

Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

## MECÁNICA CLÁSICA

Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

**Profesor: Rafael Ferraro**

### Clase 3

20 de abril de 2020

**Coordenadas generalizadas**

**Vínculos**

**Principio de trabajos virtuales**

## 1 Coordenadas generalizadas

La posición de una partícula se determina mediante 3 coordenadas, que pueden ser de distinto tipo (distancias, ángulos, etc.). Las llamaremos **coordenadas generalizadas**  $q_k$ . Un sistema de  $N$  partículas precisa  $3N$  coordenadas generalizadas.

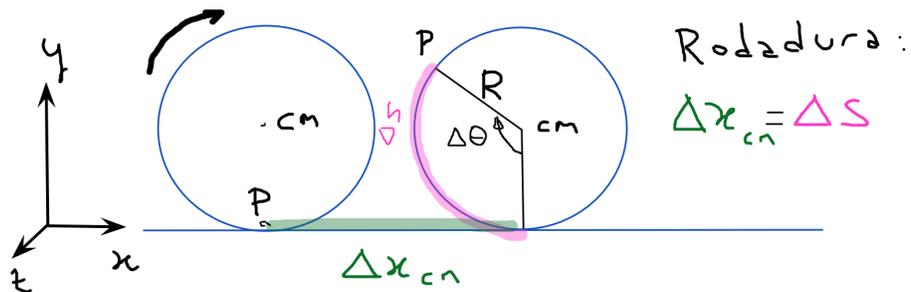
## 2 Vínculos

A menudo las  $3N$  coordenadas generalizadas no son necesarias porque existen **condiciones de vínculo** entre las mismas, que hacen que las  $3N$  coordenadas  $q_k$  no sean independientes.

Por ejemplo, en un cuerpo rígido alcanzan 6 coordenadas para establecer la posición de las partículas que lo componen. Conociendo la posición de

un punto cualquiera del mismo (3 coordenadas) y la orientación del cuerpo en el espacio (3 ángulos que corresponden a tres rotaciones independientes) podemos saber la posición de cualquiera de sus puntos. Decimos que el cuerpo rígido tiene 6 **grados de libertad**.

El cuerpo rígido puede estar sometido a vínculos adicionales. Por ejemplo, un cilindro que rueda sin deslizar y sin modificar la orientación de su eje de rotación (ver **Figura**)



cumple con las ecuaciones

$$x_{CM} = R \theta, \quad y_{CM} = R, \quad z_{CM} = 0$$

A estas tres ecuaciones de vínculo debemos agregar dos más que corresponden a congelar las otras dos posibles rotaciones que el cuerpo puede tener. En total son 5 vínculos sobre seis posibles grados de libertad. Esto reduce los grados de libertad a sólo uno, en este caso. Está claro que ese único grado de libertad puede describirse con el ángulo  $\theta$  o la coordenada  $x_{CM}$ , o cualquier otra coordenada generalizada equivalente.

La existencia de  $m$  ecuaciones de vínculo (o *ligadura*) independientes reduce el número de grados de libertad a

$$n = 3 N - m$$

## 2.1 Vínculos holónomos

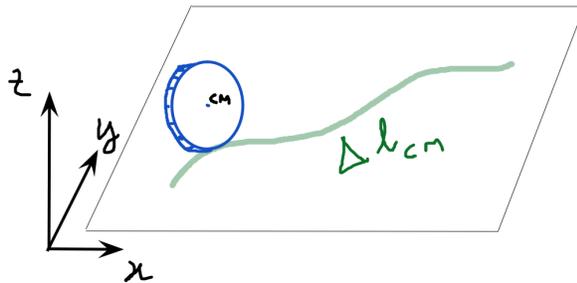
Son aquellos que se expresan como relaciones entre las coordenadas (como en el ejemplo anterior). Eso permite describir la dinámica del sistema en términos de  $n$  coordenadas generalizadas independientes, que llamaremos  $q_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ).

## 2.2 Vínculos anholónomos

En otros casos, las ligaduras se expresan como relaciones entre desplazamientos infinitesimales que no pueden integrarse. Por ejemplo, en la Figura anterior, el primer vínculo podría expresarse en la forma

$$dx_{CM} = R d\theta ,$$

pero esta relación es integrable y da  $x_{CM} = R \theta + const.$  En cambio, si el eje del cilindro no estuviese restringido a permanecer siempre igual (perpendicular al plano de la Figura), la situación cambiaría. Consideremos el caso de una moneda que rueda (sin deslizar) sobre un plano, y el eje sólo está restringido a permanecer horizontal (es decir, la moneda no se inclina); veamos la **Figura**:



Ahora el  $CM$  no se desplaza sobre una línea determinada, como lo hacía en el ejemplo anterior. El problema no es que la trayectoria sea curva sino

que no está prefijada, debido a que la moneda es libre de torcer su rumbo siempre y cuando no se incline. Todavía podemos decir que

$$\Delta \ell_{CM} = R \Delta \theta$$

donde  $\Delta \ell_{CM}$  se mide sobre una curva en el plano  $x - y$  :

$$\Delta \ell = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

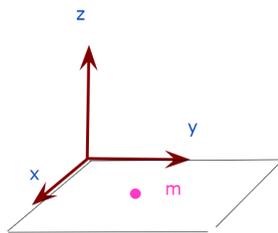
Pero esta expresión sólo podría ser integrada si conociéramos la curva  $y(x)$  seguida por el  $CM$ . Pero no hemos establecido una ligadura para esta curva (como fue hecho en el ejemplo anterior). En otras palabras,  $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  no es un diferencial exacto. Así el vínculo permanece como anholónomo y tiene la forma

$$\sqrt{dx_{CM}^2 + dy_{CM}^2} = R d\theta$$

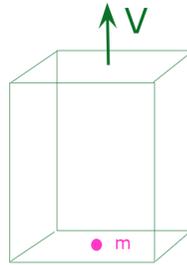
### 2.3 Vínculos esclerónomos y reónomos

Una segunda clasificación de los vínculos se refiere a la presencia o no del tiempo  $t$  en la ecuación de vínculo. Los vínculos **esclerónomos** no dependen del tiempo (del griego:  $\sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o} \rightarrow duro$ ). Los vínculos **reónomos** dependen del tiempo (del griego:  $\rho\acute{\epsilon}\omega \rightarrow fluir$ ).

Veamos los ejemplos de las **Figuras**:

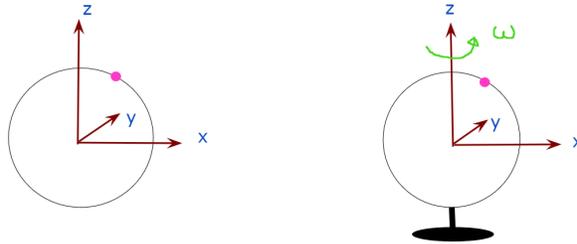


$z=0$  holónomo y esclerónomo



$z=Vt$  holónomo y reónomo

En este primer ejemplo, la partícula tiene dos grados de libertad en ambos casos.



En la primera figura el aro está fijo. Hay dos vínculos holónomos y esclerónomos:

$$x^2 + z^2 = R^2, \quad y = 0$$

En la segunda figura el aro gira con una velocidad  $\omega$  preestablecida. Hay dos vínculos holónomos y reónomos:

$$x = \sqrt{R^2 - z^2} \cos \omega t, \quad y = \sqrt{R^2 - z^2} \sin \omega t$$

La partícula enhebrada en el aro tiene un único grado de libertad en ambos casos.

### 3 Espacio de configuración

Es el espacio de las coordenadas generalizadas utilizadas para describir el sistema. Si los vínculos son holónomos el espacio de configuración tiene dimensión  $n$ .

## 4 Fuerzas de vínculo y fuerzas aplicadas

Las fuerzas de vínculo son las fuerzas que se encargan de mantener las ligaduras. No se las conoce a priori sino que dependen del resto las fuerzas que intervienen en el problema.

Las fuerzas *aplicadas* son fuerzas que están determinadas en forma independiente del resto. Dependen de las posiciones de las partículas del sistema, y a veces de sus velocidades.

La fuerza de rozamiento estático es de vínculo porque garantiza que no haya deslizamiento entre dos superficies que están en contacto. La fuerza de rozamiento dinámico entre superficies secas escapa a esta clasificación; no es de vínculo pero tampoco es conocida de antemano (depende de la fuerza normal). En cambio, el rozamiento entre un cuerpo y un fluido puede ser descrito por una ley dependiente de la velocidad relativa entre la superficie del cuerpo y el fluido.

Cuando trabajamos con la leyes de Newton escribimos 3 ecuaciones diferenciales por partícula (las tres componentes de la ecuación vectorial  $\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}}$ ); las componentes de los vectores posición  $\mathbf{r}_i$  son las incógnitas del problema. Pero hay incógnitas adicionales: las fuerzas de vínculo. Para resolver el conjunto de incógnitas debemos entonces agregar más ecuaciones: las  $m$  ecuaciones de vínculo. Así tendremos un total de  $3N + m$  ecuaciones para igual número de incógnitas. Ahora bien, en caso que no nos interese resolver las fuerzas de vínculo, ¿será posible lograr una reformulación de las ecuaciones dinámicas donde las únicas incógnitas sean los grados de libertad? Si esto se pudiese conseguir, el número de ecuaciones a resolver se reduciría a  $n = 3N - m$ . Vamos a ver que ese objetivo se puede alcanzar cuando los vínculos son holónomos, introduciendo el **Principio de los trabajos virtuales**. La idea básica consiste en notar que el trabajo total de las fuerzas de vínculo puede ser declarado nulo cuando los desplazamientos son compatibles con los vínculos, con el agregado de una sutileza que pasaremos a analizar.

1) En el caso de la partícula que se mueve libremente sobre una mesa (el vínculo es  $z = 0$ ), el desplazamiento compatible con el vínculo es  $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z = 0) = (\delta x, \delta y, 0)$ . Como la fuerza de vínculo es normal a la mesa, entonces no hace trabajo.

2) Consideremos dos bloques que se desplazan a lo largo de una recta horizontal (eje  $x$ ), unidos por una soga tensa de masa despreciable y longitud  $L$ . La soga establece un vínculo holónimo y esclerónimo entre los bloques (fija la distancia entre los mismos:  $x_2 - x_1 = L$ ), de manera que los desplazamientos de los bloques compatibles con los vínculos son iguales  $\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2 = (\delta x, 0, 0)$ . Por otro lado, las fuerzas de las sogas sobre los bloques son iguales y opuestas. Cada una por separado realiza trabajo; pero, como los desplazamientos son iguales, la suma de los trabajos de las fuerzas de la soga sobre los bloques se anula. Además se anulan los trabajos de las fuerzas normales, como en el ejemplo anterior.

3) Analicemos ahora nuestro primer ejemplo de vínculo reónimo, donde una partícula se mueve libremente sobre el piso de una cabina que asciende con velocidad  $V$ . El vínculo es  $z = Vt$ , y el desplazamiento compatible con el vínculo es  $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z = V \delta t) = (\delta x, \delta y, V \delta t)$ . La fuerza de vínculo  $\vec{R}$  es normal al piso:  $\vec{R} = R \hat{k} = (0, 0, R)$ ; su trabajo ante un desplazamiento compatible con el vínculo es  $\delta W = \vec{R} \cdot \delta\vec{r} = R V \delta t$ , que es distinto de cero.

Podremos incluir los vínculos reónomos en el Principio de los trabajos virtuales si introducimos los **desplazamientos virtuales**  $\delta\vec{r}^V$ , que son desplazamientos compatibles con los vínculos “a tiempo fijo” (es decir, con  $\delta t = 0$ ). En el caso anterior, el desplazamiento virtual será  $\delta\vec{r}^V = (\delta x, \delta y, V \delta t)|_{\delta t=0} = (\delta x, \delta y, 0)$ . Así, el **trabajo virtual** de  $\vec{R}$  se anulará como en el primer ejemplo.

La reformulación de las leyes de la dinámica partirá del **Principio de los trabajos virtuales**, que afirma que la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas de vínculo es cero. En caso que los vínculos sean holónomos, llegaremos a  $n$  ecuaciones dinámicas que reflejarán la evolución de los  $n$  grados de libertad.

En la segunda ley de Newton reescribiremos la resultante de fuerzas  $\vec{F}_i$  como  $\vec{F}_i + \vec{R}_i$ , para reservar el nombre de  $\vec{F}_i$  a la resultante de las fuerzas *aplicadas* sobre la masa  $m_i$ , mientras que  $\vec{R}_i$  será la resultante de las fuerzas de vínculo sobre dicha masa. De esa forma escribiremos  $\vec{F}_i + \vec{R}_i = m_i \vec{a}_i$ . Si multiplicamos por los desplazamientos virtuales  $\delta\vec{r}_i^V$  que cada partícula puede realizar, y sumamos las  $N$  ecuaciones obtenemos

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i^V = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i^V$$

Valiéndonos del principio de trabajos virtuales ( $\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i^V = 0$ ) resulta que

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i^V = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i^V$$

Esta expresión se conoce como **Principio de d'Alembert**. En la siguiente clase partiremos desde aquí para llegar a las ecuaciones de Lagrange.