

MECÁNICA CLÁSICA

Notas inacabadas para el dictado de clases virtuales

Profesor: Rafael Ferraro

Clase 9

11 de mayo de 2020

Problema de Kepler

1 Problema de Kepler

Para resolver la forma de la órbita $\varphi(r)$ en el caso gravitatorio, debemos calcular la integral

$$\varphi(r) = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\ell^2} \mu r^4 (E - V(r)) - r^2}}$$

con el potencial

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Como el potencial gravitatorio es atractivo, entonces es $\alpha > 0$. La solución servirá también para la interacción atractiva coulombiana, o para la repulsión coulombiana si cambiamos el signo de α .

Para calcular la integral es conveniente hacer un cambio de variable:

$$u \equiv \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dr}{r^2}$$

Llevando r^4 fuera de la raíz, y reemplazando $V(u) = -\alpha u$ obtenemos

$$\varphi(u) = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{\ell^2} \mu (E + \alpha u) - u^2}}$$

Podemos llamar

$$a \equiv \frac{2 \mu E}{\ell^2}, \quad b \equiv \frac{2 \mu \alpha}{\ell^2}$$

Así la integral queda

$$\varphi(u) = \int \frac{du}{\sqrt{a + b u - u^2}} = \arccos\left(\frac{2u - b}{\sqrt{b^2 + 4a}}\right) + cte$$

Resolviendo para u :

$$\frac{1}{r} = u = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a} \cos(\varphi - cte)$$

Recordemos que hemos elegido el signo de la raíz correspondiente a un tramo de r creciente. Para fijar $\varphi = 0$ cuando $r = r_{\min}$ (es decir, cuando u es máximo), debemos anular la cte de integración; entonces, restableciendo los valores de a y b :¹

$$\frac{\ell^2}{\mu \alpha} \frac{1}{r} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \ell^2 E}{\mu \alpha^2}} \cos \varphi \quad (1)$$

Antes de averiguar qué tipo de trayectoria es esta, veamos que el mismo resultado se obtiene por otra vía.

2 Ecuación de Binet

Ya dijimos que la evolución radial de la masa reducida μ se podía entender a la luz del potencial efectivo. Entonces podemos escribir la ecuación²

$$\mu \ddot{r} = -\frac{dV_{efec}}{dr}$$

Atendiendo a la forma del potencial efectivo, y llamando $f(r) = -dV/dr$,

$$\mu \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} + f(r) \quad (2)$$

¹Si $\alpha < 0$ (potencial coulombiano repulsivo) es $b < 0$. Entonces resulta

$$-\frac{\ell^2}{\mu |\alpha|} \frac{1}{r} = 1 - \sqrt{1 + \frac{2 \ell^2 E}{\mu \alpha^2}} \cos \varphi$$

²Por supuesto, la ecuación no es más que la derivada de $E = (1/2) \mu \dot{r}^2 + V_{efec}(r)$.

Como nos interesa la órbita $r(\varphi)$, necesitamos una ecuación en la variable φ . Para ello nos valemos de la conservación de p_φ , que lleva a

$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2}$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} = \frac{\ell}{\mu r^2} \frac{d}{d\varphi}$$

Si además optamos por la variable $u \equiv r^{-1}$, entonces

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{\ell}{\mu r^2} \frac{du}{d\varphi} = -\frac{\ell}{\mu} \frac{du}{d\varphi}$$

Por lo tanto

$$\ddot{r} = \frac{\ell}{\mu r^2} \frac{d}{d\varphi} \dot{r} = -\frac{\ell^2 u^2}{\mu^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

reemplazando este resultado en la ecuación (2) obtenemos la **ecuación de Binet**

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u + \frac{\mu}{\ell^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) = 0$$

Esta ecuación es válida para cualquier potencial central. Si elegimos el origen del ángulo φ en un punto absidal donde r es mínimo (u es máximo), tendremos las siguientes condiciones de contorno

$$u(\varphi = 0) = u_{\max}, \quad \frac{du}{d\varphi}(\varphi = 0) = 0$$

Vemos que tanto la ecuación como las condiciones de contornos son invariantes ante el cambio $\varphi \rightarrow -\varphi$. Esto significa que las órbitas son simétricas respecto de los puntos absidales.

En el caso gravitatorio es

$$f = -\frac{\alpha}{r^2} = -\alpha u^2$$

y la ecuación de Binet queda

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha \mu}{\ell^2}$$

cuya solución, con las condiciones de contorno dadas es

$$u = A \cos \varphi + \frac{\alpha \mu}{\ell^2}$$

donde la amplitud A de la oscilación radial queda determinada por el valor de la energía. Podemos reescribir la solución en la siguiente forma

$$\frac{\ell^2}{\mu \alpha} \frac{1}{r} = 1 + e \cos \varphi$$

donde e es una constante de integración. Este resultado es igual al obtenido en la ecuación (1), siendo³

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 \ell^2 E}{\alpha^2 \mu}}$$

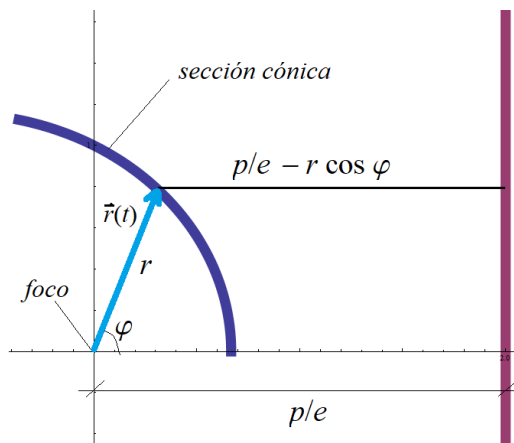
3 Secciones cónicas

La solución para la órbita barrida por el vector posición $\vec{r} = r \hat{r} = r (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j})$ en el caso gravitatorio es una **sección cónica**. Las secciones cónicas son curvas planas que cumplen la ecuación

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi$$

que puede leerse así:

$$\frac{p}{e} - r \cos \varphi = \frac{r}{e}$$



³Si $\alpha < 0$ (potencial coulombiano repulsivo) deberíamos optar por una constante de integración negativa o, equivalentemente, escribir el segundo miembro de la ecuación anterior como $1 - e \cos \varphi$.

Como muestra la Figura, $\frac{p}{e} - r \cos \varphi$ es la distancia de cada punto de la curva a una recta fija, mientras que r es la distancia de ese mismo punto a un punto F que llamaremos **foco**. Las secciones cónicas son curvas tales que el cociente entre esas dos distancias es constante a lo largo de la curva (vale $1/e$). Según el valor de e , estas curvas son:

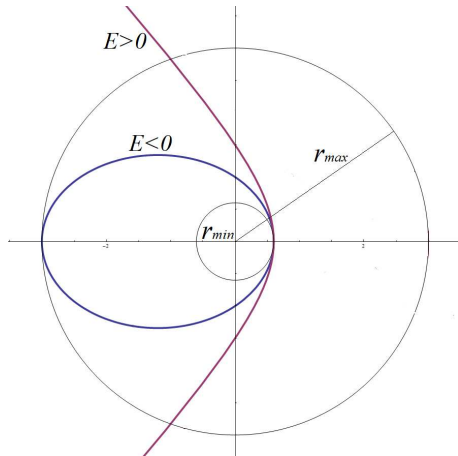
1) **circunferencia** ($e = 0$): $r = p = \frac{\ell^2}{\alpha \mu}$, $E = -\frac{\alpha^2 \mu}{2 \ell^2}$

2) **elipse** ($0 < e < 1$): $-\frac{\alpha^2 \mu}{2 \ell^2} < E < 0$, e es la *excentricidad* de la elipse
 $r_{\min} = r|_{\varphi=0} = \frac{p}{1+e}$, $r_{\max} = r|_{\varphi=\pi} = \frac{p}{1-e}$ ($\frac{p}{2} < r_{\min} < p < r_{\max} < \infty$),

3) **parábola** ($e = 1$): $E = 0$, $r_{\min} = r|_{\varphi=0} = \frac{p}{2}$, $r_{\max} = r|_{\varphi=\pi} = \infty$

4) **hipérbola** ($e > 1$): $E > 0$, $r_{\min} = r|_{\varphi=0} = \frac{p}{1+e} < \frac{p}{2}$,⁴
 $r_{\max} = \infty$ se alcanza con $\varphi = \pm \varphi_{\infty} \equiv \pm \arccos[-1/e]$

La Figura muestra dos órbitas con el mismo valor de r_{\min} ; una de energía negativa y otra de energía positiva.⁵

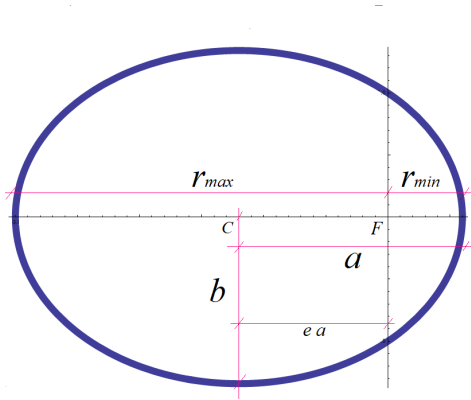


⁴La ecuación para el potencial coulombiano repulsivo, $-p/r = 1 - e \cos \varphi$ ($e > 1$, $p > 0$), también genera una trayectoria hiperbólica. La distancia mínima al foco es $r_{\min} = r|_{\varphi=0} = \frac{p}{e-1}$.

⁵Un mismo $r_{\min} = p/(1+e)$ para valores distintos de E se consigue con distintos valores de ℓ (se compensa el cambio en e con un cambio en p).

Veamos el caso de la elipse. En la siguiente Figura vemos que el semieje mayor de la elipse a es igual a

$$a = \frac{1}{2} (r_{\min} + r_{\max}) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\frac{\ell^2}{\mu \alpha}}{-\frac{2 \ell^2 E}{\alpha^2 \mu}} = -\frac{\alpha}{2 E} \quad (3)$$



Por cierto, la elipse resulta más familiar cuando está escrita en coordenadas cartesianas con origen en el centro de la elipse C . El cambio de coordenadas polares con origen en el foco F a cartesianas con origen en C es⁶

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi + d_{CF} = r \cos \varphi + (a - r_{\min}) = r \cos \varphi + e a \\ y &= r \sin \varphi = r \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

Calculemos la siguiente forma cuadrática:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= r^2 \cos^2 \varphi + 2 e a r \cos \varphi + e^2 a^2 + \frac{r^2(1 - \cos^2 \varphi)}{1 - e^2} \\ &= -\frac{e^2 r^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} + 2 e a r \cos \varphi + e^2 a^2 + \frac{r^2}{1 - e^2} \end{aligned}$$

Como la ecuación de la elipse dice que $e r \cos \varphi = p - r$, entonces

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{(p-r)^2}{1-e^2} + 2 a (p-r) + e^2 a^2 + \frac{r^2}{1-e^2}$$

⁶El foco F es el origen del vector posición $\vec{r} = r \cos \varphi \hat{i} + r \sin \varphi \hat{j}$. No deben confundirse las coordenadas x, y con origen en C con las componentes cartesianas del vector posición.

reemplazando el valor del semieje mayor $a = p/(1 - e^2)$:

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = -\frac{(p - r)^2}{1 - e^2} + \frac{2p(p - r)}{1 - e^2} + \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{r^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2} \left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \right) = a^2$$

Así recuperamos la elipse de semieje mayor a ; el semieje menor es

$$b = a \sqrt{1 - e^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{a p} = \frac{\ell}{\sqrt{2|E|\mu}}$$

4 Primera Ley de Kepler

En la interacción gravitatoria entre una estrella de masa m_* y un planeta de masa $m_p \ll m_*$, las posiciones de la estrella y el planeta son

$$\vec{r}_P = \frac{m_* \vec{r}}{m_* + m_P} \approx \vec{r}, \quad \vec{r}_* = -\frac{m_P \vec{r}}{m_* + m_P} \approx 0$$

1ra Ley: Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos.⁷

5 Tercera Ley de Kepler

Teniendo en cuenta que el área de una elipse es

$$\text{Área} = \pi a b,$$

y que la Segunda Ley de Kepler dice que la velocidad areolar es constante,

$$\frac{d\text{Área}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{\ell}{2\mu},$$

entonces el área de la elipse se barre en un tiempo T (período de la órbita)

$$T = \frac{\text{Área}}{\frac{d\text{Área}}{dt}} = \frac{\pi a b}{\frac{\ell}{2\mu}} = \frac{\pi a^{3/2} p^{1/2}}{\frac{\ell}{2\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2}$$

⁷También eran elípticas las órbitas del potencial elástico. Sin embargo, en aquel caso el centro de la elipse se ubicaba en el centro de fuerzas. En cambio, en el caso gravitatorio el centro de fuerzas coincide con un foco de la elipse. En términos del ángulo $\Delta\varphi$ entre dos r_{\max} consecutivos, es $\Delta\varphi = \pi$ para el potencial elástico, y $\Delta\varphi = 2\pi$ para el potencial gravitatorio.

Como $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ y $\alpha = G m_1 m_2$ es

$$T = \frac{2 \pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}$$

Cuando se trata de la interacción entre una estrella y un planeta, $m_1 + m_2$ se aproxima por la masa de la estrella. Por lo tanto T^2/a^3 no depende más que de la masa de la estrella.

3ra Ley: Los cuadrados de los períodos de las órbitas de los planetas son proporcionales a los cubos de los respectivos semiejes mayores de las órbitas.

6 Regreso al problema de dos cuerpos

Habiendo resuelto la evolución $\vec{r}(t)$ de la masa reducida μ podemos recuperar los movimientos de cada una de las dos partículas:

$$\vec{r}_1(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}(t) , \quad \vec{r}_2(t) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}(t)$$

Como el extremo de $\vec{r}(t)$ describe una cónica, lo mismo harán los vectores $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$, cuyo origen está en el CM del sistema.

