Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA
Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 14
1 de junio de 2020

Cinemática del cuerpo rígido

1 Ángulos de Euler

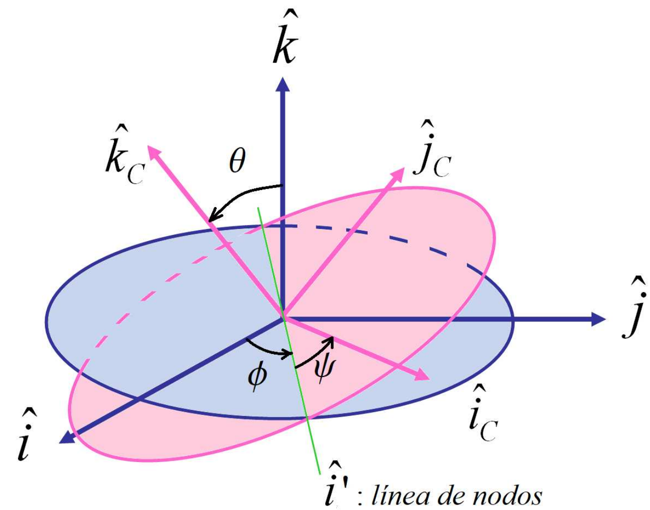
Un cuerpo rígido libre de vínculos tiene seis grados de libertad, que pueden descomponerse en tres grados de libertad traslatorios y tres rotatorios. Podemos usar tres coordenadas que describan la posición de un punto del cuerpo, por ejemplo su centro de masa, y otras tres que describan la orientación del cuerpo respecto de un sistema de referencia. Para este último fin, elijamos una terna $\hat{\imath}_c$, $\hat{\jmath}_c$, $\hat{k}_c$ fija al cuerpo. A medida que el cuerpo **rote**, esta terna cambiará su orientación en el espacio. Introduciremos los **ángulos de Euler** ϕ, θ, ψ para describir la orientación de la terna $\hat{\imath}_c$, $\hat{\jmath}_c$, $\hat{k}_c$.

En la Figura vemos un sistema de referencia en color azul, cuyos versores son $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. Por otro lado, en color rojo vemos la terna fija al cuerpo. La **línea de nodos** en color verde corresponde a la intersección de los planos x, y de ambas ternas. Los ángulos de Euler se definen de la siguiente manera:

ϕ: es el ángulo entre $\hat{\imath}$ y la línea de nodos (que indicaremos con $\hat{\imath}\,'$)

θ: es el ángulo entre $\hat{k}$ y $\hat{k}_c$

ψ: es el ángulo entre la línea de nodos y $\hat{\imath}_c$



Para familiarizarnos con los ángulos de Euler debemos pensar cómo debe girar el cuerpo para que cada uno de los ángulos varíe, y los otros dos permanezcan fijos. Si el cuerpo rota alrededor de $\hat{k}_c$, entonces ψ varía y ϕ, θ permanecen fijos. Para que varíe ϕ (es decir, para que se corra la línea de nodos) sin que varíen θ, ψ el cuerpo debe rotar alrededor de $\hat{k}$. Para que varíe θ sin afectar los otros ángulos, el cuerpo debe girar alrededor de la línea de nodos (es decir, alrededor de $\hat{\imath}'$). Dada una orientación $(\hat{\imath}_c, \hat{\jmath}_c, \hat{k}_c)$ cualquiera, veremos que existe una **matriz de rotación** que conecta $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ con $(\hat{\imath}_c, \hat{\jmath}_c, \hat{k}_c)$.

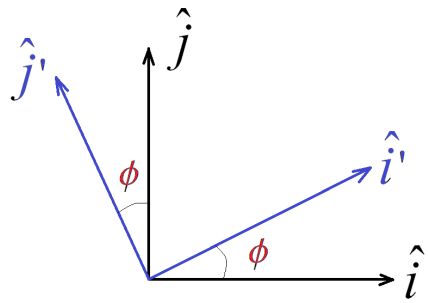
2 Grupo de rotaciones

Repasemos la rotación en un plano

$$\begin{aligned} \hat{\imath} &= \cos\phi\ \hat{\imath}\,' - \sin\phi\ \hat{\jmath}\,' \\ \hat{\jmath} &= \sin\phi\ \hat{\imath}\,' + \cos\phi\ \hat{\jmath}\,' \end{aligned}$$

La transformación de los versores implica una transformación de las componentes de los vectores:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V_x\ \hat{\imath} + V_y\ \hat{\jmath} \\ &= (V_x\ \cos\phi + V_y\ \sin\phi)\ \hat{\imath}\,' + (-V_x\ \sin\phi + V_y\ \cos\phi)\ \hat{\jmath}\,' \end{aligned}$$



es decir,

$$\begin{aligned} V_x{}' &= V_x \ \cos\phi + V_y \ \sin\phi \\ V_y{}' &= -V_x \ \sin\phi + V_y \ \cos\phi \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} V_x{}' \\ V_y{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$$

que escribiremos en notación compacta

$$|V>' = R_\phi \ |V>$$

Nótese que trasponer R_ϕ es igual a cambiar ϕ por $-\phi$, lo que significa revertir la rotación. Es decir, que $R_\phi^T = R_\phi^{-1}$.

En general las matrices $d \times d$ tales que

$$R^T \ R = \mathbf{1}$$

tienen la propiedad de dejar invariante el producto escalar euclidiano entre vectores d-dimensionales:

$$A_x' \ B_x' + A_y' \ B_y' + ... = \ '< A|B >' = |A >'^{\ T} \ |B >' = (R \ |A >)^T \ R \ |B >$$
$$= |A >^T \ R^{\ T} R \ |B > = < A|R^{\ T} R|B > = < A|B > = A_x \ B_x + A_y \ B_y + ...$$

Como $\det R^T = \det R$, la igualdad $R^T R = \mathbf{1}$ implica que

$$\det R = \pm 1$$

Si multiplicamos dos matrices tales que $R^T R = \mathbf{1}$ obtendremos otra matriz de ese mismo tipo; en efecto,

$$(R_1 R_2)^T \ (R_1 R_2) = R_2^T \ R_1^T \ R_1 R_2 = R_2^T \ \mathbf{1} \ R_2 = R_2^T \ R_2 = \mathbf{1}$$

Esta propiedad es esencial para que este tipo de matrices constituyan un **grupo**.[1]

3 Relación entre $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ y $(\hat{\imath}_c, \hat{\jmath}_c, \hat{k}_c)$

Como dijimos, existe una matriz de rotación de 3×3 que conecta $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ con $(\hat{\imath}_c, \hat{\jmath}_c, \hat{k}_c)$. Para construirla, la descompondremos en tres pasos:

1) $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}) \rightarrow (\hat{\imath}\,', \hat{\jmath}\,', \hat{k}\,')$

Comenzaremos por una rotación de ángulo ϕ alrededor de $\hat{k} = \hat{k}\,'$ para llevar $\hat{\imath}$ hasta la línea de nodos $\hat{\imath}\,'$. Es una rotación que actúa en el plano x, y de las ternas de partida y llegada. Entonces la correspondiente matriz de rotación es

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|V>' = R_\phi \; |V>$$

2) $(\hat{\imath}\,', \hat{\jmath}\,', \hat{k}\,') \rightarrow (\hat{\imath}\,'', \hat{\jmath}\,'', \hat{k}\,'')$

Ahora realizaremos una rotación de ángulo θ alrededor de la línea de nodos $\hat{\imath}\,' = \hat{\imath}\,''$ para llevar $\hat{k}\,'$ hasta $\hat{k}\,'' = \hat{k}_c$. Es una rotación en los planos y, z de las ternas de partida y llegada. La matriz de rotación es

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|V>'' = R_\theta \; |V>' = R_\theta \; R_\phi \; |V>$$

[1] Un *grupo* $\mathcal{G}$ es un conjunto de transformaciones dotado de una *composición* (en nuestro caso el producto de matrices) asociativa y *cerrada* (la composición de elementos de $\mathcal{G}$ está en $\mathcal{G}$), con elemento unidad y tal que cada elemento de $\mathcal{G}$ posee inversa en $\mathcal{G}$.

Las matrices $d \times d$ tales que $R^{\,T} = R^{-1}$ forman el **grupo ortogonal** $O(d)$. El subgrupo con $\det R = 1$ se denomina $SO(d)$ (*special orthogonal group*); si $d = 2$ ó 3 es el grupo de **rotaciones**. Las rotaciones no conmutan, salvo que sean rotaciones alrededor de un mismo eje. Las transformaciones de $O(d)$ con $\det R = -1$ involucran cambios de orientación de la base de versores.

3) $(\hat\imath\,'', \hat\jmath\,'', \hat k\,'') \to (\hat\imath_c, \hat\jmath_c, \hat k_c)$

Finalmente haremos una rotación de ángulo ψ alrededor de $\hat k\,'' = \hat k_c$ para llevar $\hat\imath\,'', \hat\jmath\,''$ a coincidir con $\hat\imath_c, \hat\jmath_c$. Es una rotación en los planos x, y de las ternas de partida y llegada. La matriz de rotación es

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|V>^c = R_\psi\ |V>'' = R_\psi\ R_\theta\ |V>' = R_\psi\ R_\theta\ R_\phi\ |V> \tag{1}$$

Por lo tanto, la rotación que transforma las componentes de un vector $\vec V$ en la terna $(\hat\imath, \hat\jmath, \hat k)$ en las componentes del mismo $\vec V$ en la terna $(\hat\imath_c, \hat\jmath_c, \hat k_c)$ es

$$R = R_\psi\ R_\theta\ R_\phi$$

donde ϕ, θ, ψ son los ángulos de Euler de la terna $(\hat\imath_c, \hat\jmath_c, \hat k_c)$ relativos a la terna $(\hat\imath, \hat\jmath, \hat k)$.

4 Velocidad de rotación

Decimos que un cuerpo rígido **rota** cuando cambia su **orientación** respecto del sistema de referencia. El cambio de la orientación está medido por las derivadas $\dot\phi$, $\dot\theta$, $\dot\psi$. Con ellas podemos definir un vector velocidad de rotación $\vec\Omega$. Para ello deberemos tener en cuenta cuál es el eje de rotación correspondiente a la variación de cada ángulo de Euler, como pudo verse en los tres pasos anteriores. Entonces

$$\vec\Omega = \dot\phi\ \hat k + \dot\theta\ \hat\imath\,' + \dot\psi\ \hat k_c \tag{2}$$

Tanto las velocidades generalizadas $\dot\phi$, $\dot\theta$, $\dot\psi$ como las direcciones de $\hat\imath\,'$, $\hat k_c$ pueden variar con el tiempo. De modo que la dirección de $\vec\Omega$ también lo hará, definiendo así un **eje instantáneo de rotación**.

Convendrá descomponer $\vec\Omega$ en una misma terna, ya sea la $(\hat\imath, \hat\jmath, \hat k)$ o la $(\hat\imath_c, \hat\jmath_c, \hat k_c)$. Es muy fácil hacerlo para $\hat\imath\,'$ ya que la línea de nodos pertenece a los planos x, y de ambas ternas (ver la primera Figura):

$$\hat\imath\,' = \cos\phi\ \hat\imath + \sin\phi\ \hat\jmath \tag{3}$$

$$\hat\imath\,' = \cos\psi\ \hat\imath_c - \sin\psi\ \hat\jmath_c \tag{4}$$

En cambio, las proyecciones de $\hat{k}$ sobre los versores $(\hat{\imath}_c, \hat{\jmath}_c, \hat{k}_c)$, así como las proyecciones de $\hat{k}_c$ sobre los versores $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ no resultan tan evidentes. Por eso nos valdremos de la matriz R:

i) Las componentes de $\hat{k}$ en la base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ son $(0, 0, 1)$. Para obtener sus componentes en la base $(\hat{\imath}_c, \hat{\jmath}_c, \hat{k}_c)$ recurrimos a la ecuación (1):

$$|k>^c = R_\psi \, R_\theta \, R_\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_\psi \, R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_\psi \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\psi \sin\theta \\ \cos\psi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

que significa[2]

$$\hat{k} = \sin\psi \sin\theta \ \hat{\imath}_c + \cos\psi \sin\theta \ \hat{\jmath}_c + \cos\theta \ \hat{k}_c \tag{5}$$

ii) Para tener $\hat{k}_c$ descompuesto en la base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ partimos de

$$|k_c>^c = R_\psi \ R_\theta \ R_\phi \ |k_c>$$

En esta ecuación conocemos el lado izquierdo; las componentes de $\hat{k}_c$ en la base $(\hat{\imath}_c, \hat{\jmath}_c, \hat{k}_c)$ son $(0, 0, 1)$. Entonces

$$|k_c> \ = R_\phi^{-1} \ R_\theta^{-1} \ R_\psi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_\phi^T \ R_\theta^T \ R_\psi^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_\phi^T \ R_\theta^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es[3]

$$\hat{k}_c = \sin\phi \sin\theta \ \hat{\imath} - \cos\phi \sin\theta \ \hat{\jmath} + \cos\theta \ \hat{k} \tag{6}$$

Nótese el intercambio de roles entre (5) y (6): $\phi \longleftrightarrow -\psi$, $\theta \longleftrightarrow -\theta$.

Tenemos dos formas de reescribir la velocidad de rotación (2):

---

[2]La proyección $\cos\theta$ sobre el versor $\hat{k}_c$ es evidente en la primera Figura. Las otras dos proyecciones se infieren de la ortogonalidad de $\hat{k}$ con respecto a la línea de nodos (4).

[3]Se verifica la ortogonalidad respecto de la línea de nodos (3).

I) Usamos (4) y (5) para escribir $\vec{\Omega}$ proyectada en la base del cuerpo:

$$\vec{\Omega} = \Omega_1 \ \hat{\imath}_c + \Omega_2 \ \hat{\jmath}_c + \Omega_3 \ \hat{k}_c$$

resultando

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \dot{\phi} \ \sin\theta \ \sin\psi + \dot{\theta} \ \cos\psi \\
\Omega_2 &= \dot{\phi} \ \sin\theta \ \cos\psi - \dot{\theta} \ \sin\psi \\
\Omega_3 &= \dot{\phi} \ \cos\theta + \dot{\psi} \qquad (7)
\end{aligned}$$

II) Usamos (3) y (6) para escribir $\vec{\Omega}$ proyectada en la base del sistema de referencia:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \ \hat{\imath} + \Omega_y \ \hat{\jmath} + \Omega_z \ \hat{k}$$

resultando

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= \dot{\psi} \ \sin\theta \ \sin\phi + \dot{\theta} \ \cos\phi \\
\Omega_y &= -\dot{\psi} \ \sin\theta \ \cos\phi + \dot{\theta} \ \sin\phi \\
\Omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Nótese que podemos pasar de (7) a (8) mediante el cambio $\phi \longleftrightarrow -\psi$, $\theta \longleftrightarrow -\theta$, $t \longleftrightarrow -t$.

Ejemplo: en un movimiento plano, como la rotación de un CD, es posible hacer coincidir las direcciones de $\vec{\Omega}$, $\hat{k}$ y $\hat{k}_c$. En tal caso es $\theta = 0$, y $\vec{\Omega} = (\dot{\phi} + \dot{\psi}) \ \hat{k} = (\dot{\phi} + \dot{\psi}) \ \hat{k}_c$. Como $\hat{k} = \hat{k}_c$, la línea de nodos no queda determinada; $\phi + \psi$ no es más que el ángulo entre $\hat{\imath}$ y $\hat{\imath}_c$.

5 Cinemática del cuerpo rígido

En 1775 Euler demostró que dos configuraciones diferentes de un cuerpo rígido con un punto fijo (articulación) pueden ser siempre conectadas por medio de una única rotación alrededor de un eje que pasa por el punto fijo. La dirección de ese eje es la de aquellos vectores que son invaraintes ante esa rotación. El teorema de Euler probaba que las rotaciones forman un grupo, en el sentido que las dos configuraciones podrían conectarse mediante pasos intermedios que también involucrarían rotaciones. Por otra parte, el teorema permitía ver el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo como una sucesión de rotaciones infinitesimales alrededor de un eje instantáneo de rotación.

Recordando que las velocidades de dos puntos O y P de un cuerpo rígido en un movimiento arbitrario siempre cumplen que

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_O)$$

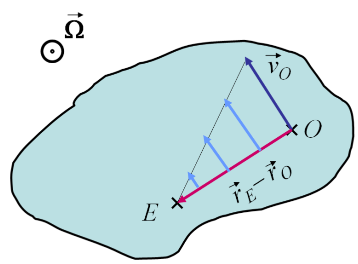
vemos que

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{v}_P = \vec{\Omega} \cdot \vec{v}_O$$

de donde concluimos que si un punto O tiene velocidad perpendicular a $\vec{\Omega}$ entonces todos los puntos del cuerpo tienen velocidad perpendicular a $\vec{\Omega}$. En ese caso podemos encontrar un punto E tal que $\vec{v}_E = 0$. En efecto, la posición de E debe cumplir que

$$0 = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_E - \vec{r}_O) \ ;$$

como $\vec{v}_O \perp \vec{\Omega}$, la ecuación para $\vec{r}_E$ tiene solución.[4] En la Figura vemos una forma de resolver, donde $|\vec{r}_E - \vec{r}_O| = v_O/\Omega$.



Pero la solución no es única; cualquier otro punto perteneciente a la recta paralela a $\vec{\Omega}$ que pasa por E tiene velocidad nula (en el instante considerado). Esa recta es el **eje instantáneo de rotación**.

Si $\vec{\Omega} \cdot \vec{v}_O \neq 0$, entonces podríamos pasar al caso anterior mediante un cambio de sistema de referencia. El nuevo sistema $S\,'$ debería trasladarse con velocidad $\vec{V}$ paralela a $\vec{\Omega}$ para absorber la componente de $\vec{v}_O$ paralela a $\vec{\Omega}$; es decir, $V = \vec{\Omega}\cdot\vec{v}_O\ /\Omega$. Esto enseña que el movimiento más general de un cuerpo rígido es la composición de una rotación alrededor del eje instantáneo y una traslación a lo largo del mismo eje (movimiento tipo *tornillo*). Este es el contenido del **Teorema de Chasles** ($\sim$ 1830).

[4] El punto E podría estar fuera del cuerpo real; aun así debe ser visto como solidario con el movimiento del cuerpo real.