Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA
Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 11
18 de mayo de 2020

Pequeñas oscilaciones

1 Pequeñas oscilaciones

La aproximación de pequeñas oscilaciones, que se practica en problemas elementales como el del péndulo simple con el objeto de linealizar la ecuación de movimiento, puede aplicarse también en problemas de varios grados de libertad. Consideremos un potencial que depende sólo de las coordenadas generalizadas, $V(q_1, ..., q_n)$, y que posea un **mínimo** en algún punto $(\bar{q}_1, ..., \bar{q}_n)$ del espacio de configuración:

$$\frac{\partial V}{\partial q_\mu}|_{q=\bar{q}} \ = \ 0 \ , \qquad \forall \mu$$

Buscaremos soluciones que se aparten poco de esa posición de equilibrio estable:

$$q_\mu(t) = \bar{q}_\mu + \eta_\mu(t)$$

donde $\eta_\mu(t)$ es una pequeña perturbación; de modo que sólo términos lineales en $\eta_\mu(t)$ serán considerados en las ecuaciones de movimiento. Para ello aproximaremos el Lagrangiano a orden cuadrático en las perturbaciones. El potencial aproximado es

$$V \simeq V(\bar{q}) + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial q_\mu \partial q_\nu}|_{q=\bar{q}} \ (q_\mu - \bar{q}_\mu) \ (q_\nu - \bar{q}_\nu) = V(\bar{q}) + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu} \ \eta_\mu \eta_\nu$$

donde

$$k_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_\mu \partial q_\nu}|_{q=\bar{q}}$$

Las velocidades generalizadas son

$$\dot{q}_\mu(t) = \dot{\eta}_\mu(t)$$

En un sistema holónomo y esclerónomo, la energía cinética es homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas. Como $\dot{q}_\mu = \dot{\eta}_\mu$, la energía cinética aproximada resulta[1]

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}(q)\ \dot{q}_\mu\ \dot{q}_\nu \simeq \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\ \dot{\eta}_\mu \dot{\eta}_\nu$$

donde

$$m_{\mu\nu} \equiv m_{\mu\nu}(\bar{q})$$

Con el Lagrangiano aproximado, las n ecuaciones de Euler-Lagrange linealizadas resultan

$$\sum_{\nu=1}^{n} (m_{\mu\nu}\ \ddot{\eta}_\nu(t) + k_{\mu\nu}\ \eta_\nu(t)) = 0\ , \qquad \mu = 1, ..., n \tag{1}$$

donde $m_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu}$ son dos **matrices reales simétricas** que contienen la información sobre las frecuencias propias del sistema.

Busquemos una solución de la forma[2]

$$\eta_\nu(t) = A_\nu\ e^{i\omega t}\ , \qquad \nu = 1, ..., n$$

donde los coeficientes A_ν son números complejos que contendrán información sobre amplitudes y fases relativas. Reemplazando en las ecuaciones,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(-\omega^2\ m_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}\right) A_\nu = 0\ , \qquad \mu = 1, ..., n \tag{2}$$

Vemos que el sistema de ecuaciones diferenciales se ha convertido en un sistema de ecuaciones algebraicas para los coeficientes A_ν.

En un oscilador unidimensional A no queda determinado por la ecuación de movimiento sino por las condiciones iniciales. En un caso con n grados

[1] $m_{\mu\nu}(q) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}$

[2] Como las ecuaciones (1) son lineales a coeficientes reales, las partes real e imaginaria de una solución compleja son soluciones reales de las ecuaciones.

de libertad, veremos que los A_ν quedan determinados en parte por las ecuaciones de movimiento, y en parte por las condiciones iniciales. Las ecuaciones de movimiento determinarán relaciones entre las evoluciones de los distintos grados de libertad en cada posible solución del problema.

Las ecuaciones (2) tienen una solución trivial,

$$A_\nu = 0 \qquad \forall \nu \qquad \Rightarrow \qquad q_\nu(t) = \bar{q}_\nu \ ,$$

que corresponde al punto de equilibrio. Para tener oscilaciones en torno al equilibrio necesitamos soluciones no triviales. Pero ocurre que el sistema de ecuaciones lineales (2) que deben satisfacer los coeficientes A_ν está igualado a cero. Entonces o todos los A_ν se anulan o la matriz $-\omega^2\ m_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}$ es no inversible y, así, permite soluciones no triviales. Para que la matriz $-\omega^2\ m_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}$ sea no inversible, su determinante debe anularse:

$$\det(-\omega^2\ m_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}) = 0$$

En ese caso las ecuaciones no son independientes (la anulación del determinante dice que al menos una fila es una combinación de las otras). En ese caso no todos los A_ν podrán ser resueltos, sino que obtendremos relaciones entre los mismos.

La condición $\det(-\omega^2\ m_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}) = 0$ debe verse como una forma de seleccionar las frecuencias ω que posibilitan una solución no trivial. La condición corresponde a una ecuación de grado n para la incógnita ω^2, que se caracteriza por sus n raíces.

Vamos a probar que las n raíces ω^2 son positivas, de modo que todas ellas conducen a soluciones que oscilan indefinidamente. Dada una solución no trivial, usaremos su compleja conjugada para multiplicar la ecuación (2) por A_μ^* y sumar sobre μ,

$$\sum_{\mu,\nu} \left(-\omega^2\ m_{\mu\nu} + k_{\mu\nu}\right) A_\nu A_\mu^* = 0$$

es decir

$$\omega^2 \sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\ A_\nu A_\mu^* = \sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}\ A_\nu A_\mu^* \tag{3}$$

Veamos que cada sumatoria doble es un número real, lo que es consecuencia de la simetría de las respectivas matrices. Los términos con $\mu \neq \nu$ se agrupan en cantidades reales:

$$m_{12}\ A_1 A_2^* + m_{21}\ A_2 A_1^* = m_{12}(A_1 A_2^* +\ A_2 A_1^*) = 2\ m_{12}\ \mathrm{Re}[A_1 A_2^*]\ ;$$

y los términos diagonales son reales:

$$m_{11}\ A_1 A_1^* = m_{11}\ \ |A_1|^2$$

Lo mismo sucede con la doble sumatoria que contiene la matriz $k_{\mu\nu}$. Podemos probar que ambas sumatorias son reales en una forma más elegante:

$$(\sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}\ A_\nu A_\mu^*)^* = \sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}^*\ A_\nu^* A_\mu = \sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}\ A_\nu^* A_\mu = \sum_{\mu,\nu} k_{\nu\mu}\ A_\mu^* A_\nu = \sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}\ A_\nu A_\mu^*$$

donde usamos que $k_{\mu\nu}$ es una matriz real y simétrica.

Como en la ecuación (3) ambas sumatorias dobles son reales, entonces concluimos que ω^2 debe ser real. Siendo ω^2 real, entonces todos los coeficientes en las ecuaciones (2) son reales; por lo tanto esas ecuaciones admiten soluciones no triviales A_ν reales. Luego es inmediato ver que ambas sumatorias dobles en (3) son definidas positivas, pues las matrices $m_{\mu\nu}$ y $k_{\mu\nu}$ definen formas cuadráticas positivas. En efecto,

$$\sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\ A_\nu A_\mu^* = \sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\ A_\nu A_\mu > 0$$

para valores arbitrarios de A_ν, del mismo modo que $T = (1/2)\sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\dot{\eta}_\mu\dot{\eta}_\nu > 0$ para valores arbitrarios (pero no todos nulos) de las velocidades generalizadas. También se concluye que la otra sumatoria doble es positiva pues $\sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}\eta_\mu\eta_\nu > 0$ como condición para que el punto de equilibrio $\eta_\mu = 0\ \forall\mu$ sea efectivamente un mínimo del potencial (el potencial debe crecer para cualquier desplazamiento del punto de equilibrio). Vale la pena notar que ambas sumatorias dobles serían positivas aun si los A_ν's fuesen complejos.[3]

Como en la ecuación (3) ambas sumatorias dobles son positivas, entonces ω^2 es positivo; lo que implica que ω es real, y las soluciones oscilan indefinidamente (no hay amortiguación). Una vez que hayamos encontrado las n frecuencias propias del sistema, las identificaremos con una etiqueta s: ω_s , $s = 1, ..., n$. Para cada ω_s el sistema de ecuaciones tendrá una solución real no trivial $A_\nu^{(s)}$, $\nu = 1, ..., n$. Pero, como el sistema de ecuaciones (2) es lineal y homogéneo, cada solución es ambigua: multiplicándola por un factor global complejo $C^{(s)}$ tendremos también una solución. Esta ambigüedad sólo dice que la solución correspondiente a la frecuencia ω_s contiene una amplitud y una fase inicial globales que deberán fijarse mediante las condiciones

[3]Usar que $\sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\ A_\nu A_\mu^*$ es real, y que $2\,\mathrm{Re}[A_\nu A_\mu^*] = \mathrm{Re}[A_\nu]\,\mathrm{Re}[A_\mu] + \mathrm{Im}[A_\nu]\,\mathrm{Im}[A_\mu]$.

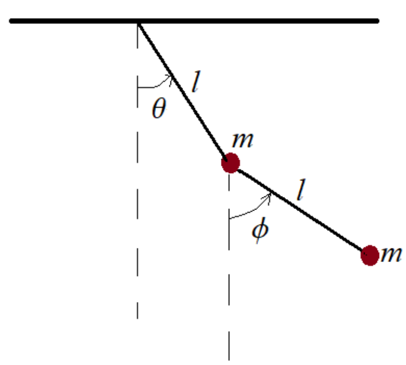
iniciales. Pero las amplitudes *relativas* de las η_ν en cada **modo normal de oscilación** están determinadas por la solución de la ecuación (2) correspondiente a la frecuencia ω_s del modo normal.

Finalmente, como la ecuación (1) es lineal, la solución más general es una combinación de los n modos normales de oscilación:

$$\eta_\nu(t) = \sum_{s=1}^{n} C^{(s)} A_\nu^{(s)} \, e^{i\omega_s t} \, , \qquad \nu = 1, ..., n \tag{4}$$

Los coeficientes complejos $C^{(s)}$ indican con qué amplitud y qué fase entra cada modo normal de oscilación en la solución general. Son determinados por las condiciones iniciales.

1.1 Ejemplo: el péndulo doble plano



Punto de equilibrio: $\bar{\theta} = 0, \quad \bar{\phi} = 0$

Coordenadas: $\eta_1 = \theta, \quad \eta_2 = \phi$

Matrices $m_{\mu\nu}$ y $k_{\mu\nu}$: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2m\ell^2 & m\ell^2 \\ m\ell^2 & m\ell^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2mg\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$

Frecuencias propias: $\omega_1^2 = \frac{g}{\ell}(2 - \sqrt{2})$, $\quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell}(2 + \sqrt{2})$

Modo normal 1: $A_\theta^{(1)} = A_\phi^{(1)}/\sqrt{2}$ (oscilación en fase)

Modo normal 2: $A_\theta^{(2)} = -A_\phi^{(2)}/\sqrt{2}$ (oscilación a contrafase)

Como previmos, la resolución para cada frecuencia no permite obtener todos los coeficientes A_ν sino una relación entre ellos, que nos dice con qué amplitud relativa entra cada coordenada en el modo de oscilación en cuestión. La solución general es una combinación de ambos modos:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= C^{(1)} A_\theta^{(1)}\ e^{i\omega_1 t} + C^{(2)} A_\theta^{(2)}\ e^{i\omega_2 t} \\ \phi(t) &= C^{(1)} A_\phi^{(1)}\ e^{i\omega_1 t} + C^{(2)} A_\phi^{(2)}\ e^{i\omega_2 t}\end{aligned}$$

Si absorbemos $A_\phi^{(1)}$, $A_\phi^{(2)}$en las constantes de integración $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ respectivamente, el resultado es

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} C_1\ e^{i\omega_1 t} - \frac{1}{\sqrt{2}} C_2\ e^{i\omega_2 t} \\ \phi(t) &= C_1\ e^{i\omega_1 t} + C_2\ e^{i\omega_2 t}\end{aligned}$$

Los complejos C_1, C_2, se determinan con las condiciones iniciales. Por ejemplo, si las condiciones iniciales fueran tales que $C_2 = 0$, entonces el movimiento correspondería al modo normal 1.

2 Ortonormalidad

Si bien el método de resolución podría darse por concluido, veremos algunas propiedades de las soluciones $A_\nu^{(s)}$ que serán de utilidad. Consideremos las ecuaciones (2) para dos frecuencias distintas ω_s y ω_t:

$$\begin{aligned}\omega_s^2 \sum_{\nu=1}^{n} m_{\mu\nu}\ A_\nu^{(s)} &= \sum_{\nu=1}^{n} k_{\mu\nu}\ A_\nu^{(s)}\ , \\ \omega_t^2 \sum_{\nu=1}^{n} m_{\mu\nu}\ A_\nu^{(t)} &= \sum_{\nu=1}^{n} k_{\mu\nu}\ A_\nu^{(t)}\end{aligned}$$

"Multipliquemos" la primera por $\sum_\mu A_\mu^{(t)}$ y la segunda por $\sum_\mu A_\mu^{(s)}$; usemos la simetría de $m_{\mu\nu}$ y $k_{\mu\nu}$, y restemos:

$$(\omega_s^2 - \omega_t^2) \sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\ A_\mu^{(t)} A_\nu^{(s)} = 0$$

Si los autovalores ω_s^2 son todos distintos esto significa que

$$\sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\ A_\mu^{(t)} A_\nu^{(s)} = 0\ , \qquad s \neq t$$

Esto es una suerte de ortogonalidad entre vectores. Para cada valor de s tenemos un “vector” $\vec{A}^{(s)}$ de n componentes $A_\nu^{(s)}$. La relación anterior puede verse como un “producto interno” $\vec{A}^{(s)} \cdot \vec{A}^{(t)}$ en una “métrica” $m_{\mu\nu}$; la relación anterior dice que los “vectores” $\vec{A}^{(s)}$’s son ortogonales entre sí. Aun si hubiese autovalores iguales (degeneración), podrían elegirse ortogonales los vectores del subespacio correspondiente. Podemos avanzar más sobre esta línea; en el caso $s = t$, estaríamos ante el cuadrado de la norma $\vec{A}^{(s)} \cdot \vec{A}^{(s)}$ de cada vector. Como los $\vec{A}^{(s)}$’s no quedan completamente determinados por las ecuaciones (2) podemos valernos de la ambigüedad remanente para fijarla mediante una condición de normalización. Así diremos que los $A_\nu^{(s)}$ satisfacen una condición de **ortonormalidad**:

$$\sum_{\mu,\nu} m_{\mu\nu}\ A_\mu^{(t)} A_\nu^{(s)} = \delta_{st}\ , \qquad \forall s, t \tag{5}$$

3 Notación matricial

Como hay n coeficientes $A_\nu^{(s)}$ para cada una de las n frecuencias propias ω_s, podemos organizarlos todos en una matriz $\mathbf{A}$ de componentes $A_{\nu s} \equiv A_\nu^{(s)}$ (cada columna representa un modo normal). La relación de ortonormalidad (5) significa que[4]

$$\mathbf{A^T}\ \mathbf{M}\ \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

Por ejemplo, en el péndulo doble la matriz $\mathbf{A}$ resulta

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_\theta^{(1)} & A_\theta^{(2)} \\ A_\phi^{(1)} & A_\phi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\phi^{(1)}/\sqrt{2} & -A_\phi^{(2)}/\sqrt{2} \\ A_\phi^{(1)} & A_\phi^{(2)} \end{pmatrix}$$

y la normalización se consigue con

$$A_\phi^{(1)} = \frac{1}{\ell\sqrt{(2+\sqrt{2})\ m}}\ , \qquad A_\phi^{(2)} = \frac{1}{\ell\sqrt{(2-\sqrt{2})\ m}}\ .$$

Videos
www.youtube.com/watch?v=d3uOKlIEIoU
www.youtube.com/watch?v=7dXZSn3PV5E
www.youtube.com/watch?v=d0Z8wLLPNE0
www.youtube.com/watch?v=TmlpDO3LcOs

[4] $\sum_{\mu\nu} m_{\mu\nu}\ A_\mu^{(t)} A_\nu^{(s)} = \sum_{\mu\nu} m_{\mu\nu}\ A_{\mu t}\ A_{\nu s} = \sum_{\mu\nu} (\mathbf{A^T})_{t\mu} (\mathbf{M})_{\mu\nu} (\mathbf{A})_{\nu s}$.