

MECÁNICA CLÁSICA

Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 10

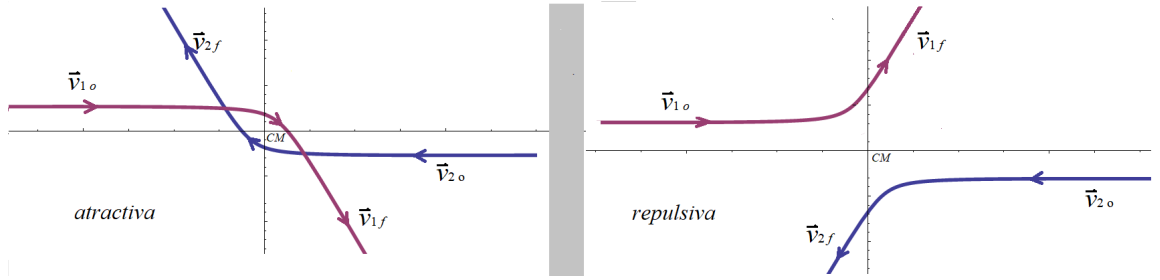
14 de mayo de 2020

Choque elástico Scattering

1 Choque elástico

Si el potencial de interacción en un sistema de dos cuerpos tiende a cero en el infinito, entonces existen órbitas no ligadas donde las partículas están infinitamente separadas tanto en la configuración inicial como en la configuración final: $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \pm \infty$. En esas configuraciones inicial y final la energía es puramente cinética, pues la energía potencial tiende a cero. Como la energía mecánica se conserva, entonces la energía cinética inicial es igual a la final. Esto es lo mismo que sucede en un choque elástico, aunque en el caso de un choque no se trate de interacciones a distancia. La igualdad entre energía cinética inicial y final junto con la conservación de la cantidad de movimiento total nos permitirán conocer algunos aspectos que tienen en común este tipo de interacciones. La Figura muestra el movimiento de dos partículas cargadas iguales en interacción coulombiana –tanto atractiva como repulsiva– tal como se ve en el sistema CM .

Nótese que las velocidades siempre tendrán direcciones opuestas, como condición necesaria para conservar $\vec{P} = 0$. El ángulo entre las direcciones inicial y final depende de los detalles de la interacción; no resulta de los teoremas de conservación.



La anulación de \vec{P} significa que los valores iniciales y finales de las velocidades en ese sistema CM cumplen que

$$\vec{v}_{2o} = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{1o} , \quad \vec{v}_{2f} = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{1f}$$

Además se conserva la energía cinética,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1o}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2o}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Si los valores iniciales son dados, la forma en que los valores finales cumplen estas relaciones es con

$$|\vec{v}_{1f}| = |\vec{v}_{1o}| , \quad |\vec{v}_{2f}| = |\vec{v}_{2o}|$$

Como fue dicho, la dirección de las velocidades finales no queda determinada de esta forma, sino que depende de los detalles de la interacción. En cuanto a los módulos, las velocidades finales tienen los mismos módulos que las respectivas velocidades iniciales.

Una propiedad importante del choque elástico es que el módulo de la velocidad relativa antes y después del choque es el mismo. En el sistema CM el resultado se alcanza en forma muy simple. Debido a que $\vec{P} = 0$ siempre, entonces

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{v}_1 \quad (1)$$

o también

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2 - \vec{v}_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{v}_2 \quad (2)$$

Como los módulos de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 no cambian por efecto del choque, lo mismo sucede con $|\vec{v}_{rel}|$:

$$|\vec{v}_{rel\ o}| = |\vec{v}_{rel\ f}|$$

A diferencia de las velocidades individuales, que están sujetas al teorema de adición de velocidades, las velocidades relativas son **invariantes galileanos** (tienen el mismo valor en todos los sistemas de referencia en traslación relativa). Por lo tanto, $|\vec{v}_{rel\ o}| = |\vec{v}_{rel\ f}|$ es un resultado válido en cualquier sistema de referencia inercial.

Usando las ecuaciones (1) y (2) las velocidades finales en el sistema CM se pueden escribir así:

$$\vec{v}_{1f} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{rel} \hat{n}, \quad \vec{v}_{2f} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{rel} \hat{n}$$

donde \hat{n} es el versor que da la dirección final aún desconocida (es la dirección de las asíntotas de salida en la primera Figura). En términos de las cantidades de movimiento, este resultado dice que $\vec{p}_{1f} = \mu v_{rel} \hat{n}$, $\vec{p}_{2f} = -\mu v_{rel} \hat{n}$.

Ahora transformaremos las velocidades finales a un sistema de referencia S arbitrario. Si \vec{V}_{CM} es la velocidad del CM en el sistema de referencia S , entonces habrá que sumar \vec{V}_{CM} al resultado anterior (adición galileana de velocidades). Si ahora \vec{v}_{1o} , \vec{v}_{2o} son las velocidades iniciales medidas en S , entonces

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_{1o} + m_2 \vec{v}_{2o}}{m_1 + m_2}$$

Entonces las velocidades finales en S son

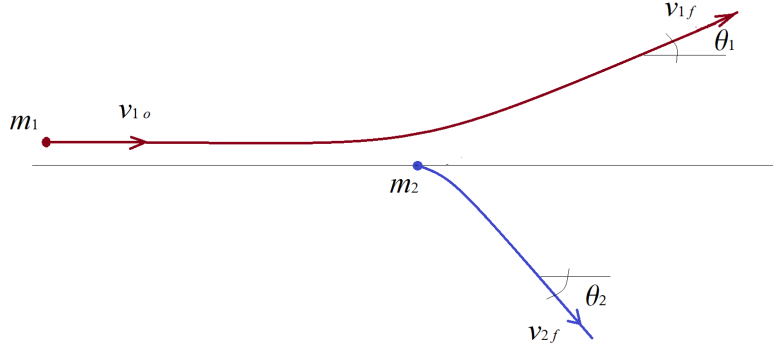
$$\begin{aligned} \vec{v}_{1f} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{rel} \hat{n} + \frac{m_1 \vec{v}_{1o} + m_2 \vec{v}_{2o}}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_{2f} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{rel} \hat{n} + \frac{m_1 \vec{v}_{1o} + m_2 \vec{v}_{2o}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Recordemos que el valor de v_{rel} es el mismo en todos los sistemas de referencia inerciales. Agreguemos que \hat{n} es la dirección de $\vec{v}_{rel\ f}$ y tampoco depende del sistema de referencia inercial que se utilice. También es \hat{n} la dirección final de $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (como es fácil ver en el sistema CM), que también es invariante galileano. Introduciremos el ángulo χ para indicar la dirección de \hat{n} :

$$\hat{n} = \cos \chi \hat{i} + \sin \chi \hat{j}$$

1.1 El caso $v_{2o} = 0$

En muchos experimentos, una partícula juega el papel de “proyectil” y la otra de “blanco”. En ese caso es $\vec{v}_{2o} = 0$ en el sistema del laboratorio, y $\vec{v}_{rel\ o} = \vec{v}_{1o}$.



Los ángulos θ_1 y θ_2 se obtienen de los resultados para las velocidades finales en el sistema del laboratorio:

$$\tan \theta_1 = \frac{v_{1f\ y}}{v_{1f\ x}} = \frac{m_2 v_{1o} \sin \chi}{m_2 v_{1o} \cos \chi + m_1 v_{1o}} = \frac{\sin \chi}{\cos \chi + \frac{m_1}{m_2}}$$

$$\tan \theta_2 = -\frac{v_{2f\ y}}{v_{2f\ x}} = \frac{m_1 v_{1o} \sin \chi}{-m_1 v_{1o} \cos \chi + m_1 v_{1o}} = \frac{\sin \chi}{1 - \cos \chi}$$

Cuando $m_1 = m_2$ entonces \vec{v}_{2f} es perpendicular a \vec{v}_{1f} . En efecto, podemos valernos de una identidad trigonométrica para obtener

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{1 + \frac{m_1}{m_2}}{-1 + \frac{m_1}{m_2}} \cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

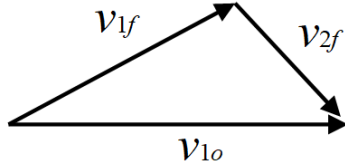
1) Si $m_1 = m_2$ entonces $\tan(\theta_1 + \theta_2)$ diverge. Luego se tiene que $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$.

Podemos entender este resultado así: como $m_1 = m_2$, la conservación de \vec{P} queda

$$\vec{v}_{1o} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$$

que puede verse como el siguiente triángulo, mientras que la conservación de T ,

$$v_{1o}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2,$$



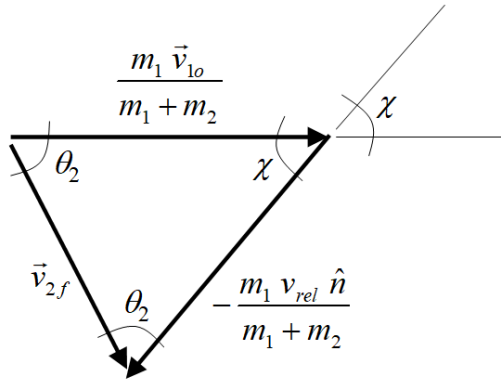
es el teorema de Pitágoras en el triángulo formado por los tres vectores. Por lo tanto $\vec{v}_{1f} \perp \vec{v}_{2f}$.

2) Si $m_1 \geq m_2$ entonces $\tan(\theta_1 + \theta_2) \geq 0$. Luego se tiene que $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi/2$.

3) El resultado para $\tan \theta_2$ puede entenderse mejor a partir de la expresión para \vec{v}_{2f} ; cuando $\vec{v}_{2o} = 0$ queda así

$$\vec{v}_{2f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{1o} - v_{rel} \hat{n})$$

donde se ve que \vec{v}_{2f} resulta de restar dos vectores del mismo módulo ($v_{rel} = |\vec{v}_{1o}|$ porque $\vec{v}_{2o} = 0$). Entonces se forma el triángulo isósceles que muestra la Figura,



donde vemos que

$$2 \theta_2 + \chi = \pi \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}$$

4) Para una dada relación m_1/m_2 , el ángulo θ_1 varía con el valor de χ , y tiene un máximo si

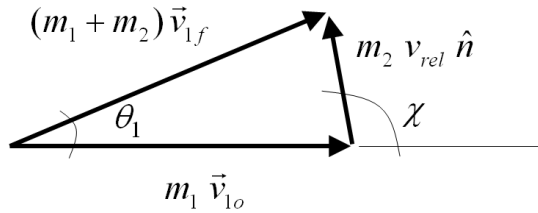
$$0 = \frac{d}{d\chi} \tan \theta_1 = \frac{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \chi}{(\cos \chi + \frac{m_1}{m_2})^2}$$

Entonces θ_1 es máximo cuando $\cos \chi = -m_2/m_1$. Vemos que debe ser $m_1 > m_2$; en caso contrario el proyectil puede salir en cualquier dirección. Reemplazando este valor de χ se obtiene que (ejercicio)

$$\sin \theta_{1 \text{ max}} = \frac{m_2}{m_1} \quad (3)$$

Este resultado puede entenderse mejor a partir de la expresión para \vec{v}_{1f} ; cuando $\vec{v}_{2o} = 0$ queda así

$$(m_1 + m_2) \vec{v}_{1f} = m_2 v_{rel} \hat{n} + m_1 \vec{v}_{1o}$$

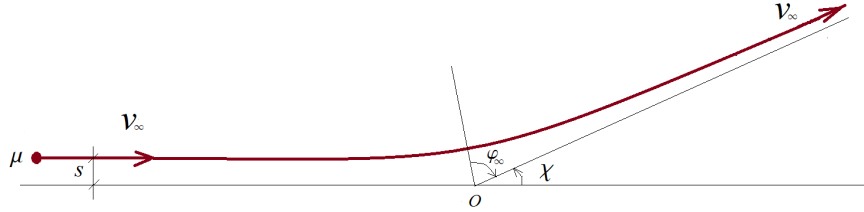


Como $v_{rel} = |\vec{v}_{1o}|$ es fijo, lo único que podemos hacer para incrementar θ_1 es elegir χ para que se forme un triángulo rectángulo. Como la relación entre cateto opuesto e hipotenusa es m_2/m_1 llegamos al resultado (3). En cambio, si $m_2 > m_1$, el ángulo θ_1 podrá tomar cualquier valor entre 0 y π .

2 Scattering

Hasta aquí hemos visto las consecuencias de los teoremas de conservación para la evolución no ligada de un sistema de dos cuerpos. Ahora veremos cómo una interacción específica determina el ángulo χ en función de los datos iniciales. Sabemos que el problema de dos cuerpos se resuelve estudiando una partícula de masa $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ (la masa reducida) en una

posición $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ respecto del centro de un potencial central. Conocemos la solución en función de las primeras integrales ℓ y E . Pero será conveniente escribir la solución en términos de la velocidad de μ en el infinito v_∞ y el parámetro de impacto s :



Entonces

$$E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2, \quad \ell = \mu s v_\infty \quad (4)$$

En la Figura indicamos también el ángulo χ , que es la dirección final del vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$.

Como este tipo de experimento se suele realizar con haces de partículas que son lanzadas hacia un centro dispersor (*scatter* significa *dispersar* o *esparcir*), lo que interesa conocer es qué fracción de los proyectiles se dispersa con ángulos comprendidos entre θ_1 y $\theta_1 + d\theta_1$. En términos del problema equivalente con la partícula μ , averiguaremos cuántas de estas partículas son dispersadas con ángulos comprendidos entre χ y $\chi + d\chi$; y luego usaremos la relación entre θ_1 y χ ya obtenida para responder la cuestión al nivel del problema dos cuerpos.

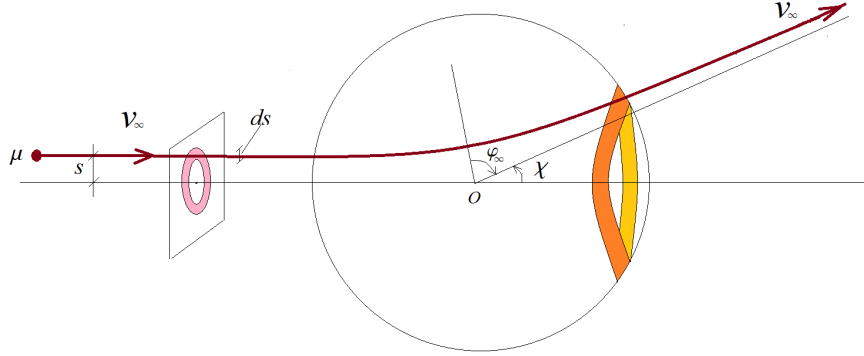
El número dN de partículas que emergen por unidad de tiempo con ángulos comprendidos entre χ y $\chi + d\chi$ contiene la información sobre el potencial dispersor. Como dN es proporcional a la intensidad del haz (supuesta uniforme) conviene caracterizar el potencial dispersor mediante el cociente entre dN y la intensidad. Entonces llamaremos

Intensidad I : número de partículas por unidad de tiempo y de superficie atravesada en el haz de entrada.

Sección eficaz de scattering:

$$d\sigma \equiv \frac{dN}{I}$$

$d\sigma$ tiene unidades de superficie. Es igual al área infinitesimal en la sección del haz por donde entraron las dN partículas que luego se dispersaron con ángulos comprendidos entre χ y $\chi + d\chi$ (ver Figura).



En efecto por el anillo en el haz de entrada pasan $2\pi s ds I$ partículas. Y estas partículas salen luego con ángulos comprendidos entre χ y $\chi + d\chi$. Por supuesto, la cuestión implica conocer la relación entre s y χ ; esta relación depende del potencial de interacción. En síntesis,

$$d\sigma = \frac{dN}{I} = \frac{2\pi s ds I}{I} = 2\pi s ds = 2\pi s(\chi) \left| \frac{ds}{d\chi} \right| d\chi$$

Más adelante calcularemos la función $s(\chi)$ para el potencial coulombiano. La razón para utilizar el valor absoluto de $ds/d\chi$ es que esta derivada puede ser negativa; en efecto $s(\chi)$ es decreciente para el potencial coulombiano repulsivo.

Es común formular la sección eficaz no en términos del ángulo χ sino del ángulo sólido abarcado entre χ y $\chi + d\chi$,

$$d\Omega = 2\pi \sin|\chi| d\chi ,$$

es decir

$$d\sigma = \frac{s(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{ds}{d\chi} \right| d\Omega$$

2.1

2.2 Potencial coulombiano

En el caso del potencial coulombiano $V(r) = -\alpha/r$ (atractivo o repulsivo: $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$) habíamos obtenido (el signo superior corresponde al caso

atractivo)

$$\pm \frac{\ell^2}{\mu |\alpha|} \frac{1}{r} = 1 \pm e \cos \varphi, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2 \ell^2 E}{\alpha^2 \mu}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu s v_\infty^2}{\alpha} \right)^2}$$

donde φ se mide desde r_{\min} . Como vemos en las figuras anteriores, el ángulo φ_∞ , que corresponde a $r \rightarrow \infty$, se relaciona con χ según¹

$$2 \varphi_\infty + \chi = \pi$$

Por otro lado, de la ecuación de la cónica se obtiene que

$$\cos \varphi_\infty = \mp \frac{1}{e} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu s v_\infty^2}{\alpha} \right)^2}}$$

Tanto en el caso atractivo como en el repulsivo es

$$-\frac{\mu s v_\infty^2}{\alpha} = \tan \varphi_\infty = \tan \frac{\pi - \chi}{2} = \cot \frac{\chi}{2}$$

Entonces

$$s(\chi) = -\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \cot \frac{\chi}{2}$$

Por lo tanto

$$\frac{ds}{d\chi} = \frac{\alpha}{2 \mu v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}}$$

Reemplazando en la sección eficaz (χ es negativo cuando α es positivo)

$$d\sigma = 2\pi s(\chi) \left| \frac{ds}{d\chi} \right| d\chi = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cot \frac{|\chi|}{2}}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} d\chi = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{|\chi|}{2}} d\chi$$

o bien como $d\Omega = 2\pi \sin |\chi| d\chi$

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{|\chi|}{2}} \frac{d\Omega}{\sin |\chi|}$$

Si escribimos $\sin \chi = \sin\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}$, entonces llegamos a la **fórmula de Rutherford** para la sección eficaz de la interacción coulombiana:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2 \mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} d\Omega$$

¹La fórmula vale también para la trayectoria atractiva, donde $\chi < 0$ (ver Figura 1).

Para conocer la sección eficaz de proyectiles y blancos, usaremos las relaciones

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \chi}{\cos \chi + \frac{m_1}{m_2}}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}$$

para escribir $\chi(\theta_1)$ y $d\chi = (d\chi/d\theta_1) d\theta_1$, y lo mismo para θ_2 . Cuando proyectiles y blancos son iguales no tiene sentido distinguirlos después de la dispersión, y deberían sumarse las secciones eficaces respectivas (teniendo en cuenta que si $m_1 = m_2$ es $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$). Por otro lado, la interacción entre los proyectiles dentro del haz ha sido ignorada en este tratamiento.

En 1909 E. Rutherford colaboró con Geiger y Marsden en un experimento de dispersión de un haz de partículas alfa (núcleos de ${}^4\text{He}$) que atravesaba una lámina de oro. La forma en que las partículas alfa eran dispersadas (algunas con ángulo de deflexión muy grande) indicaban que en la materia existían regiones de carga positiva muy concentrada. Esto le permitió enunciar en 1911 lo que conocemos como el modelo atómico de Rutherford, donde la carga de un signo se concentra en un núcleo que contiene casi toda la masa del átomo, y la carga de signo opuesto se distribuye en electrones de baja masa que orbitan alrededor del núcleo.

Como la masa del núcleo de oro es mucho mayor que la masa de la partícula alfa ($m_2 \gg m_1$), entonces $\theta_1 \simeq \chi$, y la fórmula de Rutherford se aplica directamente a la sección eficaz de dispersión de las partículas alfa.

Nótese que la sección eficaz total del potencial Coulombiano diverge:

$$\sigma = \int d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi = \infty$$

En efecto, σ corresponde al área de la sección del haz por donde entran las partículas que serán dispersadas. La sección total es infinita porque el potencial de Coulomb dispersa aun aquellos proyectiles cuyo parámetro de impacto tiende a infinito.