

## MECÁNICA CLÁSICA

Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

**Profesor: Rafael Ferraro**

### Clase 17

11 de junio de 2020

#### Trompo simétrico con punto fijo bajo la acción de la gravedad

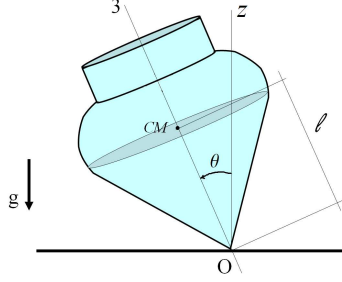
## 1 Trompo simétrico con punto fijo bajo la acción de la gravedad

Consideremos un trompo simétrico con un punto fijo  $O$  en un campo gravitatorio uniforme. Elegiremos el eje  $z$  de la terna inercial en la dirección vertical. Su Lagrangiano es<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \langle \Omega | \mathbf{I}_O | \Omega \rangle - mg\ell \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} I_O (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2} I_{O3} \Omega_3^2 - mg\ell \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} I_O (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{O3} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mg\ell \cos \theta \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>De acuerdo al teorema de Steiner,  $\mathbf{I}_O$  e  $\mathbf{I}_{CM}$  comparten ejes principales. Además es  $I_{O3} = I_{CM3}$ , mientras que el autovalor degenerado cambia:  $I_O = I_{CM} + m \ell^2$ .



Como las coordenadas  $\phi, \psi$  son cíclicas entonces se conservan

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_O \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_{O3} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_{O3} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = I_{O3} \Omega_3 = L_{O3}$$

Así como es  $p_\psi = L_{O3}$ , también se puede ver que  $p_\phi = L_{Oz}$ .<sup>2</sup> Las conservaciones de  $L_{Oz}$  y  $L_{O3}$  se deben a que el torque del peso respecto de  $O$  tiene la dirección de la línea de nodos, que es perpendicular al plano determinado por  $\hat{k}$  y  $\hat{e}_3$  (por otro lado, la fuerza de vínculo aplicada en  $O$  no realiza torque alguno respecto de  $O$ ).

Junto a esas dos magnitudes conservadas tenemos además la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2} I_O (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{O3} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mgl \cos \theta$$

con lo que tenemos tres primeras integrales de movimiento que nos ayudarán a resolver el problema.

Usaremos la conservación de  $p_\phi, p_\psi$  para resolver  $\dot{\phi}, \dot{\psi}$  en función de  $\theta$ :

$$\dot{\phi} = \frac{L_{Oz} - L_{O3} \cos \theta}{I_O \sin^2 \theta} \quad (1)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_{O3}}{I_{O3}} - \frac{L_{Oz}}{I_O} \frac{\cot \theta}{\sin \theta} + \frac{L_{O3}}{I_O} \cot^2 \theta \quad (2)$$

<sup>2</sup>Habíamos visto la descomposición  $\hat{k} = \sin \psi \sin \theta \hat{i}_c + \cos \psi \sin \theta \hat{j}_c + \cos \theta \hat{k}_c$ . Estamos usando la terna fija al cuerpo de ejes principales  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  donde vale  $\vec{L}_O = I_O (\Omega_1 \hat{e}_1 + \Omega_2 \hat{e}_2) + I_{O3} \Omega_3 \hat{e}_3$ . Entonces  $L_{Oz} = \hat{k} \cdot \vec{L}_O$  se obtiene fácilmente empleando las expresiones de  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  en función de los ángulos de Euler.

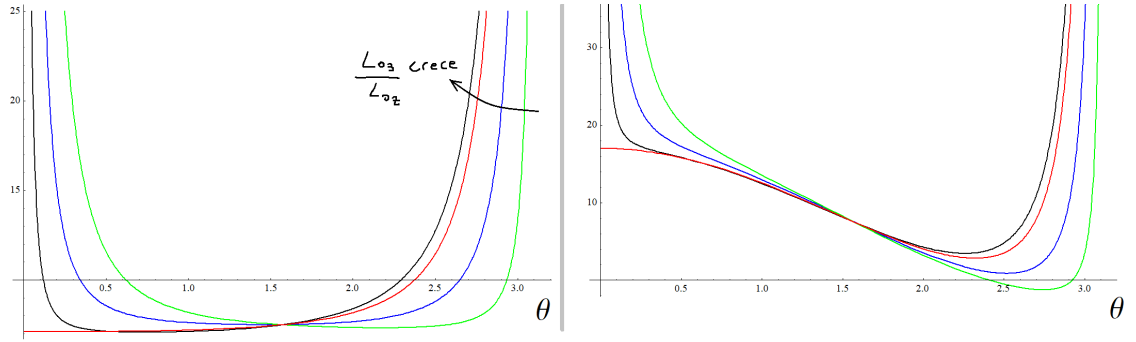
Podemos sustituir estas velocidades generalizadas en la expresión de la energía,<sup>3</sup>

$$E = \frac{1}{2} I_O \left[ \dot{\theta}^2 + \left( \frac{L_{Oz} - L_{O3} \cos \theta}{I_O \sin \theta} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{L_{O3}^2}{I_{O3}} + mgl \cos \theta$$

que puede verse como la conservación de la energía de un sistema de un único grado de libertad  $\theta$ , que pertenece al intervalo  $[0, \pi]$ , con un potencial efectivo

$$V_{efec} = \frac{1}{2} \frac{L_{Oz}^2}{I_O \sin^2 \theta} \left( 1 - \frac{L_{O3}}{L_{Oz}} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L_{O3}^2}{I_{O3}} + mgl \cos \theta$$

Las Figuras muestran  $V_{efec}$  para dos valores de  $mgl$  (menor a la izquierda), y distintos valores de  $L_{O3}/L_{Oz}$ . Las curvas rojas corresponden a  $L_{O3} = L_{Oz}$ .<sup>4</sup>



Vemos que  $V_{efec}$  posee un mínimo en un valor  $\theta_o$  que depende de los parámetros del sistema. Si la energía  $E$  es próxima al valor mínimo de  $V_{efec}$ , entonces podemos tratar la evolución  $\theta(t)$  mediante una aproximación de pequeñas oscilaciones. Para ello deberemos identificar la frecuencia propia de las oscilaciones a partir de la derivada segunda del potencial en  $\theta_o$ . Como  $I_O$  juega el papel de “masa” en la energía  $E$  tendremos

$$\omega_o^2 = \frac{V_{efec}''(\theta_o)}{I_O}$$

<sup>3</sup>No hace falta sustituir  $\dot{\psi}$  porque el segundo término de  $E$  no es más que  $(1/2) I_{O3} \Omega_3^2 = L_{O3}^2 / (2 I_{O3})$ .

<sup>4</sup> $V_{efec}(\pi/2) = \frac{1}{2} \frac{L_{Oz}^2}{I_O} + \frac{1}{2} \frac{L_{O3}^2}{I_{O3}}$ . Para realizar la Figura se escogió el mismo valor de  $V_{efec}(\pi/2)$  en las distintas curvas.

Una vez identificados los valores de  $\theta_o$  y  $\omega_o$  que correspondan a los valores de los parámetros que caracterizan el potencial  $-L_{Oz}^2/I_O$ ,  $L_{O3}/L_{Oz}$  y  $mg\ell$ , entonces la solución de pequeñas oscilaciones será

$$\theta(t) = \theta_o + \eta(t) \simeq \theta_o + \eta_o \cos(\omega_o t + \delta)$$

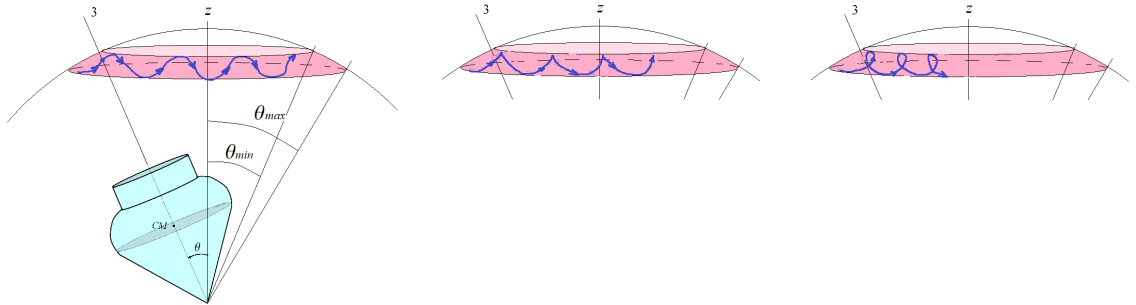
donde  $\eta_o$  es la amplitud de la oscilación, que depende de cuánto se aparta  $E$  del mínimo de potencial  $V_{efec}(\theta_o)$ . Reemplazando esta solución en (1) y (2) obtendremos las velocidades  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$ . Si la condición inicial para  $\theta(t)$  es  $\theta(0) = \theta_o$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$  (es decir,  $E = V_{efec}(\theta_o)$ ), entonces el eje de simetría del trompo se mantendrá en equilibrio estable en  $\theta_o$ . En ese caso las velocidades tendrán valores constantes  $\dot{\phi}_o$  y  $\dot{\psi}_o$ . En cambio, si  $\theta$  oscila alrededor de  $\theta_o$ , también oscilarán  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$  alrededor de  $\dot{\phi}_o$  y  $\dot{\psi}_o$ . Al primer orden perturbativo  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$  se aproximan por

$$\dot{\phi}(t) \simeq \dot{\phi}_o + \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} \right|_{\theta_o} [\theta(t) - \theta_o] = \dot{\phi}_o + \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} \right|_{\theta_o} \eta(t)$$

$$\dot{\psi}(t) \simeq \dot{\psi}_o + \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \theta} \right|_{\theta_o} [\theta(t) - \theta_o] = \dot{\psi}_o + \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \theta} \right|_{\theta_o} \eta(t)$$

Así ambas velocidades oscilan alrededor de los valores medios  $\dot{\phi}_o$  y  $\dot{\psi}_o$ .

Como  $\theta$  es la inclinación del eje de simetría del trompo (eje  $\hat{e}_3$ ) respecto de la vertical, mientras que  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  representan la velocidad de precesión del eje  $\hat{e}_3$  y la velocidad de giro del trompo alrededor del eje  $\hat{e}_3$  respectivamente, se concluye que el eje de simetría del trompo “cabecea” (oscilación de  $\theta$ ) realizando un movimiento conocido con el nombre de **nutación**. Mientras esto sucede las velocidades de precesión y de giro alrededor de  $\hat{e}_3$  sufren también oscilaciones con la frecuencia de la nutación. La Figura muestra el movimiento del eje de simetría alrededor de la vertical; el movimiento es el resultado de la combinación de nutación y precesión.



i) En el primer caso la velocidad de la precesión  $\dot{\phi}$  es siempre positiva; es lo que sucede si  $|(\partial\dot{\phi}/\partial\theta)_{\theta_o}\eta_o| < \dot{\phi}_o$ .

ii) El segundo caso corresponde a  $|(\partial\dot{\phi}/\partial\theta)_{\theta_o}\eta_o| = \dot{\phi}_o$ ;  $\dot{\phi}$  se anula cuando la nutación está en un punto de retorno.

iii) En el tercer caso es  $|(\partial\dot{\phi}/\partial\theta)_{\theta_o}\eta_o| > \dot{\phi}_o$ ; por lo tanto la contribución de la nutación consigue revertir el signo de  $\dot{\phi}$ , y la precesión por momentos retrocede.<sup>5</sup>

La Tierra está sometida a pequeños torques ejercidos principalmente por la Luna y el Sol. Estos torques producen la nutación del eje terrestre, junto con una precesión lenta del mismo alrededor de la dirección perpendicular al plano de la eclíptica. La precesión tiene un período de unos 26000 años, y es conocida como *precesión de los equinoccios* pues el cambio de la orientación del eje terrestre modifica el punto de la órbita donde el Sol ilumina a plomo sobre el Ecuador.<sup>6</sup>

### 1.1 Valores de $\theta_o$ y $\omega_o^2$

El ángulo  $\theta_o$  minimiza el potencial efectivo; si  $V_{efec}'(\theta_o) = 0$  entonces

$$\left(1 + \frac{L_{O3}^2}{L_{Oz}^2} - 2 \frac{L_{O3}}{L_{Oz}} \cos \theta_o\right) \cos \theta_o - \frac{L_{O3}}{L_{Oz}} \sin^2 \theta_o + \frac{mgl I_O}{L_{Oz}^2} \sin^4 \theta_o = 0 \quad (3)$$

Vemos que el valor de  $\theta_o$  depende de dos parámetros:  $L_{O3}/L_{Oz}$  y  $mgl I_O/L_{Oz}^2$ . En particular, como muestran las curvas rojas de la Figura,  $\theta_o = 0$  es solución cuando  $L_{O3} = L_{Oz}$ .<sup>7</sup>

Para conocer la frecuencia de pequeñas oscilaciones de  $\theta$ , tendremos que calcular la segunda derivada del potencia efectivo, pues  $\omega_o^2 = V_{efec}''(\theta_o)/I_O$ ; así resulta

$$\omega_o^2 = \frac{L_{O3} L_{Oz} - mgl I_O (3 \cos^2 \theta_o + 1)}{I_O^2 \cos \theta_o} \quad (4)$$

<sup>5</sup> $\partial\dot{\phi}/\partial\theta > 0$  para todo valor de  $\theta$  si  $L_{O3} > L_{Oz} > 0$ .

<sup>6</sup>El pequeño torque aparece, por un lado, porque el campo gravitatorio del Sol y la Luna no es uniforme sobre la extensión de nuestro planeta. Por el otro lado, la Tierra es achatada y su eje está inclinado respecto de la direcciones Tierra-Sol y Tierra-Luna. De esa forma el "lóbulo" de la Tierra que mira hacia el Sol (o la Luna) recibe una fuerza mayor que el lóbulo opuesto.

<sup>7</sup>Si  $L_{O3} = L_{Oz}$  se tiene que  $\theta_o = 0$  es un mínimo para valores chicos de  $mgl I_O/L_{Oz}^2$  (equilibrio estable del trompo vertical). Para valores grandes de ese parámetro el mínimo está en  $\theta_o = \arccos \left[ -1 + \sqrt{\frac{L_{Oz}^2}{mgl I_O}} \right]$

## 1.2 Caso particular: el trompo vertical

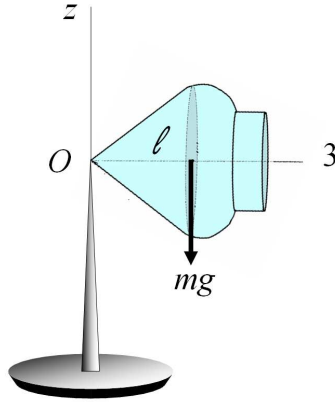
En los gráficos de potencial efectivo se ve que el caso  $L_{O3} = L_{Oz}$  puede tener uno o dos puntos de equilibrio. En ambos casos  $\theta_o = 0$  es un punto de equilibrio, que corresponde al **trompo vertical**. El gráfico muestra que si el valor de  $mg\ell$  es importante, entonces  $\theta_o = 0$  será inestable. Para que el equilibrio del trompo vertical sea estable debemos pedir que  $\omega_o^2 > 0$ , es decir

$$L_O^2 = L_{O3} L_{Oz} > 4 mg\ell I_O$$

Normalmente esta condición se pierde por rozamiento en el pivote.

Notar que en el trompo vertical el eje de simetría  $\hat{e}_3$  coincide con el eje  $z$  del sistema de referencia. En ese caso la línea de nodos pierde su significado, y el ángulo azimutal debe verse como  $\phi + \psi$ ; aunque las velocidades  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\psi}$  están indeterminadas en  $\theta = 0$ , el límite de  $\dot{\phi} + \dot{\psi}$  existe y vale  $L_{O3}/I_{O3}$ .

## 2 Trompo horizontal



Las ecuaciones (1) y (2) dicen que si  $\theta = \pi/2$  entonces los valores constantes de  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  son:

$$\dot{\phi} = \frac{L_{Oz}}{I_O} , \quad \dot{\psi} = \frac{L_{O3}}{I_{O3}}$$

El eje de simetría del trompo precede a velocidad constante  $\dot{\phi}$ , a la vez que el trompo gira alrededor de su eje de simetría a velocidad constante  $\dot{\psi}$ .

Sin embargo estas constantes de movimiento no tienen valor arbitrario pues deben asegurar que  $\theta = \pi/2$  sea un punto de equilibrio (mínimo de  $V_{efec}$ ). Para que  $\theta_o = \pi/2$  sea solución de la ecuación (3) se debe satisfacer

$$L_{O3} L_{Oz} = mg\ell I_O \quad (5)$$

es decir que la velocidad de precesión está relacionada con la velocidad de giro,

$$\dot{\phi}_o = \frac{mg\ell}{L_{O3}},$$

que es el resultado que conocemos del curso de mecánica elemental.

Para obtener la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de  $\theta_o = \pi/2$ , reemplazamos (5) en  $V_{efec}$  y calculamos nuevamente  $V_{efec}''(\theta_o)$ ; así evitaremos la indeterminación que aparecería en la expresión (4) para  $\theta_o = \pi/2$ . Se obtiene que

$$\omega_o^2 = \frac{L_{O3}^2 + L_{Oz}^2}{I_O^2}$$

### 3 Trompo rápido

Se pueden obtener resultados similares a los precedentes para  $\theta_o \approx \pi/2$  bajo la aproximación de trompo rápido:  $|L_{O3}| \gg |L_{Oz}|$ . En efecto, sea

$$\theta_o = \pi/2 - \varepsilon$$

Entonces

$$\cos \theta_o = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \sin \theta_o = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) ahora dicen que en ausencia de nutación (es decir, cuando  $\theta(t) = \theta_o$ ) las velocidades de precesión y giro son

$$\dot{\phi}_o \simeq \frac{L_{Oz} - L_{O3} \varepsilon}{I_O}, \quad \dot{\psi}_o \simeq \frac{L_{O3}}{I_{O3}} - \frac{L_{Oz}}{I_O} \varepsilon \quad (6)$$

Para que no haya nutación,  $\theta_o = \pi/2 - \varepsilon$  debe cumplir la condición (3) para dar un mínimo del  $V_{efec}$ ,

$$\left(1 + \frac{L_{O3}^2}{L_{Oz}^2}\right) \varepsilon - \frac{L_{O3}}{L_{Oz}} + \frac{mg\ell I_O}{L_{Oz}^2} \simeq 0$$

que con la aproximación de trompo rápido se convierte en

$$\frac{L_{O3}^2}{L_O^2 z} \varepsilon - \frac{L_{O3}}{L_O z} + \frac{mg\ell I_O}{L_O^2 z} \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad L_{O3} L_{Oz} - L_{O3}^2 \varepsilon \simeq mg\ell I_O \quad (7)$$

Reemplazando en (6) obtenemos la expresión del ejemplo anterior para la velocidad de precesión:

$$\dot{\phi}_o \simeq \frac{mg\ell}{L_{O3}}$$

También la velocidad de giro tiene la misma expresión que en el ejemplo anterior si el trompo es rápido:

$$\dot{\psi}_o \simeq \frac{L_{O3}}{I_{O3}}$$

La frecuencia (4) de las oscilaciones en torno al punto de equilibrio se aproxima por

$$\omega_o^2 \simeq \frac{L_{O3} L_{Oz} - mg\ell I_O}{I_O^2 \varepsilon}$$

y usando (7) resulta

$$\omega_o \simeq \frac{|L_{O3}|}{I_O} \approx \frac{|L_O|}{I_O}$$

El trompo rápido combina una precesión lenta con una nutación rápida (nótese que al orden más bajo es  $\dot{\phi} \approx L_{Oz}/I_O$ ). La nutación es difícil de observar porque se amortigua rápidamente debido a la fricción en el pivote.

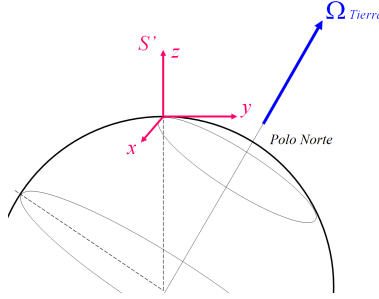
## 4 Giróscopo

Un giróscopo es un trompo simétrico montado en una suspensión cardánica, que fija la posición de su  $CM$  sin limitar los grados de libertad de rotación. La suspensión cardánica no transmite torques al trompo, de modo que si éste gira sobre su eje de simetría, la conservación del momento angular hará que la orientación del eje del trompo se mantenga fija, independientemente de los movimientos del soporte. Este comportamiento es aprovechado en sistemas de navegación diversos. En 1852 Foucault construyó el primer giróscopo para ofrecer una nueva demostración de la rotación de la Tierra (además de su famoso péndulo), basada en la persistencia de la orientación del eje de rotación del giróscopo.



## 4.1 Girocompás de Foucault

Foucault se dio cuenta de que una montura diferente permitía usar el giróscopo para señalar la dirección norte-sur. Supongamos que la montura sólo permite el desplazamiento libre del eje de rotación del giróscopo en direcciones horizontales sobre la superficie terrestre (por ejemplo, una montura “semi-cardánica”). Si utilizamos un sistema de referencia  $S'$  fijo a la Tierra con el eje  $z$  en la dirección vertical, entonces el soporte no ejercerá torques en  $z$  para permitir la libre orientación del giróscopo en el plano  $x - y$ , pero aplicará torques en  $x$  e  $y$  para evitar que el eje de rotación del giróscopo adquiera una componente vertical (en  $z$ ) a medida que la Tierra gire.



Para entender la dinámica del girocompás usemos el teorema de la derivada relativa aplicado a  $\vec{L}_{CM}$  :

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}\Big|_S = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}\Big|_{S'} + \vec{\Omega}_{Tierra} \times \vec{L}_{CM}$$

En el sistema inercial  $S$ ,  $d\vec{L}_{CM}/dt$  es el torque  $\vec{N}_{CM}^{ext}$  provisto por el soporte; entonces

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}\Big|_{S'} = \vec{N}_{CM}^{ext} - \vec{\Omega}_{Tierra} \times \vec{L}_{CM}$$

En el sistema  $S'$  fijo a la Tierra,  $-\vec{\Omega}_{Tierra} \times \vec{L}_{CM}$  es un torque debido a fuerzas de inercia.<sup>8</sup> En particular, como  $N_{CMz}^{ext} = 0$ , para la componente  $z$  se tiene que

$$\frac{dL_{CMz}}{dt}\Big|_{S'} = -(\vec{\Omega}_{Tierra} \times \vec{L}_{CM})_z$$

Si en  $S'$  la componente  $z$  de  $\vec{L}_{CM}$  es inicialmente nula, la rotación terrestre generará un valor distinto de cero para la proyección vertical de  $\vec{L}_{CM}$  en el sistema fijo a la Tierra. Eso significa que el eje del giróscopo cambia

<sup>8</sup>Para ver todos los torques de inercia en  $S'$  hay que escribir  $\vec{L}_{CM}$  en términos de  $\vec{L}'_{CM}$ .

su orientación en el plano horizontal. Sin embargo hay una orientación del giróscopo que anula la componente  $z$  del torque de las fuerzas de inercia: cuando  $\vec{L}_{CM}$  tiene dirección norte-sur (es decir que  $\vec{L}_{CM}$  tiene la orientación del eje  $y$  de la Figura). Analicemos la estabilidad de esa orientación de equilibrio:

$$-(\vec{\Omega}_{Tierra} \times \vec{L}_{CM})_z = -\Omega_{Tierra \ x} L_{CM \ y} + \Omega_{Tierra \ y} L_{CM \ x} = \Omega_{Tierra \ y} L_{CM \ x}$$

que es positivo si  $L_{CM \ x} > 0$ , y negativo si  $L_{CM \ x} < 0$ , lo que garantiza la estabilidad.<sup>9</sup> Así, el torque de las fuerzas de inercia lleva a orientar el giróscopo hacia el norte. Se requiere un mecanismo de amortiguación para estabilizar la alineación.

---

<sup>9</sup> $\Omega_{Tierra \ y} > 0$  porque la Tierra gira de oeste a este.