habitantes de la Tierra el alunizaje en la Luna X y viceversa. Ya vimos que las cosas no son para nada simétricas. La diferencia entre la fecha del encuentro y la fecha del alunizaje es

$$T_L = -5{,}295\, t_0. \tag{51}$$

Debemos invertir la ec. (31) para saber cuál es el tiempo t en el que en la Tierra se observa algo que sucede en el tiempo τ del Planeta X.

$$t_{rec}(\tau) = e^{\tau} - 1. \tag{52}$$

Análogamente, hay que invertir la ec. (39) para averiguar en que tiempo τ del Planeta X se recibe una señal emitida en el tiempo t de la Tierra,

$$\tau_{rec}(t) = -\log(1-t). \tag{53}$$

El alunizaje X es sintonizado en los televisores de la Tierra a tiempo

$$t_{rec}(T_L), \tag{54}$$

y el alunizaje terrestre es visto por los habitantes del Planeta X a tiempo

$$\tau_{rec}(T_L). \tag{55}$$

Haciendo las cuentas, el alunizaje en la Luna X es visto en la Tierra el 2 de junio de 2010. En cambio, el alunizaje en la Luna terrestre es visto en el Planeta X el día 23 de mayo de 2002. Notar que los planetas no pueden sacar una ventaja tecnológica de estos hechos, puesto que para esas fechas ya se han producido sus respectivos alunizajes. En verdad puede demostrarse que para los dos planetas es $T < t_{rec}(T)$ y $T < \tau_{rec}(T)$. De modo que un planeta nunca observa en el otro un suceso que pertenezca a su futuro: en otras palabras, no pueden hacer trampa con las apuestas deportivas.

Pueden verificar que, durante la etapa de acercamiento, en el Planeta X registran los sucesos de la Tierra en fechas anteriores a las que los sucesos gemelos del Planeta X son registrados en la Tierra. Durante el acercamiento, los habitantes del Planeta X se enteran de las cosas que pasan en la Tierra antes de que los habitantes de la Tierra se enteren de las cosas que pasan en el Planeta X. El orden se invierte luego de que el Planeta X empieza a alejarse.

La llegada de las primeras transmisiones de radio

En los dos planetas la primera transmisión de radio se produce a las cero horas del primero de enero de 1900. Respecto a la fecha de referencia (14/11/2019, 15 h GMT), eso corresponde el tiempo propio de cada planeta

$$T_R = -12{,}618\, t_0. \tag{56}$$

Aplicando las fórmulas se la sección anterior, ecs. (52) y (53), y calculando las fechas calendario, las primeras transmisiones de radio hechas en el Planeta X alcanzan a la Tierra el 15 de mayo de 2010 a las 19:35:35, unas tres horas y media después de que el Planeta X se hace visible. Por otro lado, las primeras transmisiones de radio hechas en la Tierra alcanzan al Planeta X el 23 de enero de 1995.

Para estas fechas en los dos planetas ya están en marcha los respectivos proyectos SETI de búsqueda de vida extraterrestre. Podemos asumir que la llegada de las señales de radio a cada planeta marca la fecha del descubrimiento del planeta gemelo. Los habitantes del Planeta X nos descubren en 1995. Nosotros ignoramos su existencia hasta bien entrado el año 2010.

La guerra de los mundos

En un escenario, apenas producidos los descubrimientos, el planeta descubridor lanza un ataque con rayos láser contra el planeta gemelo. Debemos preguntarnos cuándo alcanzan estas señales al planeta atacado. En otras palabras, a qué tiempo propio de la Tierra llegan las señales emitidas por el Planeta X el día 23 de enero de 1995 de su propio calendario, y a la inversa, en qué fecha del Planeta X llegan las señales emitidas por la Tierra el día 15 de mayo terrestre.

Tenemos que aplicar las mismas fórmulas que antes, sólo que a tiempos distintos para cada planeta,

$$t_{\skull} = t_{rec}\big(\tau_{rec}(T_R)\big) = \frac{T_R}{1 - T_R}, \tag{57}$$

$$\tau_{\skull} = \tau_{rec}\big(t_{rec}(T_R)\big) = -2\log\big(2 - e^{T_R}\big)\,. \tag{58}$$

El cálculo de las fechas da que en la Tierra el ataque llega el 25 de enero de 2011, mientras que en el Planeta X se produce el 14 de abril de 2013. Cada planeta puede predecir estas fechas, de modo que saben de cuánto tiempo disponen para preparar sus defensas. El Planeta X tiene cerca de 18 años para prepararse, desde 1995 hasta 2013. En la Tierra el intervalo entre el descubrimiento del Planeta X y la llegada de sus rayos láser es de tan sólo 8 meses y 10 días.