Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA

Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

Profesor: Rafael Ferraro

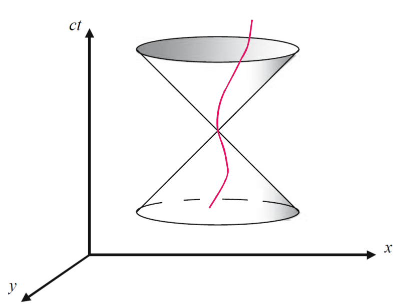
Clase 25

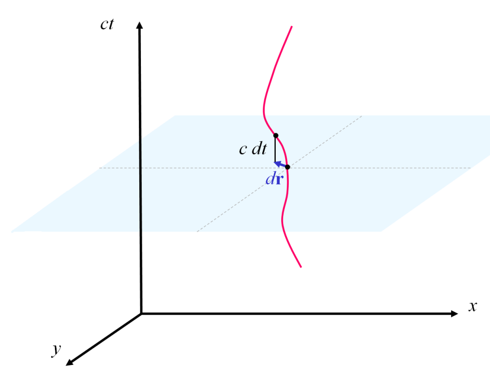
20 de julio de 2020

Dinámica relativista

1 Tiempo propio de la partícula

Los eventos pertenecientes a la línea de universo de una partícula están causalmente conectados. Por lo tanto el cono de luz de cualquiera de ellos debe contener la línea de universo completa. Para que esto suceda, la velocidad $\vec{u}$ de la partícula debería ser siempre menor que la velocidad de la luz: $|\vec{u}| < c$. El intervalo entre un par de eventos vecinos de la línea de universo, con coordenadas $(ct,\ \vec{r})$ y $(ct + c\ dt,\ \vec{r} + d\vec{r})$, es





$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{r}|^2 = c^2 dt^2 \ \left(1 - \frac{|d\vec{r}|^2}{c^2 dt^2}\right) = c^2 dt^2 \ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) > 0$$

Como el intervalo es invariante, tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia:

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \ c \ dt \ = \ \sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} \ c \ dt' \ \ .$$

En particular, en el sistema de referencia donde la velocidad de la partícula se anule en el instante considerado (**sistema propio** de la partícula), el radicando se hace igual a 1, y el tiempo es el tiempo propio $\Delta\tau$ entre los eventos (en el sistema propio los eventos ocurren en el mismo lugar); entonces la ecuación anterior puede escribirse así

$$d\tau = \gamma(u)^{-1} \ dt \ = \ \gamma(u')^{-1} \ dt' \ \ . \tag{1}$$

Por cierto esto no es más que la dilatación del tiempo, o la relación $\Delta\tau = c^{-1}\Delta s$ para eventos con separación temporal.

El tiempo propio a lo largo de la línea de universo de la partícula se obtiene integrando la expresión anterior,

$$\Delta\tau = \int \gamma(u(t))^{-1} \ dt = \int \sqrt{1 - \frac{u(t)^2}{c^2}} \ dt\,. \tag{2}$$

$\Delta\tau$ es el tiempo que mide un **reloj** que viaja junto con la partícula. Los relojes que están en reposo indican el tiempo coordenado Δt del sistema de referencia.

1.1 Paradoja de los gemelos

El resultado anterior ilustra la llamada "paradoja" de los gemelos. Dos gemelos se separan porque uno de ellos emprende un viaje espacial. A su regreso, el viajero encuentra que su hermano envejeció más que él. Está claro que la integral $\Delta\tau$ entre dos eventos (en este caso, la partida y la llegada del viajero) depende de la línea de universo utilizada para unir los eventos ($d\tau$ no es un diferencial exacto). Para el gemelo que permaneció en la Tierra es $u = 0$ (entendiendo a la Tierra como un sistema inercial); entonces $\Delta\tau_{Tierra} = t_{llegada} - t_{partida}$. En cambio en $\Delta\tau_{viajero}$ el integrando es siempre menor que 1; así resulta $\Delta\tau_{viajero} < \Delta\tau_{Tierra}$. Lo "paradójico" es que podría pensarse que la situación es simétrica: cualquiera de los dos es un "viajero" visto desde la perspectiva del otro. Lo que rompe la simetría es el hecho de que sólo uno de ellos podría verse como "viajero inercial". Si ambos fuesen inerciales nunca se reencontrarían. En Relatividad Especial los sistemas inerciales heredan el privilegio que poseen en la Mecánica Clásica.

2 Dinámica relativista

Mientras que el Principio de inercia permanece válido en Relatividad Especial, la segunda ley de Newton, y la forma de las fuerzas fundamentales, deben reformularse para satisfacer el Principio de relatividad ante transformaciones de Lorentz. La tercera ley de Newton, que lleva a compensaciones simultáneas a distancia de las variaciones de cantidad de movimiento, tampoco es satisfactoria en el contexto relativista.

Para construir la Mecánica relativista partiremos de un principio variacional cuya acción sea un invariante lorentziano. De esa forma, si la acción es estacionaria en un sistema inercial, lo será también en cualquier otro sistema inercial. Así las ecuaciones de Euler-Lagrange cumplirán con el Principio de relatividad ante transformaciones de Lorentz. Por otro lado, la acción relativista debe ser capaz de reproducir la dinámica newtoniana cuando las velocidades sean mucho menores que la velocidad de la luz. Su Lagrangiano debe ser equivalente al Lagrangiano clásico en el límite $|\vec{u}| << c$.

2.1 Acción de la partícula libre

El (invariante) tiempo propio a lo largo de la línea de universo de la partícula (2) es la elección adecuada para la funcional acción de la partícula libre,

$$S[\vec{r}(t)] \ = \ -m\,c^2 \int d\tau \ = \ -m\,c^2 \int \gamma(u)^{-1}\,dt = \ -m\,c^2 \int \sqrt{1-\frac{|\vec{u}|^2}{c^2}}\ dt\ . \tag{3}$$

El coeficiente $-m\,c^2$ permite obtener el límite clásico correcto

$$L = -mc^2\,\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = -mc^2 + \frac{1}{2}\,m\,u^2 + \mathcal{O}(u^4/c^4)\,.$$

2.2 Cantidad de movimiento y energía

El momento canónicamente conjugado $\partial L/\partial\vec{u}$ que resulta del Lagrangiano de partícula libre (3) es la **cantidad de movimiento** de la partícula

$$\vec{p} \ \equiv \ m\,\gamma(u)\,\vec{u} \ = \ m\,\gamma(u)\,\frac{d\vec{r}}{dt} \ = \ m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau} \tag{4}$$

(en el último paso usamos la ecuación (1)), que vale $m\vec{u}$ cuando $|\vec{u}| << c$.

El Hamiltoniano asociado al Lagrangiano de partícula libre,

$$H = \vec{u}\cdot\vec{p} - L = m\,\gamma(u)\,u^2 + mc^2\gamma(u)^{-1} = mc^2\gamma(u)\,\left(\frac{u^2}{c^2}+\gamma(u)^{-2}\right) = mc^2\,\gamma(u)$$

es la **energía** de la partícula

$$E \;\equiv\; m\,\gamma(u)\,c^2\,. \tag{5}$$

La energía E es una combinación de **energía en reposo** mc^2 y energía cinética:

$$E \;=\; mc^2 \,+\, \frac{1}{2}m\,u^2 \;+\; ... \;\equiv\; mc^2 \,+\, T\,, \tag{6}$$

donde T es la energía cinética de la partícula, que a bajas velocidades coincide con la energía cinética clásica.

Combinando (4) y (5) obtenemos

$$\vec{p} \;=\; c^{-2}\,E\,\vec{u} \tag{7}$$

que es un resultado típicamente relativista: la cantidad de movimiento es un flujo de energía (como sucede en teoría electromagnética).

La ecuación (1) puede usarse para reemplazar $\gamma(u)$ en la energía (5),

$$\frac{E}{c} = mc\,\frac{dt}{d\tau}\,. \tag{8}$$

Así vemos que la energía de la partícula es proporcional a la relación entre el tiempo dt de los relojes del sistema de referencia y el tiempo propio de la partícula $d\tau$.

2.3 Transformaciones de E y $\vec{p}$

Como $d\tau$ es invariante, las ecuaciones (4) y (8) implican que el comportamiento de $(E/c,\ \vec{p})$ ante transformaciones de Lorentz será el mismo que el de $(c\ dt, d\vec{r})$. Como las transformaciones de Lorentz son lineales, los diferenciales de las coordenadas se transforman como las coordenadas. Entonces

$$E' \;=\; \gamma(V)\;(E - V_x\,p_x) \;=\; \gamma(V)\;(E - \vec{V}\cdot\vec{p}) \tag{9a}$$

$$p'_x \;=\; \gamma(V)\;(p_x - V_x\,c^{-2}E) \tag{9b}$$

$$p'_y \;=\; p_y \tag{9c}$$

$$p'_z \;=\; p_z \tag{9d}$$

Así como $c\ dt$ y $|d\vec{r}|$ se combinan para formar el invariante intervalo, también E^2 y $c^2|\vec{p}|^2$ forman el **invariante energía-cantidad de movimiento**:

$$E^2 - c^2|\vec{p}|^2 = m^2c^4\gamma(u)^2 - m^2c^2u^2\gamma(u)^2 = m^2c^4\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\gamma(u)^2 = m^2c^4 \tag{10}$$

Diferenciando esta ecuación se obtiene

$$E\,dE \;=\; c^2\,\vec{p}\cdot d\vec{p}\;,$$

o, usando la ecuación (7)

$$dE \;=\; \vec{u}\cdot d\vec{p} \;=\; d\vec{r}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}\;, \tag{11}$$

lo que sugiere que la fuerza en Relatividad Especial está asociada a $d\vec{p}/dt$. En tal caso, el resultado anterior sería un teorema trabajo-energía. Nótese que $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ implica que la fuerza no es paralela a la aceleración en general, pues el término que derive a $\gamma(u)$ será paralelo a $\vec{u}$. En el límite de trabajo infinito la energía E diverge, y la velocidad de la partícula en (5) tiende a c. Así la velocidad de la luz es un límite inalcanzable para la partícula.

2.4 Fuerza de Lorentz

Si la partícula no es libre entonces la acción debe completarse con un término de interacción S_{int} invariante lorentziano. En el caso de una carga e interactuando con un campo electromagnético externo es

$$S_{int} = -e\int(\phi - \vec{u}\cdot\vec{A})\,dt$$

donde ϕ y $\vec{A}$ son los potenciales del campo externo.[1] Variando la acción $S_{libre} + S_{int}$ se obtiene

$$e\,(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}) \;=\; \frac{d}{dt}\,(m\;\gamma(u)\;\vec{u})\;,$$

donde $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ y $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$. Así resulta la fuerza de Lorentz igualada a $d\vec{p}/dt$. En 1908 Bucherer confirmó experimentalmente la dinámica relativista, observando el movimiento de un electrón en un campo electrostático. En ese caso, si $\vec{E}$ es uniforme, la ecuación da $(e/m)\vec{E}\,t = \gamma(u)\vec{u}$; entonces u tiende a c cuando t tiende a infinito.

[1] $U = e\;(\phi - \vec{u}\cdot\vec{A})$ es el potencial dependiente de la velocidad que vimos oportunamente. Su comportamiento ante transformaciones de Lorentz no será demostrado en este curso; pero se satisface la invariancia lorentziana de S_{int}. Un aspecto esencial de las transformaciones de Lorentz del campo electromagnético es que mezclan lo eléctrico con lo magnético, del mismo modo que mezclan espacio y tiempo.

2.5 Fotones

En las primeras décadas del siglo XX se comprendió que el comportamiento de la luz cuando interactúa con la materia no puede ser descripto por la teoría de Fresnel, que sin embargo describe todos los fenómenos físicos asociados a la propagación de las ondas luminosas. En la interacción con la materia, la luz se manifiesta a través de *cuantos* llamados **fotones** que intercambian energía y cantidad de movimiento. La energía y cantidad de movimiento de los fotones están, sin embargo, asociadas a propiedades ondulatorias (Einstein, 1905; Compton, 1923),

$$E_{foton} = \ h\nu \ , \qquad\qquad \vec{p}_{foton} = \ \frac{h\nu}{c}\, \hat{n} \quad , \tag{12}$$

donde ν es la frecuencia de la luz y $\hat{n}$ es su dirección de propagación ($h = 6,626 \times 10^{-34}$Js es la constante de Planck). Si reemplazamos estos valores en (7) obtenemos $\vec{u} = c\ \hat{n}$. Por otro lado, el invariante $E^2 - c^2|\vec{p}|^2$ se anula, lo que dice que la masa del fotón es nula.

Reemplazando en las transformaciones (9a) y (9b) se obtiene

$$\nu' \ = \ \gamma(V)\, (\, 1 - \hat{n}\cdot\vec{V}\, c^{-1})\ \nu \ , \qquad\qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\ \cos\theta} \tag{13}$$

donde $\cos\theta = n_x$. Notablemente estas son las expresiones para el **efecto Doppler** y la **aberración de la luz**[2] que se obtendrían razonando a partir de la teoría ondulatoria.

3 Energía-cantidad de movimiento. Equivalencia masa-energía

En Relatividad la conservación de la energía y la cantidad de movimiento no pueden ser disociadas. Mientras la conservación de la cantidad de movimiento es una consecuencia de la simetría del Lagrangiano ante traslaciones espaciales, la conservación de energía proviene de la simetría del Lagrangiano ante traslaciones temporales. Pero las transformaciones de Lorentz mezclan el espacio y el tiempo. En consecuencia, la conservación de la cantidad de movimiento en todo sistema de referencia inercial requiere que la energía se conserve también en todo sistema de referencia inercial (y viceversa), lo

[2]Si $V << c$ entonces el ángulo de aberración $\alpha \equiv \theta' - \theta$ es pequeño, y vale que $\cos\theta' = \cos(\theta + \alpha) \approx \cos\theta - \alpha\, \sin\theta$. Aproximando a primer orden en V/c resulta $\alpha \approx (V/c)\, \sin\theta$.

que es evidente en las transformaciones (9) donde energía y cantidad de movimiento se mezclan al cambiar de sistema de referencia. Esto no sucede en Mecánica Clásica, donde la transformación de la cantidad de movimiento $\vec{p}' = \vec{p} - m\vec{V}$ no contiene la energía; así la transformación cantidad de movimiento total de un sistema de partículas, $\vec{P}' = \vec{P} - M\vec{V}$, garantiza que la conservación de la cantidad de movimiento valga en todo sistema de referencia inercial porque la masa total M es separadamente conservada (principio clásico de conservación de la masa). Pero en Relatividad la transformación de la cantidad de movimiento

$$p'_x \;=\; \gamma(V)\;(p_x - V_x\, c^{-2}E) = \gamma(V)\;(p_x - mV_x\; - V_x\, c^{-2}T)$$

implica que la conservación de la masa pierde su sentido, y es reemplazada por la conservación de la energía. El término $m\vec{V}$ de la transformación galileana no es más que el primer término del desarrollo de la energía (energía en reposo) en la transformación lorentziana.

3.1 Equivalencia masa-energía

Ahora que vimos que no hay ninguna razón para sostener la conservación de la masa, sino que debemos utilizar en su lugar la conservación de la energía, queda abierta la posibilidad de que la masa, como una forma más de energía, pueda convertirse en otra forma de energía y viceversa. Lo veremos en un par de ejemplos.

3.1.1 Colisión plástica de dos partículas de igual masa

En el sistema **centro de momento**, donde se anula la cantidad de movimiento total, las partículas tienen velocidades iguales y opuestas u antes de la colisión. Cuando colisionan forman una única partícula que permanece en reposo para conservar la cantidad de movimiento total. Si no hay ningún tipo de energía emitida, entonces toda la energía queda depositada en la energía en reposo de la partícula final; la conservación de la energía dice que

$$2\, m\, \gamma(u)\; c^2 \;=\; M\, c^2\;,$$

es decir que la partícula resultante tiene una masa M mayor que $2m$ ($\gamma(u) > 1$). Esto es así porque la partícula resultante no sólo contiene las masas de las partículas que chocaron sino también contiene sus energías cinéticas.

3.1.2 Defecto de masa

La masa (energía en reposo) de un sistema compuesto incluye las masas de los constituyentes y la energía de ligadura medida en el sistema centro de momento. Por ejemplo, un deuterón D está constituido por un protón y un neutrón. La masa del deuterón es inferior a la suma de las masas de un protón y un neutrón libres, lo que significa que la energía de ligadura de los constituyentes es negativa. El **defecto de masa** es $(m_D - m_p - m_n)c^2 = -2,22\text{MeV}$. En general, cuando núclidos livianos se fusionan se libera cierta cantidad de energía para conservar la energía total (**fusión nuclear**). En el caso de núclidos pesados sucede lo contrario porque más allá del Fe la energía (negativa) de ligadura por nucleón comienza a disminuir con el aumento del número másico; en ese caso se obtendrá energía dividiendo núclidos (**fisión nuclear**).

3.1.3 Creación (y aniquilación) de partículas

La energía cinética puede ser usada para crear partículas. Por ejemplo un pión neutro π^0 puede ser creado en una colisión entre protones si la energía es suficientemente alta. La reacción debe superar una **energía umbral** para dar cuenta de la partícula creada. En el sistema centro de momento la energía umbral de la reacción

$$p + p \to p + p + \pi^0$$

es la necesaria para crear el pión y que los productos queden en reposo:

$$E_{umbral} = 2m_p c^2 + m_{\pi^0} c^2 = 1876,54\text{MeV} + 134,98\text{MeV}$$

Para alcanzar esta energía los dos protones deberían colisionar a la velocidad de $u_p = 0,36\ c$ en el sistema centro de momento.

3.1.4 Colisión elástica

El ejemplo anterior es un caso de colisión inelástica. Una colisión se dice **elástica** si las partículas antes y después de la colisión son las mismas. En ese caso la energía en reposo es la misma antes y después, y la conservación de la energía corresponderá a la conservación de la energía cinética relativista total.

3.1.5 Emisión o absorción de energía electromagnética

La interacción entre partículas cargadas puede involucrar radiación electromagnética en los estados inicial o final. En ese caso la radiación entra en el balance de energía-cantidad de movimiento a través de fotones. Por ejemplo, un par electrón-positrón se aniquila para dar lugar a dos fotones (se necesitan al menos dos para conservar la cantidad de movimiento). En el sistema centro de momento donde el electrón y el positrón tienen velocidades u_e iguales y opuestas el balance de energía es

$$2\, m_e\, \gamma(u_e)\, c^2 \;=\; 2\, h\, \nu.$$

A la inversa, dos fotones pueden crear un par electrón-positrón si tienen la energía umbral necesaria. La frecuencia ν está en el rango de los rayos γ.

El **efecto Compton** es la interacción de un fotón con un electrón libre. El fotón cede parte de su energía al electrón, y emerge de la colisión con una frecuencia menor que la inicial. El efecto es significativo si la longitud de onda del fotón es del orden o menor que $\lambda_C \equiv h/(m_e c) = 0,00243\text{nm}$ (*longitud de onda Compton*).

3.2 Interacciones "a distancia"

Como mencionamos, la relatividad de la simultaneidad impide la existencia de interacciones a distancias en Relatividad. En los problemas de colisiones de partículas libres, la interacción es **local**, ya que sucede sólo en el instante y lugar donde las partículas chocan. De modo que el balance de energía-cantidad de movimiento se realiza con los valores antes y después del choque. Aun si hay interacciones electromagnéticas podemos considerar los estados inicial y final cuando las cargas están muy separadas y sin interacción, haciendo intervenir los fotones para completar el balance. Pero esto no explica cómo formular teorías de interacciones "a distancia" en Relatividad. Para ello tenemos que ver la interacción paradigmática de la Relatividad, que es la interacción electromagnética. Salvo en el caso estático, la interacción electromagnética no está descripta por un potencial que depende de las distancias entre partículas como sucede en Mecánica Clásica. En su lugar, la interacción a distancia es reemplazada por la interacción local entre las cargas y el campo. El campo posee energía y cantidad de movimiento, que resultan de su propio Lagrangiano, y permite que el balance de energía-cantidad de movimiento sea local. La conservación se satisface en cada evento del espacio-tiempo, y no hay conflicto con la relatividad de la simultaneidad. El sistema aislado que conserva la energía-cantidad de movimiento está formado por las cargas y el campo.