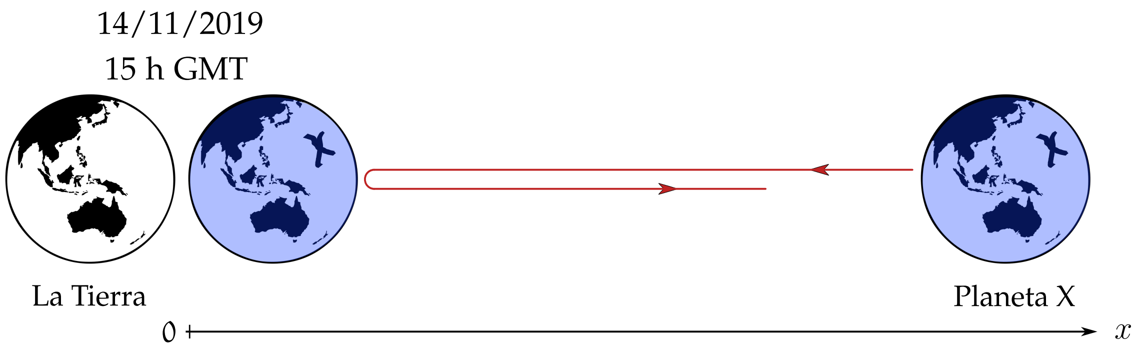
Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019

Clase del 14/11: *Relatividad especial**

Historia de dos planetas†

Consulten el link para ver el enunciado completo del problema. En estas notas sólo está resuelto lo que llegamos a ver en clase.

> En un espacio infinito y eterno hay dos planetas gemelos: la Tierra y el Planeta X. La Tierra está en reposo en un sistema inercial. En cambio, el Planeta X sigue un movimiento hiperbólico dirigido hacia la Tierra, con aceleración propia $g = 1\ \mathrm{m/s^2}$. A todos los efectos prácticos, la distancia de máximo acercamiento puede tomarse igual a cero; unas pocas décimas de segundos–luz bastarán para asegurar que los planetas no choquen. Las condiciones iniciales son tales que el máximo acercamiento entre la Tierra y su gemelo será justo hoy [14 de noviembre de 2019] a las 15 horas de Greenwich, según los relojes de ambos planetas. La figura siguiente describe el encuentro.



a) Mostrar que la trayectoria del Planeta X en el sistema de referencia inercial que tiene a la Tierra en su origen es

$$x(t) = l_0 \left[\sqrt{1 + (t/t_0)^2} - 1 \right].$$

con $t_0 = c/g$ y $l_0 = ct_0$, y $t = 0$ en el momento del encuentro.

b) Mostrar que el tiempo propio en el Planeta X, cuando los relojes de la Tierra marcan t, es

$$\tau(t) = t_0 \operatorname{arcsinh}(t/t_0)\,.$$

c) Calcular la trayectoria $x_{\,\mathrm{ap}}(t)$ del Planeta X según es vista desde la Tierra.

d) Calcular el tiempo $\tau_X(t)$ que marcan los relojes del Planeta X vistos desde la Tierra a tiempo t.

etc.

---

*zanellaj@df.uba.ar

†http://materias.df.uba.ar/mca2019c2/files/2019/11/planeta_X_2019.pdf

Trayectoria del Planeta X

Todo ocurre sobre el eje x. La información es que en $t = 0$ el Planeta X pasa por el origen de coordenadas y que la aceleración propia del Planeta X es constante e igual a $g > 0$. La aceleración propia de un objeto es la aceleración medida en un sistema de referencia en donde el objeto está instantáneamente en reposo. Que sea constante implica que, para un observador que se mueva con el objeto, el estado de cosas siempre es el mismo, tal como para nosotros aquí en el campo gravitatorio de la Tierra.

El dato es que la aceleración en el sistema propio del objeto es g. Para escribir una ecuación de movimiento en el sistema de la Tierra necesitamos la aceleración en el sistema de la Tierra. Tenemos que saber cómo transforma la aceleración. Supongamos que el sistema S' se mueve con velocidad v respecto del sistema S y que en S' una partícula tenga velocidad u' y aceleración a', todo según el eje x. Podemos relacionar las aceleraciones antitransformando directamente la expresión du/dt. Tenemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{u'+v}{1+u'v/c^2}\right)}{d\gamma(v)(t'+x'v/c^2)} = \frac{1}{\gamma(v)(1+u'v/c^2)}\left[\frac{1}{1+u'v/c^2} - \frac{(u'+v)v/c^2}{(1+u'v/c^2)^2}\right]\frac{du'}{dt'}. \tag{1}$$

Con unas simplificaciones queda

$$\frac{du}{dt} = \frac{a'}{\gamma(v)^3(1+u'v/c^2)^3}. \tag{2}$$

Si S' es el sistema en donde la partícula está instantáneamente en reposo, $u' = 0$ y $v = u$. En el sistema S la aceleración es entonces

$$\frac{du}{dt} = \frac{a'}{\gamma(u)^3}. \tag{3}$$

El dato es que $a' = g$ es constante. Ya hemos integrado esta ecuación otras veces:

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = gt. \tag{4}$$

Despejando $\dot{x} = u$, queda

$$\dot{x} = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt/c)^2}}. \tag{5}$$

Al tomar la raíz cuadrada se ha elegido el signo que produce un movimiento con aceleración positiva. La solución de esta ecuación diferencial es inmediata

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+(gt/c)^2} - 1\right]. \tag{6}$$

La trayectoria es una hipérbola. En esta ecuación hay dos parámetros dimensionales que definen las escalas típicas de tiempo y longitud. La escala de longitud es

$$l_0 = \frac{c^2}{g}, \tag{7}$$

y la de tiempo,

$$t_0 = \frac{c}{g}. \tag{8}$$

Lo más cómodo es adoptar estas escalas como unidades de longitud y tiempo. Con esta elección la ecuación de la trayectoria se escribe simplemente como

$$x(t) = \sqrt{1 + t^2} - 1. \tag{9}$$

Además, en estas unidades, la velocidad de la luz es $c = 1$. Para la aceleración $g = 1\ m/s^2$ con la que se mueve el Planeta X, la escala de tiempo es

$$t_0 \approx 3 \times 10^8 s \approx 9{,}5 \text{ años}, \tag{10}$$

y la escala de longitud es, obviamente,

$$l_0 \approx 9{,}5 \text{ años luz}. \tag{11}$$

Estas son las escalas de tiempo y de distancia en las que el Planeta X, luego de su paso por la Tierra, alcanza velocidades relativistas. En efecto.

$$\dot{x}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7c. \tag{12}$$

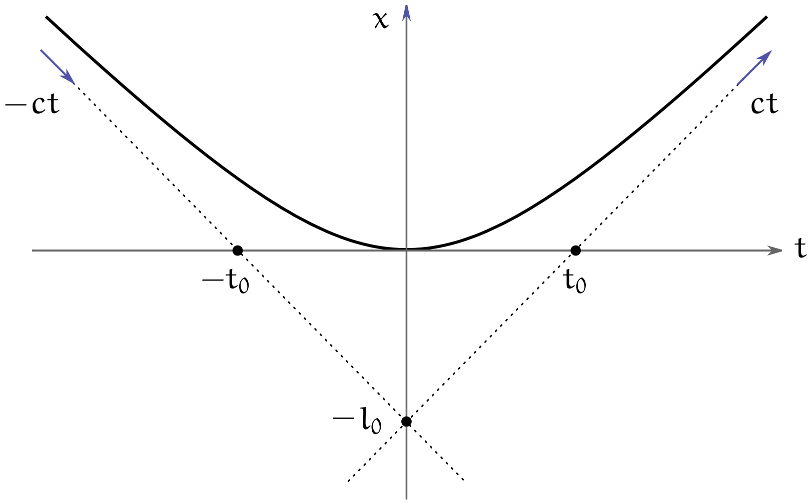
Para $|t| \ll 1$ (esto es, $|t| \ll t_0$) obtenemos la expresión no relativista de un movimiento uniformemente acelerado,

$$x(t) \simeq \frac{t^2}{2}. \tag{13}$$

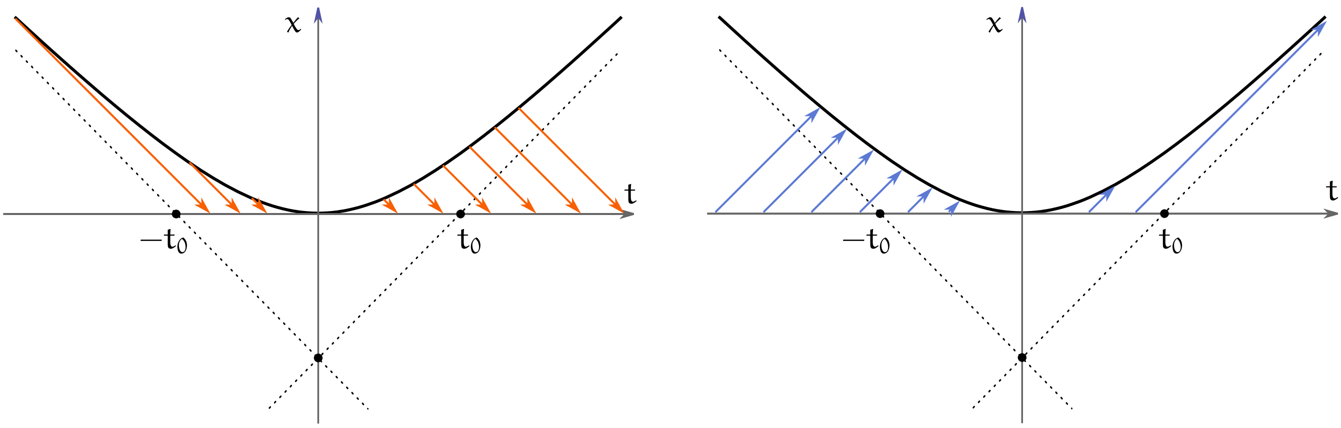
Para $|t| \gg 1$ (esto es, para $|t| \gg t_0$) obtenemos el límite ultrarrelativista

$$x(t) \simeq |t| - 1. \tag{14}$$

El gráfico de la trayectoria es como muestra la figura, en donde hemos restituido las escalas originales de tiempo y longitud.



La hipérbola es la trayectoria del Planeta X en el sistema de referencia de la Tierra. La trayectoria de la Tierra es el propio eje horizontal, $x = 0$. Todo el tiempo el Planeta X y la Tierra están emitiendo señales de luz que se propagan con velocidad c. En la siguiente figura se muestran las señales que emite cada planeta en la dirección del otro.



Es claro que la Tierra no recibe señales del Planeta X antes de $-t_0$, ni el Planeta X recibirá señales de la Tierra emitidas después de t_0. Aunque el Planeta X haya estado constantemente acercándose a la Tierra, en la Tierra recién se hace visible a tiempo $t = -t_0$, es decir, allá por el 15 de mayo de 2010 a las 16:19:02 horas GMT.

El tiempo propio en el Planeta X

El tiempo propio de una partícula (aquí el Planeta X) que se mueve con velocidad u satisface la siguiente ecuación

$$d\tau = dt/\gamma(u). \tag{15}$$

Para el movimiento que estamos considerando es

$$u(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{16}$$

lo que implica

$$\gamma(u) = \sqrt{1+t^2}. \tag{17}$$

Entonces,

$$\tau(t) = \int_0^t dt \, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{arcsinh} t. \tag{18}$$

El significado de esta ecuación es el siguiente: si a tiempo t un observador fijo en el sistema de referencia de la Tierra y que está a una distancia despreciable del Planeta X observa los relojes del Planeta X (por ejemplo, sintoniza una radio AM del Planeta X), entonces el tiempo que observa es $\tau(t)$.

La función arcsinh tiene un crecimiento extremadamente lento, de manera que para tiempos t mucho mayores que 1 (pero ni siquiera tanto) es $\tau(t) \ll t$. Este es el fenómeno de dilatación temporal. Por ejemplo, si el reloj del observador que está justo en la vecindad del Planeta X marca el tiempo $t = 10t_0 \approx 95$ años, los relojes del Planeta X marcan

$$\tau(10) = \operatorname{arcsinh} 10 \approx 3t_0 \approx 28 \text{ años}. \tag{19}$$

El observador en el sistema de la Tierra que registre el paso del Planeta X cuando en el Planeta X celebren la llegada del año 2100 verá que su reloj (por llamarlo de alguna manera) marca el tiempo

$$t = \sinh\left(\frac{2100 - \text{hoy}}{t_0}\right) \approx 2302{,}8\; t_0 \approx 21891 \text{ años}. \tag{20}$$

Sumando este tiempo a la fecha de referencia, obtenemos que para el observador del sistema de referencia de la Tierra es el 17 de mayo del año 23896. Y esto no es nada. A esa altura el Planeta X está a una distancia de la Tierra de

$$x(2302{,}8\; t_0) \approx 2301{,}8\; l_0 \approx 21881 \text{ años luz}, \tag{21}$$

de manera que la Tierra recibe las noticias del año nuevo 2100 del Planeta X alrededor del año terrestre 45763, meses más, meses menos, teniendo en cuenta los años bisiestos (en ese lapso de tiempo hacen una diferencia de 30 años).

La posición aparente del Planeta X

Debido a la velocidad finita de propagación de la luz, ningún objeto en movimiento está necesariamente en la posición en la que lo estamos viendo. Si a tiempo t recibimos la imagen del Planeta X, o sus transmisiones de radio o de television, la luz que forma estas señales debió haber partido desde el Planeta X un tiempo lo suficientemente anterior como para alcanzar a la Tierra justo a tiempo t. Las señales deben recorrer la distancia que había entre el Planeta X y la Tierra en el momento de su emisión. Llamando t_{ap} al momento de emisión, debe cumplirse que

$$c(t - t_{ap}) = x(t_{ap}). \tag{22}$$

En decir, pasando a las unidades naturales del problema,

$$t - t_{ap} = \sqrt{1 + t_{ap}^2} - 1. \tag{23}$$

De aquí obtenemos t_{ap} como función de t,

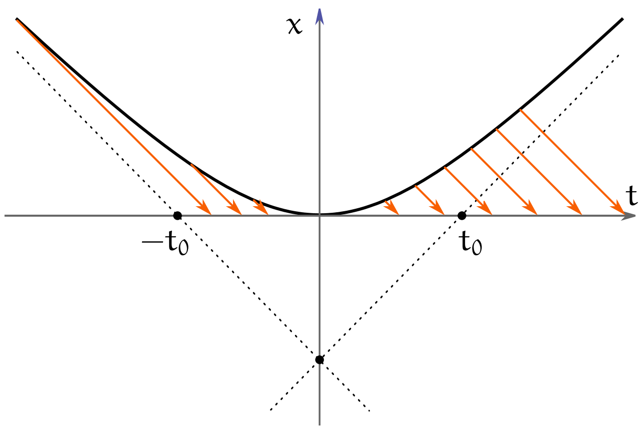
$$t_{ap}(t) = \frac{t+1}{2} - \frac{1}{2(t+1)}. \tag{24}$$

Estas señales que salieron del Planeta X a tiempo t_{ap} llevan la imagen de la situación del Planeta X en ese instante de tiempo. En particular, la posición observada del Planeta X a tiempo t es

$$x_{ap}(t) = x(t_{ap}) = t - t_{ap}(t) = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2(t+1)}. \tag{25}$$

Notar que para evaluar x_{ap} resultó mucho más sencillo calcular la distancia en términos del tiempo de viaje de la señal que evaluar directamente la función $x(t_{ap})$, ya que son lo mismo.

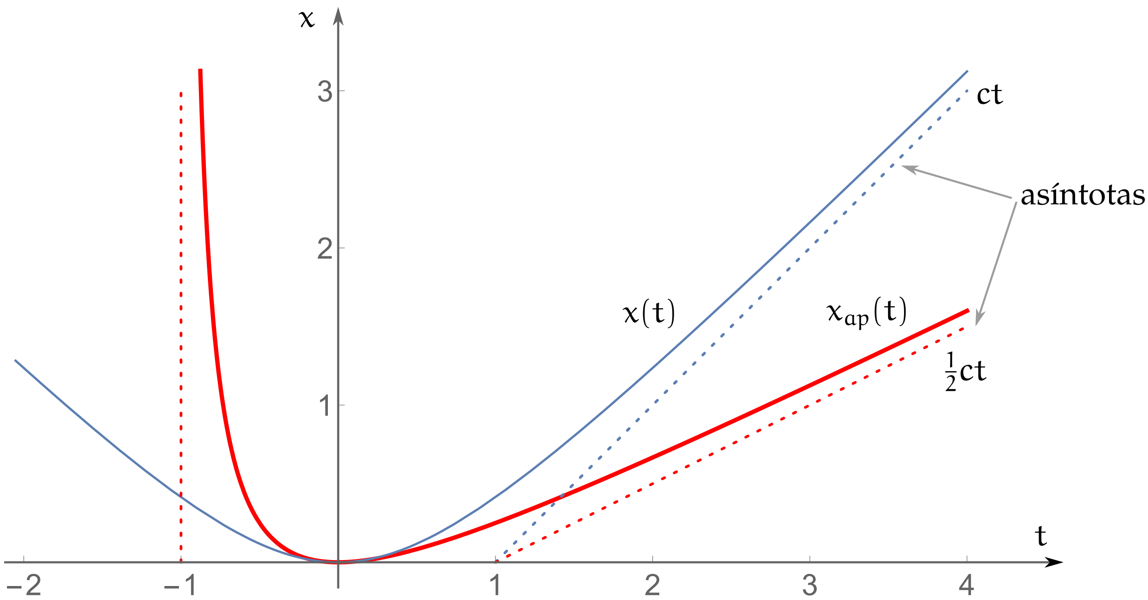
En la ec. (25) pasan cosas extrañas. La función x_{ap} diverge cuando $t \to -1$, es decir cuando $t \to -t_0$. Para tiempos próximos a $-t_0$ la imagen del Planeta X lo muestra arbitrariamente lejano. Este resultado tiene mucho sentido cuando se grafican las trayectorias de los rayos de luz emitidos por el Planeta X.



La hipérbola representa la línea de universo (vulgarmente, trayectoria) del Planeta X. El eje horizontal es la línea de universo de la Tierra. Desde la línea de universo del Planeta X parten señales de luz que intersectan en algún momento la línea de universo de la Tierra. Todas las señales de luz emitidas por el Planeta X entre $t \to -\infty$ y el tiempo en que pasa junto a la Tierra están condensadas en el intervalo de tiempo entre $-t_0$ y $t = 0$. Desde la Tierra, la imagen del Planeta X se moverá desde $x \to \infty$ para $t \to -t_0$ hasta $x = 0$ para $t = 0$. De ahí que la fórmula para $x_{ap}(t)$ diverja para $t \to -t_0$. También diverge la velocidad a la que se mueve la imagen del Planeta X. Por ejemplo, cuando $t \approx -0{,}55\ t_0$ la velocidad aparente es igual a $2c$.

Cuando el Planeta X se aleja de la Tierra, el comportamiento de su posición aparente cambia por completo. Para tiempos mucho mayores que t_0, desde la Tierra ven que el Planeta X se aleja con una velocidad que tiende a $c/2$.

La trayectoria aparente del Planeta X es como muestra la figura. Se han graficado también la trayectoria real y algunas de las asíntotas. La posición real está siempre a la izquierda de la posición aparente. La posición aparente no es una función simétrica respecto de $t = 0$.



El tiempo que marcan los relojes del Planeta X vistos desde la Tierra

Ya hemos calculado el tiempo que marcan los relojes del Planeta X en función del tiempo en el sistema de referencia fijo a la Tierra. Es decir: sabemos que a tiempo t, un observador del sistema de la Tierra en la vecindad del Planeta X verá que los relojes del Planeta X marcan el tiempo $\tau(t)$, dado por la ec. (18). La imagen que se recibe en la Tierra de los relojes del Planeta X (o bien la hora que dan las emisoras de televisión del Planeta X) es la que corresponde al tiempo t_{ap} en la que fueron emitidas, que a su vez corresponde al tiempo $\tau(t_{ap})$ del Planeta X. Dicho de una buena vez: la imagen que se recibe en la Tierra del Planeta X corresponde al tiempo propio del Planeta X evaluado en t_{ap},

$$\tau_X(t) = \tau(t_{ap}). \tag{26}$$

A partir de las ecs. (18) y (24) encontramos

$$\tau_X(t) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{t+1}{2} - \frac{1}{2(t+1)}\right). \tag{27}$$

Podemos intentar simplificar esto usando la definición de la función arcsinh,

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \tag{28}$$

No es necesario evaluar todos los términos. Sabemos que el tiempo aparente satisface la ecuación

$$1 + t_{ap}^2 = (1 + t - t_{ap})^2 . \tag{29}$$

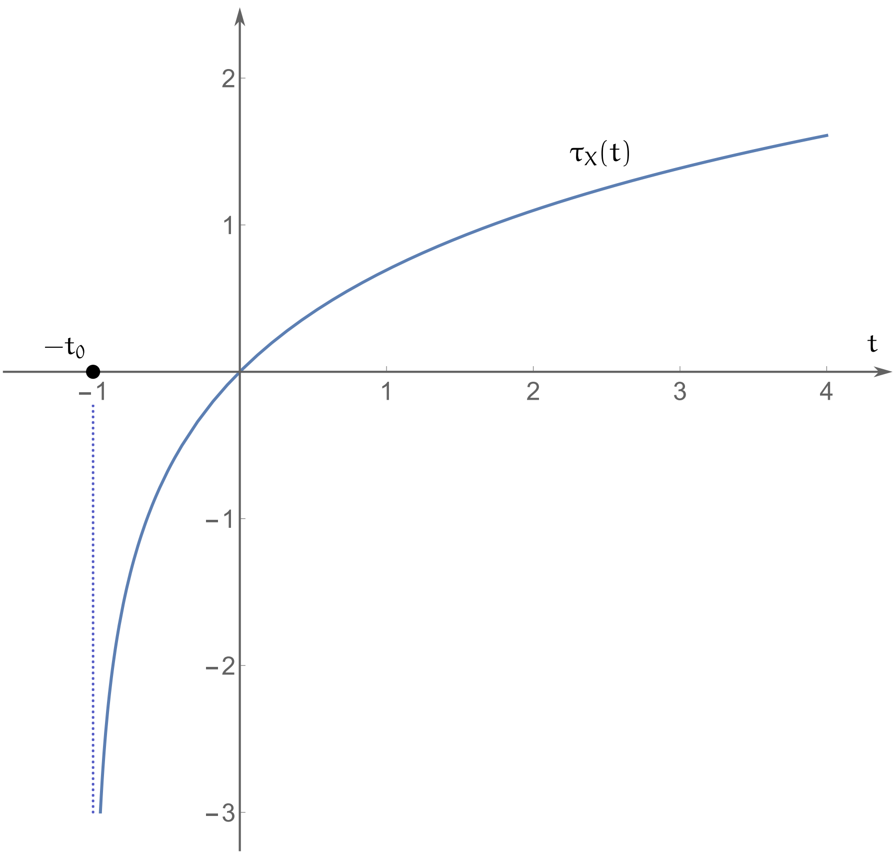
Luego,

$$\operatorname{arcsinh} t_{ap} = \log(t_{ap} + 1 + t - t_{ap}) = \log(1 + t). \tag{30}$$

En definitiva,

$$\tau_X(t) = \log(1 + t). \tag{31}$$

Encontramos nuevamente una divergencia cuando $t \to -t_0$. Eso corresponde al hecho de que toda la historia del Planeta X entre $\tau \to -\infty$ y $\tau = 0$ llega condensada a la Tierra entre $t = -t_0$ y $t = 0$. Este es el gráfico de la función $\tau_X(t)$:



El ritmo de los relojes del Planeta X observados desde la Tierra

Desde la Tierra ven que los relojes del Planeta X marchan a un ritmo

$$\dot{\tau}_X(t) = \frac{1}{1 + t}. \tag{32}$$

Por definición los relojes de la Tierra tienen velocidad igual a 1, es decir, 1 segundo por segundo. La fórmula anterior debe leerse así: por cada segundo que pasa en los relojes de la

Tierra, la imagen de los relojes del Planeta X avanza $\dot{\tau}_X(t)$ segundos. Sólo para tiempos en valor absoluto mucho menores que t_0 el ritmo observado en los relojes del Planeta X estará en sincronía con el de los relojes de la Tierra.

Podemos preguntarnos, por ejemplo, en qué momento vemos pasar los días del Planeta X a uno por segundo. Debe ser

$$\dot{\tau}_X(t) = 86400. \tag{33}$$

Haciendo las cuentas se encuentra que eso sucede en $t \approx -0{,}999988t_0$. Aquí es importante trabajar con mucha precisión, porque todo el infinito pasado el Planeta X está comprimido en un intervalo de longitud t_0 de la Tierra. Una diez milésima de t_0 puede hacer una diferencia de varios años. La fecha en la Tierra que corresponde a ese tiempo es el 15 de mayo de 2010 a las 17:16:51 horas GMT, esto es, unos 58 minutos después de aparecer el Planeta X en el cielo de la Tierra. ¿Qué época de la historia del Planeta X es la que se observa desde la Tierra en ese momento? Según la ec. (31), es (cálculo de fechas mediante) 20 de noviembre de 1911. Otro cálculo muestra que el 20 de noviembre de 1912 (un año después en el Planeta X) es observado en la Tierra a las 17:23:17 del día de la aparición del Planeta X. Un año completo del Planeta X es visto desde la Tierra en un intervalo de tiempo de unos 6 minutos. (Hay alrededor de 360 días en un año, a un día por segundo, da 6 minutos. Este resultado muestra que la aceleración en la marcha de los relojes ya es mucho más lenta).

Para que los sucesos del Planeta X sean vistos desarrollarse al doble de la velocidad con la que ocurrieron debe ser, según la ec. (32), $t = -t_0/2$, que cae el 13 de febrero de 2015, lo que corresponde, en la historia del Planeta X, a la fecha

$$\tau_X(-\tfrac{1}{2}) = -\log 2 \approx 0{,}69\ t_0, \tag{34}$$

que cae el 14 de abril de 2013 del Planeta X.

Cuando el Planeta X se acerca a la Tierra vemos que sus relojes marchan a un ritmo mayor al de los relojes en la Tierra. Y, al contrario, cuando se aleja de la Tierra vemos que sus relojes marchan a un ritmo más lento que los de la Tierra. ¿Pero esto no debería ocurrir siempre, tanto al alejarse como al acercarse? ¿Por qué no hay dilatación temporal mientras los relojes se acercan? La pregunta es capciosa: sí hay dilatación temporal, lo que ocurre es que no estamos calculando la velocidad $\dot{\tau}(t)$ del tiempo que marcan los relojes del Planeta X en el sistema de la Tierra sino la velocidad $\dot{\tau}_X(t)$ del tiempo que marcan las imágenes de los relojes del Planeta X vistos en la Tierra.

Para medir el ritmo de los relojes del Planeta X necesitamos que un observador del sistema de la Tierra esté justo en el lugar donde se encuentra el Planeta X. Entonces sí, **se puede demostrar** que, para este observador, el ritmo al que marchan los relojes del Planeta X es, según la ec. (18)

$$\dot{\tau}(t) = \frac{1}{\gamma(u)}. \tag{35}$$

Lo que se ve desde la Tierra no tiene en principio que ver con la dilatación temporal, sino con el efecto Doppler ordinario. La dilatación temporal modifica las fórmulas pero no es la causa intrínseca del fenómeno. Cuando el Planeta X se acerca, la frecuencia de todas sus señales (incluidos los tic tac de sus relojes) está incrementada por el efecto Doppler. Este efecto compensa y sobrepasa el de la dilatación temporal.

Cuando el Planeta X se aleja, el efecto Doppler disminuye la frecuencia de sus señales. Esto se amplifica debido a la dilatación temporal. Para tiempos mucho mayores que t_0 los relojes del Planeta X parecen marchar cada vez más y más lento (sin embargo apenas poco más lento que el factor $1/\gamma$ de dilatación temporal: ¿por qué no mucho más lento? Si la velocidad del Planeta X tiende a c ¿no debería tender rápidamente la frecuencia a cero?). Cuando $t = t_0$, vemos marchar a los relojes de Planeta X a la mitad de la velocidad.