Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA
Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 19
25 de junio de 2020

Principio variacional. Función principal de Hamilton
Estructura simpléctica. Corchete de Poisson

1 Principio variacional de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton también pueden verse como el resultado de un principio variacional, donde la acción que se hace estacionaria es una funcional $S[q(t), p(t)]$ de $2n$ funciones independientes $q_\mu(t), p_\mu(t)$:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\ dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ dq_\mu - H\ dt \right)$$

Entonces, usando que la variación de la derivada es la derivada de la variación,

$$\begin{aligned} \delta S[q(t), p(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\mu=1}^{n} (\delta p_\mu\ dq_\mu + p_\mu\ d(\delta q_\mu)) - \delta H\ dt \right) \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu\ \delta q_\mu|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\mu=1}^{n} (\delta p_\mu\ dq_\mu - dp_\mu\ \delta q_\mu) - \delta H\ dt \right) \end{aligned}$$

y como

$$\delta H = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \delta q_\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \delta p_\mu \right)$$

se obtiene que

$$\delta S[q(t), p(t)] = \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \, \delta q_\mu |_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mu=1}^{n} \left[(dq_\mu - \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \, dt) \, \delta p_\mu - (dp_\mu + \frac{\partial H}{\partial q_\mu} \, dt) \, \delta q_\mu \right] \tag{1}$$

Los dos paréntesis que aparecen dentro de la sumatoria se anulan por separado cuando se cumplen las ecuaciones de Hamilton. Entonces, la validez de las ecuaciones de Hamilton es la condición para que la acción $S[q(t), p(t)]$ sea estacionaria ante variaciones $\delta q_\mu(t)$, $\delta p_\mu(t)$ arbitrarias e independientes que dejen fijos los extremos de integración $q_\mu(t_1)$ y $q_\mu(t_2)$.

2 Función principal de Hamilton

Si la acción es evaluada en la evolución real del sistema –es decir, las funciones $q_\mu(t)$, $p_\mu(t)$ satisfacen las ecuaciones de Hamilton– obtendremos una magnitud que depende de los valores $q_\mu(t_1)$, $q_\mu(t_2)$ que caractericen la solución elegida; es decir, obtendremos una función $S(q_1, t_1; q_2, t_2)$ que llamaremos **función principal de Hamilton**. Por ejemplo, veamos el caso de la partícula libre, donde la solución de las ecuaciones de movimiento es

$$q(t) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}(t - t_1), \qquad p = m \, \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} \; ;$$

la acción evaluada en esa solución es

$$S(q_1, t_1; q_2, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \, \left(\frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} \right)^2 \, dt = \frac{m}{2} \, \frac{(q_2 - q_1)^2}{t_2 - t_1}$$

Una vez que la acción ha sido integrada sobre la evolución real del sistema podemos preguntarnos qué propiedades tiene el resultado como función de los valores de q_μ en los extremos de integración t_1 y t_2. Para ello es suficiente ver cómo cambia la funcional acción ante cambios en los extremos; ese comportamiento está contenido en la ecuación (1), de donde se concluye que

$$dS(q_1, t_1; q_2, t_2) = \sum_{\mu=1}^{n} \left(p_{\mu_2} \, dq_{\mu_2} - p_{\mu_1} \, dq_{\mu_1} \right)$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial q_{\mu_2}} S(q_1,t_1;q_2,t_2) = p_{\mu_2} \ , \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}} S(q_1,t_1;q_2,t_2) = -p_{\mu_1} \tag{2}$$

Por ejemplo, en el caso de la partícula libre resulta

$$\frac{\partial}{\partial q_2} S(q_1,t_1;q_2,t_2) = m \ \frac{q_2-q_1}{t_2-t_1} = p$$

Estas derivadas corresponden al cambio de la acción S cuando se la evalúa sobre dos evoluciones reales entre t_1 y t_2 que empiezan o terminan en puntos vecinos del espacio de configuración. Podemos preguntarnos, además, qué cambio se producirá si evaluamos S sobre la misma evolución real pero dejando transcurrir un poco más (o menos) de tiempo; es decir, cuánto valen las derivadas parciales de la función principal de Hamilton respecto de t_1 y t_2. Por definición sabemos que

$$\frac{dS}{dt_2} = L(q_2,\dot{q}_2,t_2) \ , \qquad\qquad \frac{dS}{dt_1} = -L(q_1,\dot{q}_1,t_1) \ ,$$

Por otro lado,

$$L(q_2,\dot{q}_2,t_2) = \frac{dS}{dt_2} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_{\mu_2}} \ \dot{q}_{\mu_2} + \frac{\partial S}{\partial t_2} = \sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu_2} \ \dot{q}_{\mu_2} + \frac{\partial S}{\partial t_2}$$

de donde resulta que

$$\frac{\partial}{\partial t_2} S(q_1,t_1;q_2,t_2) = -H(q_2,p_2,t_2)$$

Del mismo modo

$$\frac{\partial}{\partial t_1} S(q_1,t_1;q_2,t_2) = H(q_1,p_1,t_1)$$

En estas relaciones vemos nuevamente que entre el tiempo y el Hamiltoniano aparece una relación similar a la que observan las variables conjugadas en la ecuación (2).

3 Estructura simpléctica

Podemos organizar las $2n$ variables canónicas del espacio de las fases en una columna de $2n$ componentes,

$$|\eta> \;=\; \begin{pmatrix} q_1 \\ \ldots \\ q_n \\ p_1 \\ \ldots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de Hamilton relacionan las derivadas de las componentes de $|\eta>$ –es decir, el vector tangente a la evolución en el espacio de las fases– con las derivadas del Hamiltoniano respecto de las componentes de $|\eta>$. En efecto, las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir matricialmente como

$$|\dot{\eta}> \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} |\frac{\partial H}{\partial \eta}> \;\equiv\; \omega\, |\frac{\partial H}{\partial \eta}> \tag{3}$$

donde cada bloque de la matriz cuadrada que llamamos ω es a su vez una matriz cuadrada de $n \times n$. La relación matricial puede escribirse en notación de índices,

$$\dot{\eta}_A = \sum_{B=1}^{2n} \omega_{AB} \frac{\partial H}{\partial \eta_B}$$

La forma simple de las ecuaciones de Hamilton no sólo muestra la evolución de las variables canónicas en cada instante, en términos de las derivadas del Hamiltoniano, sino que permite conocer también cómo evoluciona cualquier función $f(q,p)$ del estado del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \dot{p}_\mu \right) \\ &= \sum_{A=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \eta_A} \dot{\eta}_A = \;< \frac{\partial f}{\partial \eta} | \dot{\eta} > \;=\; < \frac{\partial f}{\partial \eta} | \omega | \frac{\partial H}{\partial \eta} > \end{aligned}$$

La matriz antisimétrica ω define una estructura geométrica en el espacio de las fases llamada **estructura simpléctica** ($\sigma\upsilon\mu\pi\lambda o\kappa o\varsigma$ significa *complejo*).

4 Corchete de Poisson

La estructura simpléctica introduce una suerte de “producto” antisimétrico entre funciones en el espacio de las fases conocido como **corchete de Poisson** $\{f, g\}$, y se define así

$$\{f, g\} \equiv \ < \frac{\partial f}{\partial \eta}|\omega|\frac{\partial g}{\partial \eta} > \ = \ \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial q_\mu} \right) \tag{4}$$

De acuerdo con lo visto en la Sección anterior, la evolución de cualquier función $f(q, p, t)$ del estado del sistema y del tiempo está dada por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \tag{5}$$

Una magnitud $f(q, p)$ se conserva si

$$\{f, H\} = 0 \tag{6}$$

Las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como

$$\dot{q}_\mu = \{q_\mu, H\}, \qquad \qquad \dot{p}_\mu = \{p_\mu, H\} \tag{7}$$

4.1 Propiedades

i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (antisimetría)

ii) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$ (linealidad)

iii) $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}$

iv) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (identidad de Jacobi)
La identidad de Jacobi permite mostrar que si $f(q, p)$ y $g(q, p)$ se conservan entonces $\{f, g\}$ también se conserva.

4.2 Casos particulares

i) $\{q_\mu, q_\nu\} = 0 = \{p_\mu, p_\nu\}$

ii) $\{q_\mu, p_\nu\} = \delta_{\mu\nu}$

iii) $\{q_\mu, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_\mu}$

iv) $\{p_\mu, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_\mu}$

5 Transformaciones canónicas

En la formulación Lagrangiana enfatizamos que la misma es independiente de las coordenadas generalizadas que se elijan. Las ecuaciones de Lagrange son covariantes (no cambian su forma) ante cambios de coordenadas en el espacio de configuración. Ahora nos interesa saber cuáles son las transformaciones de variables en el espacio de las fases que no alteran la forma de las ecuaciones de Hamilton. Como hemos agrupado las $2n$ variables canónicas en una columna $|\eta>$, podemos escribir un cambio de variables general como

$$\eta_A \longrightarrow N_A = N_A(\eta)$$

Entonces

$$\dot{\eta}_A \longrightarrow \dot{N}_A = \sum_{B=1}^{2n} \frac{\partial N_A}{\partial \eta_B} \dot{\eta}_B \equiv \sum_{B=1}^{2n} M_{AB}(\eta)\, \dot{\eta}_B$$

o en notación matricial

$$|\dot{\eta}> \longrightarrow |\dot{N}> = \mathbf{M}\, |\dot{\eta}> \tag{8}$$

Por otro lado es

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_A} = \sum_{B=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial N_B} \frac{\partial N_B}{\partial \eta_A} = \sum_{B=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial N_B} M_{BA}(\eta) \ ,$$

que en notación matricial se escribe[1]

$$< \frac{\partial f}{\partial \eta}| = < \frac{\partial f}{\partial N}|\ \mathbf{M} \tag{9}$$

o bien

$$|\frac{\partial f}{\partial \eta}> = \mathbf{M}^T\, |\frac{\partial f}{\partial N}> \tag{10}$$

Queremos saber qué característica debe tener la matriz $\mathbf{M}$, cuyas componentes son las derivadas de las variables nuevas respecto de las variables viejas, para que las ecuaciones de Hamilton no cambien de forma. Si multiplicamos la ecuación (3) a izquierda por $\mathbf{M}$ obtenemos

$$\mathbf{M}\, |\dot{\eta}> = \mathbf{M}\, \omega\, |\frac{\partial H}{\partial \eta}>$$

[1] En (8) la matriz $\mathbf{M}$ va a la izquierda mientras que en (9), debido a la forma en que se combinan los índices de fila y columna en las sumatorias respectivas. En lenguaje de *geometría diferencial*, estas dos ecuaciones representan la transformación de un vector y una *forma diferencial* ante cambio de variables.

es decir,

$$|\dot{N}> \;=\; \mathbf{M}\;\omega\;\mathbf{M}^T\;|\frac{\partial H}{\partial N}>$$

Entonces, para mantener la forma de las ecuaciones de Hamilton se requiere que

$$\mathbf{M}\;\omega\;\mathbf{M}^T \;=\; \omega \tag{11}$$

Es decir que la matriz **M** debe preservar la estructura simpléctica. Las matrices de $2n \times 2n$ que cumplen la ecuación (11) se denominan **matrices simplécticas**. Las transformaciones de variables canónicas tales que **M** resulta simpléctica se denominan **transformaciones canónicas**. Vemos entonces que existen distintos juegos de variables canónicas para un mismo sistema físico, lo que permite elegir el juego de variables que sea más apto para la integración de las ecuaciones de movimiento.[2]

5.1 Propiedades

i) El corchete de Poisson es invariante ante transformaciones canónicas:

$$\begin{aligned}\{f,g\}_{q,p} \;&=\; <\frac{\partial f}{\partial \eta}|\omega|\frac{\partial g}{\partial \eta}> \;=\; <\frac{\partial f}{\partial \eta}|\mathbf{M}\;\omega\;\mathbf{M}^T|\frac{\partial g}{\partial \eta}> \\ &=\; <\frac{\partial f}{\partial N}|\omega|\frac{\partial g}{\partial N}> \;=\; \{f,g\}_{Q,P}\end{aligned}$$

Esto significa que el corchete de Poisson tiene el mismo valor ya sea que se lo calcule con las variables viejas (q_μ, p_μ) o con las variables nuevas (Q_μ, P_μ).

ii) $|\det \mathbf{M}| = 1$. En efecto,

$$\det\omega = \det(\mathbf{M}\;\omega\;\mathbf{M}^T) = (\det \mathbf{M})^2 \det\omega \;\Rightarrow\; \det \mathbf{M} = \pm 1$$

Esto significa que el volumen canónico en el espacio de las fases se escribe en la misma forma en cualquier juego de variables canónicas:

$$\begin{aligned}dQ_1...dQ_n dP_1...dP_n \;&=\; dN_1...dN_{2n} = |\det\frac{\partial N_A}{\partial \eta_B}|\; d\eta_1...d\eta_{2n} \\ &=\; |\det \mathbf{M}|\; d\eta_1...d\eta_{2n} = dq_1...dq_n dp_1...dp_n\end{aligned}$$

[2] La ecuación (11) puede compararse con la definición de las rotaciones, que podemos escribir $\mathbf{R}\;\mathbf{1}\;\mathbf{R}^T = \mathbf{1}$. Las rotaciones en el espacio físico preservan la estructura euclidiana del mismo, relacionando distintos juegos de coordenadas cartesianas. Al igual que las rotaciones, las matrices simplécticas forman un grupo.

La invariancia del volumen canónico no es más que el último miembro de una secuencia de invariantes conocidos como **invariantes de Poincaré**. En efecto, la independencia de las variables canónicas escogidas también vale para

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &\equiv \int\!\!\int \sum_\mu dq_\mu dp_\mu \\
\mathcal{J}_2 &\equiv \int\!\!\int \quad \int\!\!\int \sum_{\mu<\nu} dq_\mu dp_\mu \;\; dq_\nu dp_\nu \\
&\dots \\
\mathcal{J}_n &\equiv \int\!\!\int \;\; \dots \;\; \int\!\!\int dq_1 dp_1 \;\; \dots \;\; dq_n dp_n \quad ,
\end{aligned}$$

lo que muestra que la estructura simpléctica habla de una geometría de áreas y volúmenes.

5.2 Ejemplo

Veamos qué significa que $\mathbf{M}$ sea simpléctica en un caso de un solo grado de libertad, cuando $\mathbf{M}$ es una matriz de 2×2:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Entonces resulta que

$$\mathbf{M}\ \omega\ \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 0 & \{Q,P\}_{q,p} \\ \{P,Q\}_{q,p} & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $\mathbf{M}$ sea simpléctica la transformación $Q = Q(q,p),\ P = P(q,p)$ debe cumplir que

$$\{Q,P\}_{q,p} = 1$$

La transformación es canónica si las nuevas variables conjugadas tiene corchete de Poisson igual a 1, como debe ser.

Como ejemplo sencillo, veamos una *transformación de punto*

$$Q = Q(q)\ ,$$

es decir, un cambio de coordenadas en el espacio de configuración. ¿Cómo debe ser la transformación $P = P(q,p)$ para que el cambio de variables resulte canónico? Se debe preservar el corchete de Poisson,

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial q}\,\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\,\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\,\frac{\partial P}{\partial p}\ ;$$

entonces

$$P(q,p) = \frac{p}{\frac{\partial Q}{\partial q}}$$

Lo dicho hasta aquí nos enseña que existen muchos juegos posibles de variables canónicas. También nos da herramientas para verificar si una transformación es o no canónica. Pero no nos da un método para construir este tipo de transformaciones. La clase que viene veremos un método para generar transformaciones canónicas.