Universidad de Buenos Aires (UBA), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEN)

MECÁNICA CLÁSICA
Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 5
27 de abril de 2020

Vínculos anholónomos
Multiplicadores de Lagrange
Potenciales dependientes de la velocidad

1 Vínculos anholónomos

Recordemos el **Principio de d 'Alembert**

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i^{\,V} = \sum_{i=1}^{N} m_i \; \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i^{\,V}$$

Si algunos de los vínculos son anholónomos entonces no resulta posible reducir las coordenadas generalizadas a un número igual al de grados de libertad n. En ese caso, las posiciones de las partículas se expresarán en función de $M = n + \bar{m}$ coordenadas q_k, donde $\bar{m}$ es el número de vínculos anholónomos,[1]

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k, t)$$

[1] Si $\bar{m} = 0$ volvemos al caso anterior, donde el número de coordenadas en uso es igual al número de grados de libertad. Si todos los vínculos son anholónomos entonces es $\bar{m} = m = 3N - n$, y resulta $M = 3N$ (es decir que no podemos reducir el numero de coordenadas).

Como las coordenadas q_k ya no están asociadas a los grados de libertad, sus variaciones compatibles con los vínculos no son independientes. Por lo tanto, los desplazamientos virtuales

$$\delta \vec{r}_i^V = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial \, \vec{r}_i}{\partial q_k} \; \delta q_k^V$$

no resultan automáticamente compatibles con los vínculos, porque las coordenadas q_k todavía están restringidas por los vínculos anholónomos. Esto significa que cuando reemplacemos estos desplazamientos en el Principio de d 'Alembert,

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \, \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \; \delta q_k^V = \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \; \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \, \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \; \delta q_k^V \; ,$$

aunque podamos trabajar cada miembro como lo hicimos la clase pasada, y llegar al resultado de la ecuación (3) de esa clase:

$$\sum_{k=1}^{M} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \, T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \, T}{\partial q_k} - Q_k \right] \; \delta q_k^V = 0 \; , \tag{1}$$

ya no podremos deshacernos de los δq_k^V porque no son independientes.

Consideraremos vínculos anholónomos que consistan en relaciones lineales entre diferenciales de las coordenadas,

$$\sum_{k=1}^{M} \; A_{ak}(q,t) \; dq_k + A_a(q,t) \; dt = 0 \; , \qquad\qquad a = 1, ..., \bar{m} \tag{2}$$

De modo que para desplazamientos virtuales tendremos:

$$\sum_{k=1}^{M} \; A_{ak} \; \delta q_k^V = 0 \; , \qquad\qquad a = 1, ..., \bar{m} \tag{3}$$

La ecuación (1) debe ser vista a la luz de los desplazamientos virtuales que cumplen las ecuaciones (3). Una forma de hacerlo es utilizar el método de los **multiplicadores de Lagrange**. La idea es introducir $\bar{m}$ nuevas variables $\lambda_a(t)$ y combinarlas con las ecuaciones (3) para formar una única ecuación,

$$\sum_{a=1}^{\bar{m}} \lambda_a \; \left(\sum_{k=1}^{M} \; A_{ak} \; \delta q_k^V \right) = 0 \; ,$$

que sumaremos a (1):

$$\sum_{k=1}^{M} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\, T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial\, T}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{a=1}^{\bar{m}} \lambda_a \ A_{ak} \right] \ \delta q_k^V = 0$$

Ahora podríamos valernos de los $\bar{m}$ multiplicadores de Lagrange $\lambda_a(t)$, y elegirlos de tal forma de anular $\bar{m}$ términos de la suma sobre k; así quedarían n términos no nulos en la suma sobre k. Si bien los $M = n+\bar{m}$ desplazamientos virtuales δq_k^V no son independientes, n de ellos sí pueden ser considerados independientes, pues n es el número de grados de libertad. De esa forma sería lícito afirmar que los n términos que quedan en la suma deben anularse por separado, como lo hicimos la clase pasada. En síntesis, por una razón o por otra todos los términos de la suma se anulan por separado:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\, T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial\, T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{a=1}^{\bar{m}} \lambda_a \ A_{ak} \ , \qquad\qquad k = 1, ..., M$$

(en un caso conservativo usaremos el Lagrangiano L). Pero aquí tenemos M ecuaciones para $M + \bar{m}$ incógnitas (M q_k's junto con $\bar{m}$ λ_a's). Estas ecuaciones deben resolverse junto con las ecuaciones de vínculo (2) escritas en la forma

$$\sum_{k=1}^{M} \ A_{ak}(q,t) \ \dot{q}_k + A_a(q,t) = 0 \ , \qquad\qquad a = 1, ..., \bar{m}$$

La conclusión es que en el caso de vínculos anholónomos no nos podemos librar de resolver las fuerzas de vínculo asociadas. En efecto, debimos agregar nuevas incógnitas, las $\bar{m}$ λ_a's, que aparecen en las ecuaciones dinámicas jugando el papel de fuerzas generalizadas de vínculo

$$P_k \equiv \sum_{a=1}^{\bar{m}} \lambda_a \ A_{ak} \ ,$$

junto con las propias ecuaciones de vínculo para poder resolver la dinámica del sistema.

1.1 Vínculos holónomos vistos como anholónomos

Los vínculos holónomos pueden llevarse a la forma (2) por mera diferenciación. Esto puede ser útil si se desea conocer las fuerzas de vínculo. Los vínculos holónomos son relaciones entre las coordenadas generalizadas y el tiempo, que podemos escribir genéricamente así:

$$G_a(q_k, t) = 0 \ , \qquad\qquad a = 1, ..., m$$

Si los diferenciamos:

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial G_a}{\partial q_k} \, dq_k + \frac{\partial G_a}{\partial t} \, dt = 0$$

donde identificamos las funciones A_{ak} y A_a ,

$$A_{ak} = \frac{\partial G_a}{\partial q_k} \ , \qquad\qquad A_a = \frac{\partial G_a}{\partial t} \ ,$$

que deberemos utilizar en las fuerzas de vínculo generalizadas P_k .

Si usamos como coordenadas generalizadas las componentes cartesianas de las posiciones $\vec{r}_i$ de las N partículas, entonces

$$A_{ak} = \frac{\partial G_a}{\partial q_k} \ \rightarrow \frac{\partial G_a}{\partial x_1} \, , \frac{\partial G_a}{\partial y_1} \, , \frac{\partial G_a}{\partial z_1} \, , \frac{\partial G_a}{\partial x_2}, \frac{\partial G_a}{\partial y_2}, ...$$

que podemos agrupar vectorialmente como

$$\vec{A}_{ai} = \vec{\nabla}_i \, G_a$$

Ahora bien, cuando las coordenadas generalizadas son las componentes cartesianas de las posiciones de las partículas, las fuerzas generalizadas son las componentes cartesianas de la fuerza sobre cada partícula. En el caso de las fuerzas de vínculo generalizadas obtendremos que

$$\vec{R}_i = \sum_{a=1}^{m} \lambda_a \ \vec{A}_{ai} = \sum_{a=1}^{m} \lambda_a \ \vec{\nabla}_i \, G_a$$

lo que muestra que cada vínculo G_a genera sobre cada partícula una fuerza *normal* al mismo.[2]

[2]El método de los multiplicadores de Lagrange se aplica a la búsqueda de extremos de una función $f(x_1, ..., x_n)$ en el subespacio definido por los m vínculos $g_a(x_1, ..., x_n) = 0$, $m < n$. La solución se obtiene extremando la función de $n + m$ variables $F(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) \equiv f(x_1, ..., x_n) + \sum_{a=1}^{m} \lambda_a \ g_a(x_1, ..., x_n)$.

1.1.1 Ejemplos

1) Consideremos un movimiento plano de rodadura de un cilindro sobre una superficie horizontal. Aunque en este caso el vínculo es integrable, lo expresaremos como

$$dX_{CM} - R\ d\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_k = (1, -R)$$

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}\ M\ \dot{X}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\ I_{CM}^{eje}\ \dot{\theta}^2 - cte$$

donde M y I_{CM}^{eje} son la masa del cilindro y su momento de inercia respecto del centro de masa y a la dirección del eje de rotación. Las ecuaciones dinámicas son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ L}{\partial \dot{X}_{CM}}\right) - \frac{\partial\ L}{\partial X_{CM}} &= \lambda\ A_{X_{CM}} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\ L}{\partial \theta} &= \lambda\ A_{\theta} \\ \dot{X}_{CM} &= R\ \dot{\theta} \end{aligned}$$

es decir,

$$M\ \ddot{X}_{CM} = \lambda\ , \qquad I_{CM}^{eje}\ \ddot{\theta} = -\lambda\ R\ , \qquad \dot{X}_{CM} = R\ \dot{\theta}$$

Como vemos, λ es la componente x de la resultante de fuerzas (es la fuerza de rozamiento estático). La solución es $X_{CM}(t) = V_{CM}\ t + X_{CMo}$, $\theta(t) = (V_{CM}/R)\ t + \theta_o$, $\lambda = 0$. De modo que la fuerza de rozamiento estático se anula (el rozamiento estático, en este caso, sólo se necesita para establecer la rodadura).

2) En el problema de la partícula enhebrada en el aro rotante (ver Clase 3), los vínculos son

$$x = \sqrt{R^2 - z^2}\ \cos\omega t\ , \qquad y = \sqrt{R^2 - z^2}\ \sin\omega t$$

que pueden combinarse para reescribirse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G_1 &= x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ G_2 &= x\ \sin\omega t - y\ \cos\omega t = 0 \end{aligned}$$

Podemos calcular el gradiente de los vínculos para conocer la dirección de las fuerzas de vínculo respectivas (los módulos y sentidos se conocerán resolviendo las ecuaciones dinámicas y obteniendo los valores de $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$):

$$\vec{\nabla} G_1 = 2x\ \hat{\imath} + 2y\ \hat{\jmath} + 2z\ \hat{k} = 2\ \vec{r}$$

$$\vec{\nabla} G_2 = \sin\omega t\ \hat{\imath}\ - \cos\omega t\ \hat{\jmath}$$

G_1 implica una fuerza de vínculo radial, y G_2 implica una fuerza de vínculo perpendicular al plano del aro.

2 Potenciales dependientes de la velocidad

El caso de fuerzas conservativas no es el único donde el término de fuerzas generalizadas puede incorporarse al Lagrangiano a través de un potencial. Podría ocurrir también que exista un **potencial dependiente de la velocidad** $U(q_\mu, \dot{q}_\mu, t)$ tal que

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ U}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - \frac{\partial\ U}{\partial q_\mu} \tag{4}$$

En ese caso el Lagrangiano sería

$$L = T - U$$

Vamos a ver que el caso de una carga eléctrica e moviéndose en un campo electromagnético externo es de este tipo. Recordemos que los campos $\vec{E}$, $\vec{B}$ se escriben en función de los potenciales escalar y vectorial como

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi\ , \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Veremos que la carga está sujeta al potencial

$$U = e\ (\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

Usando coordenadas cartesianas para describir la dinámica de la carga nos aseguramos que las fuerzas generalizadas sean las componentes cartesianas de la fuerza sobre la carga. Comencemos por la componente x :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ U}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial\ U}{\partial x} = -e\ \frac{dA_x}{dt} - e\frac{\partial\ \phi}{\partial x} + e\ \vec{v} \cdot \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial x}$$

donde

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A_x$$

El primer término de dA_x/dt tiene en cuenta la variación temporal del campo externo $A_x(\vec{r}, t)$ en cada posición. El segundo término da cuenta de la variación del campo porque la partícula se desplaza mientras transcurre el tiempo: $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = \dot{x}\ \partial/\partial x + \dot{y}\ \partial/\partial y + \dot{z}\ \partial/\partial z$. Debemos tener siempre presente que la derivada d/dt es una derivada a lo largo de la evolución del sistema. Entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\ U}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial\ U}{\partial x} = e\ E_x + e\ \vec{v} \cdot \left(-\vec{\nabla} A_x + \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial x}\right)$$

donde aparece la componente x de la fuerza eléctrica. Veamos si el segundo término es la componente x de la fuerza magnética:

$$-\vec{\nabla} A_x + \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial x} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\ \hat{\jmath} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\ \hat{k} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\ \hat{\jmath} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\ \hat{k} = B_z\ \hat{\jmath} - B_y\ \hat{k}$$

Entonces

$$\vec{v} \cdot \left(-\vec{\nabla} A_x + \frac{\partial\ \vec{A}}{\partial x}\right) = v_y\ B_z - v_z\ B_y = (\vec{v} \times \vec{B})_x$$

Lo que obtuvimos para la componente x puede replicarse para las otras componentes. Finalmente, hemos demostrado que la fuerza de Lorentz se escribe como

$$e\ (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_{\vec{v}}\ U) - \vec{\nabla}_{\vec{r}}\ U$$

donde $\vec{\nabla}_{\vec{v}}$ es una notación para el operador vectorial cuyas componentes cartesianas son las derivadas parciales respecto de las componentes cartesianas de la velocidad: $\vec{\nabla}_{\vec{v}} = (\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z})$.

Siempre que usemos las componentes cartesianas de la posición de la partícula, las fuerzas generalizadas son iguales a las componentes cartesianas de la resultante de las fuerzas aplicadas sobre la partícula. El resultado obtenido muestra que en el caso de la fuerza de Lorentz las fuerzas generalizadas tienen la forma de la ecuación (4).