Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA
Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 23
13 de julio de 2020

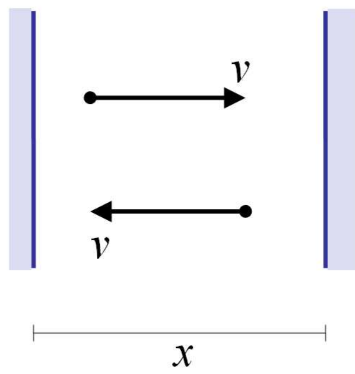
Invariantes adiabáticos

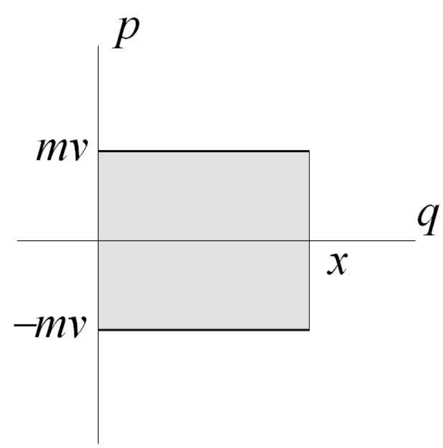
1 Invariantes adiabáticos

Las soluciones de sistemas conservativos pueden servir para obtener soluciones aproximadas de sistemas no conservativos. Si resolvemos las ecuaciones para el Hamiltoniano conservativo $H(q, p, \lambda)$, donde λ es un parámetro, podremos tener una idea de cómo sería la evolución cuando λ sea una función del tiempo $\lambda(t)$ que varía lentamente. Pero para poder precisar qué significa "lentamente", el sistema conservativo debería contener un tiempo característico. Si el sistema conservativo es periódico con período T entonces $\lambda(t)$ debería cambiar muy poco en el tiempo T; esos cambios lentos se denominan **adiabáticos**. Veremos que las variables acción son casi constantes durante un proceso adiabático.[1]

[1] No siempre la variación lenta de los parámetros implica que la solución se parece a la del problema conservativo respectivo. Como sabemos, una resonancia paramétrica puede resultar de una variación lenta –pero adecuada– de un parámetro. Esta cuestión se relaciona con los problemas de convergencia de los desarrollos perturbativos.

Para comenzar, mostraremos la **invariancia adiabática** de la variable acción J en un sistema periódico donde una partícula libre rebota elásticamente entre dos paredes





El período de este sistema es $T = 2x/v$, y el valor de la variable acción es $J = 2\ m\ v\ x$. Si ahora dejamos que una de las paredes se mueva a velocidad constante V, entonces deberemos recalcular J, ya que la velocidad de la partícula cambiará al chocar contra la pared móvil, cuya posición habrá cambiado también. Así pasaremos de un sistema conservativo a un sistema que no conserva la energía. Sabemos que en un choque elástico se conserva la velocidad relativa, entonces

$$v_i - V = v_f + V \qquad \Rightarrow \qquad \Delta v = -2V \qquad \text{ó} \qquad \Delta p = -2mV$$

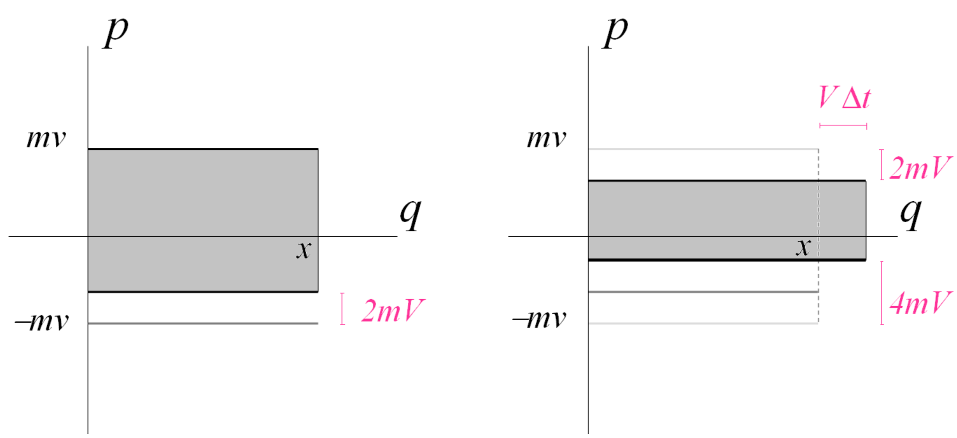
En la siguiente Figura, x es la distancia entre paredes cuando ocurre el primer choque con la pared móvil ubicada a la derecha, y Δt es el tiempo transcurrido hasta el siguiente choque:

Para estar en condiciones adiabáticas deberemos pedir que el desplazamiento Δx de la pared durante el período T del sistema sea pequeño,

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{V\ T}{x} = \frac{V\ 2x/v}{x} = 2\ \frac{V}{v} << 1\ ,$$

es decir, $V << v$ como se esperaba. En esa aproximación el cambio del área sombreada, que es el valor de J, entre un ciclo y el siguiente se calcula como

$$\delta J = \text{base}\ \delta\text{altura} + \text{altura}\ \delta\text{base} + \mathcal{O}(V^2)$$



La Figura muestra que al pasar de un ciclo al siguiente es δaltura$= -4mV$ y δbase$= V\ \Delta t$, donde Δt es el tiempo que demora la partícula en recorrer la distancia de ida y vuelta hasta que choca nuevamente con la pared móvil. Como estamos calculando al primer orden en V, y Δt está multiplicado por V, podemos aproximar Δt al orden cero como $\Delta t \approx 2x/v$; por el mismo motivo aproximamos la altura por su valor de orden cero $2mv$; entonces

$$\delta J = x\ (-4mV) + 2mv\ V\ \frac{2x}{v} + \mathcal{O}(V^2) = \mathcal{O}(V^2)$$

J se comporta como un invariante adiabático porque $\delta J = \mathcal{O}(\dot{x}^2)$, siendo x el parámetro que varía lentamente en el tiempo. El cambio de J es mucho más lento que el cambio del parámetro x. Contrariamente, la energía sufre cambios de primer orden en V; el cambio de la energía en cada ciclo es

$$\delta H = \frac{p^2}{2m}\ - \frac{(p - 2mV)^2}{2m} = 2pV + \mathcal{O}(V^2)$$

1.1 Aplicación: expansión adiabática de un gas

El ejemplo anterior puede aplicarse a la expansión adiabática de un gas en una caja. La invariancia adiabática de $J = 2\ m\ v\ x$ se reproduce en cada una de las tres dimensiones: $v_x\ x$, $v_y\ y$, $v_z\ z$, son aproximadamente constantes de movimiento. Elevando al cuadrado, y promediando sobre las partículas del gas,

$$< v_x^2 >\ x^2 \simeq cte\ , \qquad < v_y^2 >\ y^2 \simeq cte\ , \qquad < v_z^2 >\ z^2 \simeq cte\ .$$

Por isotropía, podemos afirmar que $< v_x^2 >=< v_y^2 >=< v_z^2 >$, que a su vez es proporcional a la temperatura del gas (que es una medida de la energía cinética media del gas). Entonces, multiplicando las tres relaciones anteriores,

$$\text{temperatura}^3 \; x^2 y^2 z^2 \simeq cte$$

Es decir

$$\text{temperatura}^3 \; \text{volumen}^2 \simeq cte$$

que es la ley de expansión adiabática de los gases ideales monoatómicos.

2 Formulación general

Las variables ángulo-acción fueron definidas mediante una transformación canónica generada por la solución S_o de la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo,

$$H\left(q, \frac{\partial S_o}{\partial q}; \lambda\right) = E(J; \lambda)$$

Para el caso en que el Hamiltoniano dependa explícitamente del tiempo a través de la variación lenta del parámetro λ, entonces la ecuación anterior ya no resulta de la ecuacion de Hamilton-Jacobi (hay que volver a la ecuación de Hamilton-Jacobi dependiente del tiempo), pero nada impide seguir usando la función $S_o(q, J; \lambda(t))$ para generar una transformación canónica. Como la generatriz ahora depende del tiempo entonces tendremos un nuevo Hamiltoniano $\overline{H}$,

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial q} \, , \qquad \qquad \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial J} \, , \\ \overline{H} &= H + \frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial t} = H(J; \lambda) + \frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial \lambda} \; \dot{\lambda} \end{aligned} \tag{1}$$

Al escribir las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables habrá que escribir $\overline{H}$ como $\overline{H}(\theta, J)$. Aquí debemos cuidar que la derivada $\partial S_o / \partial \lambda$ en el segundo término de $\overline{H}$ se realice antes del reemplazo de q como $q(\theta, J)$. Como la función $q(\theta, J)$ tiene, en general, una dependencia en λ, las operaciones de derivar respecto de λ y reemplazar $q(\theta, J; \lambda)$ no conmutan. Las ecuaciones de Hamilton resultan

$$\frac{\dot{\theta}}{2\pi} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial J}|_\theta = \frac{\partial H}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{\partial S_o(q, J; \lambda)}{\partial \lambda}|_{q=q(\theta, J; \lambda)}\right) \; \dot{\lambda} \tag{2}$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \frac{\theta}{2\pi}}|_J = -2\pi \ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial S_o(q,J;\lambda)}{\partial \lambda}|_{q=q(\theta,J;\lambda)}\right) \ \dot{\lambda} \tag{3}$$

Notemos que J no es más una constante de movimiento; varía lentamente si la variación de λ es lenta. Tampoco es constante $\partial H/\partial J$ en la ecuación para $\dot{\theta}$, ni θ evoluciona uniformemente. Queremos ver que la variación temporal de J, sin embargo, es mucho más lenta que la de λ cuando se la promedia en un ciclo. Si suponemos que λ varía muy poco en un ciclo, podemos aproximar λ y $\dot{\lambda}$ por sus valores iniciales:

$$\dot{J} \simeq -2\pi \ \ \dot{\lambda}_o \ \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial S_o(q,J;\lambda)}{\partial \lambda}|_{q=q(\theta,J;\lambda)}\right)\right]_{\lambda_o}$$

Para promediar $\dot{J}$ en un ciclo aproximaremos J en el integrando por una constante. Esta aproximación está justificada porque $\dot{J}$ ya es de primer orden en $\dot{\lambda}_o$, y basta con calcular a este orden de aproximación. Entonces

$$< \dot{J} > \ \ \simeq -\dot{\lambda}_o \ \int_0^{2\pi} d\theta \ \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial S_o(q,J;\lambda)}{\partial \lambda}|_{q=q(\theta,J;\lambda)}\right)\right]_{\lambda_o}$$

Como J y λ son constantes en el integrando, entonces la integral se reduce a evaluar la función entre paréntesis en los extremos de integración. Esa función es del tipo de las funciones de estado consideradas en sistemas conservativos. Se trata entonces de una función periódica de la variable ángulo θ, lo que implica que $< \dot{J} >$ se anula en primera aproximación.[2] Por lo tanto, los cambios de J al transcurrir el ciclo tienden a compensarse, evidenciando así el carácter de invariante adiabático de la variable acción J.

Veamos ahora los errores cometidos al aproximar λ y $\dot{\lambda}$ por sus valores iniciales. Para ello usaremos desarrollos en serie de Taylor en $t = 0$:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{\lambda}_o + \ddot{\lambda}_o \ t + ...$$

y [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_o}{\partial q \ \partial \lambda} &= \left[\frac{\partial^2 S_o}{\partial q \ \partial \lambda}\right]_{\lambda_o} + \left[\frac{\partial^3 S_o}{\partial q \ \partial \lambda^2}\right]_{\lambda_o} (\lambda - \lambda_o) + ... \\ &= \left[\frac{\partial^2 S_o}{\partial q \ \partial \lambda}\right]_{\lambda_o} + \left[\frac{\partial^3 S_o}{\partial q \ \partial \lambda^2}\right]_{\lambda_o} \dot{\lambda}_o \ t + ... \end{aligned}$$

[2]La función $S_o(q,J)$ es multivaluada, pues está determinada a menos de términos que son múltiplos de las J_μ (ver Nota 6 en clase anterior). Pero estos términos no contribuyen a $\partial S_o/\partial \lambda$.

[3]En el integrando de $< \dot{J} >$ es $\partial^2 S_o/\partial \theta \ \partial \lambda = (\partial^2 S_o/\partial q \ \partial \lambda)(\partial q/\partial \theta)$.

donde t corre entre 0 y el período del ciclo. Entonces resulta

$$\frac{\partial^2 S_o}{\partial q\,\partial\lambda}\ \dot\lambda = \left[\frac{\partial^2 S_o}{\partial q\,\partial\lambda}\right]_{\lambda_o} \dot\lambda_o + \mathcal{O}(\dot\lambda_o^2\ ,\ \ddot\lambda_o)$$

Por lo tanto

$$< \dot J > \ = \ \mathcal{O}(\dot\lambda_o^2\ ,\ \ddot\lambda_o)$$

Comparemos con el ritmo al que cambia la energía $H(J;\lambda)$:

$$\dot H = \frac{\partial H}{\partial J}\ \dot J + \frac{\partial H}{\partial\lambda}\ \dot\lambda$$

Como a orden cero $\partial H/\partial\lambda$ es una constante de movimiento, entonces $<\dot H>= \mathcal{O}(\dot\lambda_o)$.

Como ejemplo de invariante adiabático mencionemos que la excentricidad de la órbita Kepleriana es un invariante adiabático pues resulta una función de las variables acción, sin la participación de ningún parámetro,[4]

$$e = \sqrt{1 - \frac{J_\phi^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}}\ .$$

3 Oscilador armónico con frecuencia variable

Consideremos un Hamiltoniano de oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\ \omega(t)^2\ q^2$$

Sabemos que la función generatriz que lleva a las variables ángulo-acción es

$$S_o(q, J;\omega) = m\ \omega \int \sqrt{\frac{J}{\pi\ m\ \omega} - q^2}\ dq$$

donde usamos que $E = \omega\ J/(2\pi)$. La relación entre θ y q resulta de

$$\theta = 2\pi\ \frac{\partial S_o}{\partial J}|_q = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\pi\ m\ \omega}{J}}\ q\right)$$

o sea

$$q = \sqrt{\frac{J}{\pi\ m\ \omega}}\ \sin\theta \tag{4}$$

[4]Recordemos las expresiones $e = \sqrt{1 + \frac{2\ \ell^2 E}{\alpha^2\mu}}$, $E = -\frac{2\pi^2 m\ \alpha^2}{(J_r+J_\theta+J_\phi)^2}$, $J_\phi = \oint p_\phi\ d\phi = 2\pi\ell$.

En las ecuaciones de Hamilton (2) y (3), $\overline{H}$ debe estar escrito como función de θ, J . Para ello, primero calculamos $\partial S_o(q,J;\omega)/\partial\omega$ y luego reemplazamos q usando (4)[5]

$$\overline{H} \;= E(J;\omega) + \frac{\partial S_o}{\partial \omega}|_{q(\theta,J;\omega)} \;\dot{\omega} \;=\; \frac{\omega\; J}{2\pi}\;\left(1+\frac{\dot{\omega}}{2\omega^2}\;\sin 2\theta\right) \tag{5}$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton resultan

$$\frac{\dot{\theta}}{2\pi} \;=\; \frac{\partial \overline{H}}{\partial J}|_{\theta} \;=\; \frac{\omega}{2\pi}\;\left(1+\frac{\dot{\omega}}{2\omega^2}\;\sin 2\theta\right)\;, \qquad\qquad \dot{J} \;=\; -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \frac{\theta}{2\pi}}|_{J} \;=\; -\frac{J\;\dot{\omega}}{\omega}\;\cos 2\theta \tag{6}$$

Para promediar $\dot{J}$ en un ciclo aproximaremos $\dot{\omega}(t)$ por su valor inicial, aceptando que $\dot{\omega}$ varía muy poco en el período de un ciclo.[6] Entonces al orden más bajo es

$$<\dot{J}> \;\;\simeq\;\; -\frac{J\;\dot{\omega}(0)}{2\pi\;\omega(0)}\;\int_0^{2\pi} d\theta\;\;\cos 2\theta \;\;=\;\; \frac{J\;\dot{\omega}(0)}{4\pi\;\omega(0)}\;\;\sin 2\theta\;|_0^{2\pi}\;\;=\;\;0$$

Aunque J sufre cambios mientras transcurre el ciclo, esos cambios se promedian a cero (en la aproximación más baja). Se dice que J no exhibe una perturbación *secular* (es decir, una perturbación que se acumule en el tiempo). [7]

Por otro lado, el cambio de la energía $E = \omega\; J/(2\pi)$ es

$$\dot{E} = \frac{1}{2\pi}\;(\dot{\omega}\;J + \omega\;\dot{J}) \qquad\Rightarrow\qquad <\dot{E}> \;\;\simeq \frac{\dot{\omega}(0)}{2\pi}\;\;<J> + \mathcal{O}(\dot{\omega}(0)^2, \ddot{\omega}(0))$$

La solución para $q(t)$ se obtiene integrando θ en la ecuación (6), y reemplazado en (4). Al orden más bajo es $\theta(t) \simeq \int \omega(t)\;dt$; entonces

$$q(t)\;\;\simeq\;\;\sqrt{\frac{J(t)}{\pi\;m\;\omega(t)}}\;\;\sin\int\omega(t)\;dt\;\;\approx\;\;\sqrt{\frac{<J>}{\pi\;m\;\omega(t)}}\;\;\sin\int\omega(t)\;dt\;.$$

[5]Estos dos pasos no son intercambiables porque q en (4) tiene una dependencia en ω.

[6]ω varía poco en un ciclo si $\Delta\omega << \omega$, donde $\Delta\omega \simeq \dot{\omega}(0)\;T$, siendo T el período del ciclo. En este ejemplo la propia frecuencia ω es la que da el período del ciclo: $T = 2\pi/\omega$. Entonces la condición de variación lenta de ω se escribe, en este caso, $\dot{\omega} << \omega^2$. Pero aquí estamos promediando J diciendo que $\dot{\omega}$ varía poco. Entonces la condición es $\ddot{\omega} << \dot{\omega}\;\omega$.

[7]En la antigua teoría de los cuantos fundada por N. Bohr en 1913, los sistemas multiperiódicos obedecen la regla de cuantificación de Wilson-Sommerfeld (1915), que dice que los invariantes adiabáticos J_μ sólo puede tomar los valores $n_\mu h$, $n_\mu \in \mathbb{N}$. La constante de Planck $h = 6,626\times 10^{-34}$Js representa el *cuanto* de variable acción. La idea de invariancia adiabática en la mecánica fue desarrollada por P. Ehrenfest a partir de 1912.