

Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2019
Complemento de la clase del 4/11: Variables de ángulo–acción*

1.	Función característica de Hamilton	1
2.	Variables ángulo–acción para sistemas con un solo grado de libertad	3
3.	Variables ángulo–acción para una clase de sistemas unidimensionales	10
3.1.	Ningún misterio	15
3.2.	Ejemplo: el oscilador armónico	16
4.	Definición alternativa (y más sensata) de la variable ángulo	19
4.1.	Ejemplo: el oscilador armónico con la definición sensata	24

Antes de definir las variables de ángulo–acción vamos a estudiar la transformación generada por la función característica de Hamilton. La teoría de las variables de ángulo–acción cabe en dos renglones, pero la práctica requiere un proceso de familiarización.

1. Función característica de Hamilton

Para sistemas conservativos con un solo grado de libertad, hemos visto que la función principal de Hamilton S puede buscarse de la forma

$$S(q, E, t) = -Et + W(q, E). \tag{1}$$

Considerada como función generatriz, S da la transformación a un sistema de coordenadas canónicas que tiene hamiltoniano nulo, $K = 0$. Hay que observar que la propia función $W(q, E)$ depende del número suficiente de variables como para ser ella misma considerada función generatriz. Puesto que no depende del tiempo, la transformación que realiza W deja invariante el hamiltoniano, esto es, $K = H$. La función W recibe el nombre de **función característica de Hamilton**, y es también llamada **acción abreviada**.

Debido a que la ecuación de H–J para la función S es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0, \tag{2}$$

la ec. (1) implica que la ecuación diferencial que satisface W es

$$H(q, W'(q)) = E, \tag{3}$$

cuya solución dependerá explícitamente de E ,

$$W = W(q, E). \tag{4}$$

Si asignamos el lugar de E en la función $W(q, E)$ al nuevo impulso P , definiendo

$$F_2(q, E) = W(q, E), \tag{5}$$

*zanellaj@df.uba.ar

vemos que en las nuevas variables el hamiltoniano es justamente E ,

$$K(Q, E) = E. \quad (6)$$

La transformación definida por W lleva, de este modo, a un hamiltoniano que no es cero, como sucedía con la función principal de Hamilton, pero que, sin embargo, tiene una dinámica muy simple. Como es obvio por el hecho de que el sistema sea conservativo, la ecuación de movimiento para E es

$$\dot{E} = -\frac{\partial K(Q, E)}{\partial Q} = 0, \quad (7)$$

lo que expresa la conservación de H . La ecuación de movimiento para Q , que con la función S era $\dot{Q} = 0$, es ahora

$$\dot{Q} = \frac{\partial K(Q, E)}{\partial E} = 1, \quad (8)$$

es decir,

$$Q(t) = t + Q_0. \quad (9)$$

La constante Q_0 es la otra constante necesaria para fijar las condiciones iniciales.

Las ecuaciones de transformación son

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}(q, E), \quad Q = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E). \quad (10)$$

La primera ecuación da las órbitas en el espacio de fase. La segunda ecuación, a través de la ec. (9), contiene la dinámica,

$$t + Q_0 = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E), \quad (11)$$

lo que permite despejar q como función del tiempo,

$$q = q(t, E, Q_0). \quad (12)$$

Todo esto se extiende fácilmente al caso con más de un grado de libertad. La función característica de Hamilton será solución de la ecuación diferencial

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}(q_1, \dots, q_n), \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}(q_1, \dots, q_n)\right) = E, \quad (13)$$

o, más lacónicamente,

$$H(\mathbf{q}, \nabla W(\mathbf{q})) = E, \quad (14)$$

donde reservamos el nombre E para la constante que es igual al hamiltoniano. Debemos encontrar una solución de la ecuación anterior que dependa, no sólo de E , sino de $n - 1$

otras constantes (ninguna de ellas aditiva),

$$W = W(q_1, \dots, q_n, E, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (15)$$

Una vez hallada esta función, lo más directo es definir la función generatriz haciendo que los nuevos impulsos P_i ocupen los lugares de las constantes de integración, identificando P_1 con la constante E ,

$$F_2(q_1, \dots, q_n, E, P_2, \dots, P_n) = W(q_1, \dots, q_n, E, P_2, \dots, P_n). \quad (16)$$

Así resulta

$$K(Q_1, \dots, Q_n, E, P_2, \dots, P_n) = E. \quad (17)$$

Salvo Q_1 , que está dada por

$$Q_1(t) = t + Q_0, \quad (18)$$

todas las otras Q_i son constantes de movimiento, puesto que K sólo depende de $P_1 = E$. Las ecuaciones de transformación

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_n, E, P_2, \dots, P_n) \quad (19)$$

dan los impulsos p_i en términos de las q_i y de las n constantes P_i . La dinámica está contenida en las ecuaciones de transformación para las nuevas coordenadas,

$$Q_1 = t + Q_0 = \frac{\partial W}{\partial E}(q_1, \dots, q_n, E, P_2, \dots, P_n), \quad (20)$$

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}(q_1, \dots, q_n, E, P_2, \dots, P_n), \quad i = 2, \dots, n. \quad (21)$$

Estas ecuaciones deberían permitir despejar las n funciones q_i en términos del tiempo, de las $n - 1$ Q_i con $i \geq 2$, de las $n - 1$ constantes P_i , de E y de Q_0 . Es decir, hay en total $2n$ constantes disponibles, que es el número necesario para fijar las condiciones iniciales.

2. Variables ángulo–acción para sistemas con un solo grado de libertad

Para sistemas conservativos con un solo grado de libertad, la esencia de las variables ángulo–acción está en elegir como nuevo impulso generalizado no la energía E sino una función especial de la energía. Como todo el asunto radica en la elección adecuada del nuevo impulso, primero explicaremos en detalle la manera en que el nuevo impulso puede elegirse como una función previamente determinada de la energía. Luego se tratará de aplicar esto a un caso en particular.

La ecuación de H-J para la función característica de Hamilton es

$$H(q, W'(q)) = E. \quad (22)$$

La constante E es el hamiltoniano evaluado sobre la órbita. Encontrada una solución

$$W = W(q, E), \quad (23)$$

la transformación canónica generada por W conduce del hamiltoniano original $H(q, p)$ a un nuevo hamiltoniano

$$K(Q, E) = E, \quad (24)$$

donde E es el impulso y Q su coordenada conjugada. La relación entre las coordenadas originales y las nuevas viene dada a través de las ecuaciones de transformación

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}(q, E), \quad Q = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E). \quad (25)$$

Recién aquí es donde se revela en cada problema el significado físico de la coordenada Q.

En verdad, la forma en la que definimos la constante de separación en la ec. (22) es arbitraria. Del mismo modo sería válido escribir

$$H(q, W'(q)) = 2\alpha, \quad (26)$$

o, más generalmente,

$$H(q, W'(q)) = f^{-1}(\alpha). \quad (27)$$

Definimos esta ecuación a través de la inversa de una dada función para que la relación entre la constante de separación y la energía sea entonces

$$\alpha = f(E). \quad (28)$$

Por ejemplo, si quisiéramos definir al nuevo impulso generalizado como $\alpha = E^2$, en la ec. (22) en lugar de E deberíamos escribir

$$H(q, W'(q)) = \sqrt{\alpha}. \quad (29)$$

Notar que la función que aparece aquí es la inversa de la función de la energía a la que queremos que sea igual la constante de separación. La solución de la ecuación anterior es

$$W = W(q, \sqrt{\alpha}), \quad (30)$$

y el nuevo hamiltoniano es

$$K(Q, P) = \sqrt{P}. \quad (31)$$

En la práctica, en lugar de resolver la ec. (27), uno resuelve la ec. (22), encuentra la solución $W(q, E)$ y luego reemplaza E en términos del nuevo impulso. Evidentemente resolver la ec. (27) es lo mismo que resolver la ec. (22). Se trata de reemplazar una constante por otra. En definitiva, la función de q y P

$$W(q, f^{-1}(P)) \quad (32)$$

es la función generatriz que lleva del hamiltoniano original al nuevo hamiltoniano

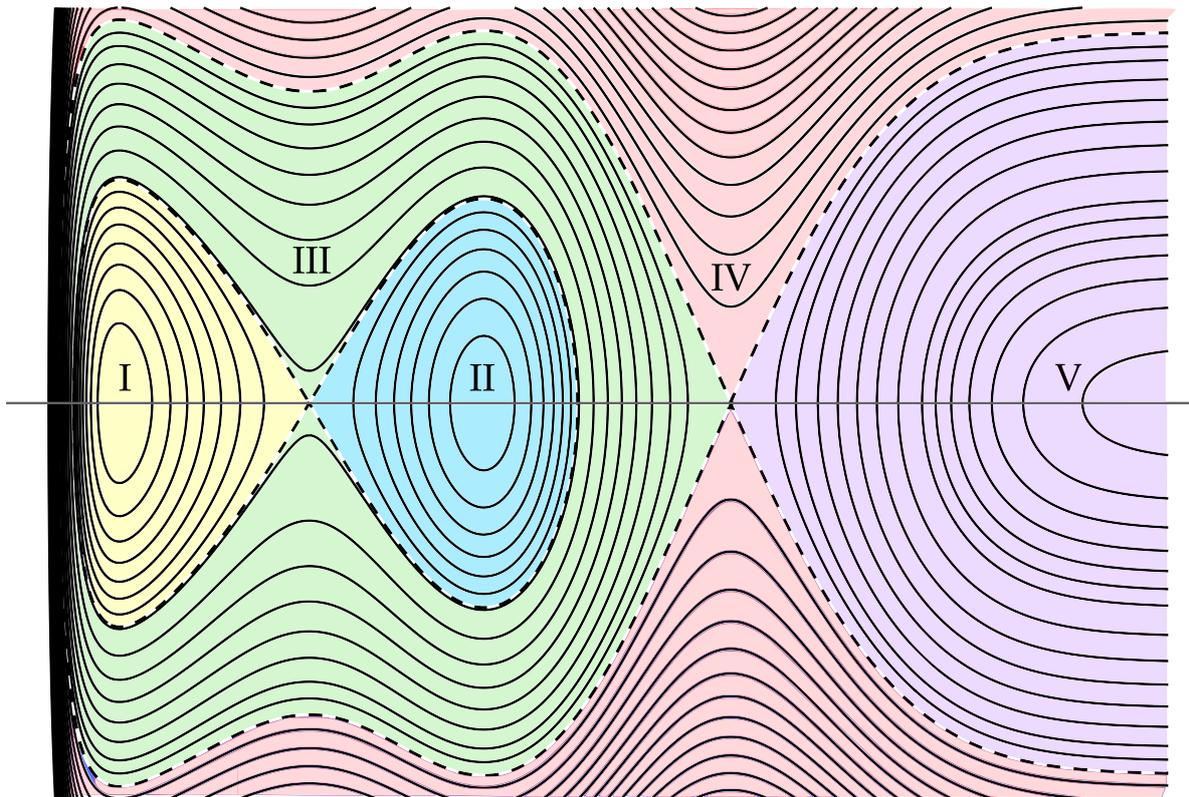
$$K(Q, P) = f^{-1}(P), \quad (33)$$

donde el significado físico del nuevo impulso está dado por

$$P = f(E). \quad (34)$$

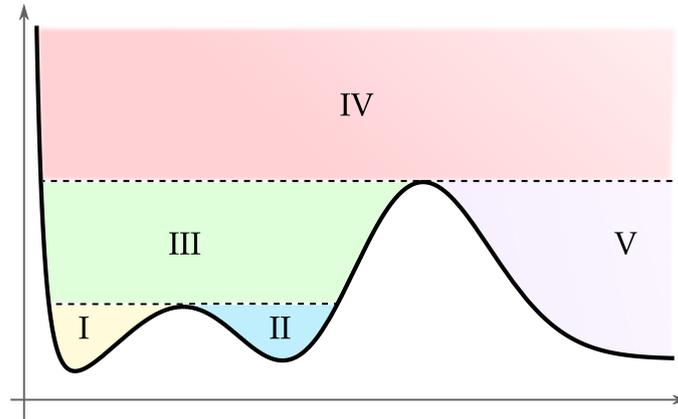
Movimiento periódico en el plano qp

En sistemas que admiten movimientos periódicos, existe la posibilidad de elegir una función $f(E) = J(E)$ con propiedades muy particulares. La siguiente figura muestra el retrato de fase de uno de estos sistemas.



El plano se divide en un conjunto de regiones invariantes separadas por curvas que reciben el nombre de **separatrices**, mostradas en la figura como líneas de trazos. En este ejemplo no todas las regiones corresponden a movimientos periódicos, sino únicamente las regiones numeradas como I, II y III, que son las que contienen a las órbitas cerradas.

El potencial que genera el retrato de fase anterior es el que se muestra a continuación.



Las órbitas en las regiones I y II rodean un mínimo del potencial. Las órbitas de la región III rodean a los dos mínimos. El resto de las órbitas son no acotadas. Las separatrices corresponden a las curvas de nivel de $E(q, p)$ para los valores de los máximos del potencial.

Cuando elegimos que E sea el nuevo impulso, al dar el valor de E y la región a la que pertenece la condición inicial (q_0, p_0) , estamos especificando la órbita sobre la que se mueve la partícula.

Si en lugar del valor de E se nos informara el valor que asume cierta función conocida e invertible de E , digamos, si se nos informa el valor de P y sabemos que $P = f(E)$, entonces podríamos identificar la órbita calculando $E = f^{-1}(P)$. Lo que queremos señalar es que no hay una única forma de identificar las órbitas. La más directa es decir a qué valor de E corresponden pero es igualmente válido informar a qué valor de cierta función de E corresponden.

Llegamos por fin a la variable acción. En regiones en las que el movimiento es periódico y las órbitas cerradas (a excepción quizá de puntos aislados) definimos la función de E

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq, \quad (35)$$

donde la integral es a lo largo de la curva cerrada de energía E . La curva está orientada en el sentido horario (lo que nos interesa es que la integral sea igual al área encerrada por la curva). Notar que esto es justamente lo contrario de la definición matemática usual, en donde la curva se recorre en sentido antihorario o positivo.

Hasta aquí la definición (35) parece muy abstracta, pero en realidad la función $J(E)$ corresponde a algo sumamente concreto: si el sentido de circulación es negativo, $J(E)$ es $1/2\pi$ veces el área encerrada por la curva de energía E . La manera más formal de ver esa correspondencia es a través del teorema de Green,

$$\oint (A dx + B dy) = \int \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy. \quad (36)$$

Notar que la integral curvilínea va en el sentido positivo. Si invertimos el sentido de

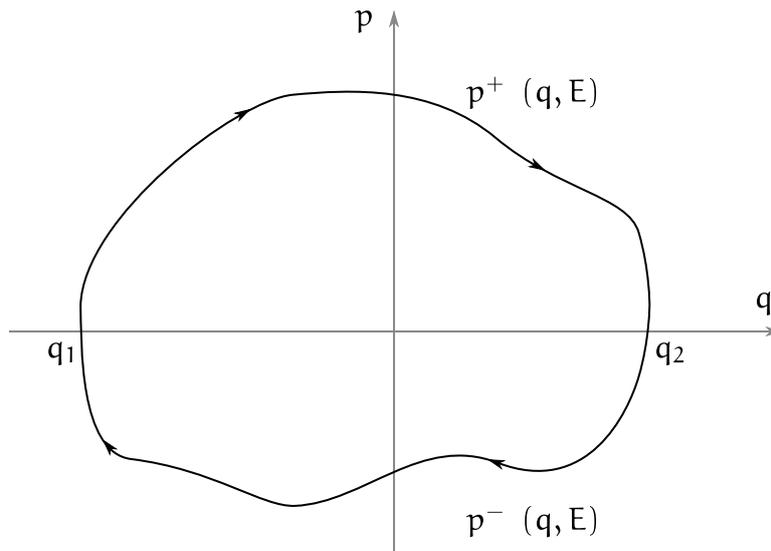
circulación y elegimos $B = 0$ y $A = y$ obtenemos

$$\oint y dx = \int dx dy = \text{área.} \quad (37)$$

También es válido tomar $B = 1$ y $A = 0$, lo que da $-\oint x dy = \text{área}$. Tenemos entonces varias posibilidades para evaluar $J(E)$,

$$2\pi J(E) = \oint p dq = -\oint q dp = \int dq dp. \quad (38)$$

Para una curva simple como la de la figura siguiente, el resultado de la ec. (37) es obvio.



En efecto, definiendo las dos ramas del impulso como p^+ y p^- , el área encerrada es

$$\begin{aligned} 2\pi J(E) &= \int_{q_1}^{q_2} dx p^+(q, E) - \int_{q_1}^{q_2} dx p^-(q, E) \\ &= \int_{q_1}^{q_2} dx p^+(q, E) + \int_{q_2}^{q_1} dx p^-(q, E) \\ &= \oint dq p(q, E). \end{aligned} \quad (39)$$

La función J es la variable de acción. Si hemos resuelto la ec. (22) y la solución es $W(q, E)$, en lugar de definir la función generatriz como $F_2(q, E) = W(q, E)$, definimos

$$F_2(q, J) = W(q, E(J)) \equiv W(q, J), \quad (40)$$

donde $E(J)$ es la inversa de la función $J(E)$ definida a partir de la ec. (35). Hay que admitir que se comete un abuso de notación al hablar de funciones y variables que tienen el mismo nombre, y al llamar con la misma letra W a dos funciones que son esencialmente distintas. El nombre de las variables forma parte de la definición de la función. Si escribimos $W(q, E)$ se entiende una cosa, y si escribimos $W(q, J)$ se entiende otra.

La propiedad relevante de la función F_2 así definida surge de calcular cuál es la nueva coordenada, denominada variable ángulo, y usualmente representada por el símbolo w . La ecuación de transformación es

$$w = \frac{\partial W}{\partial J}(q, J). \quad (41)$$

Cuando la partícula se mueve un dq en su órbita, en la nueva coordenada se produce un cambio

$$dw = \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J}(q, J) dq = \frac{\partial p}{\partial J}(q, J) dq. \quad (42)$$

Si integramos dw a lo largo de la órbita completa obtenemos

$$\Delta w = \oint \frac{\partial p}{\partial J}(q, J) dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint p(q, J) dq. \quad (43)$$

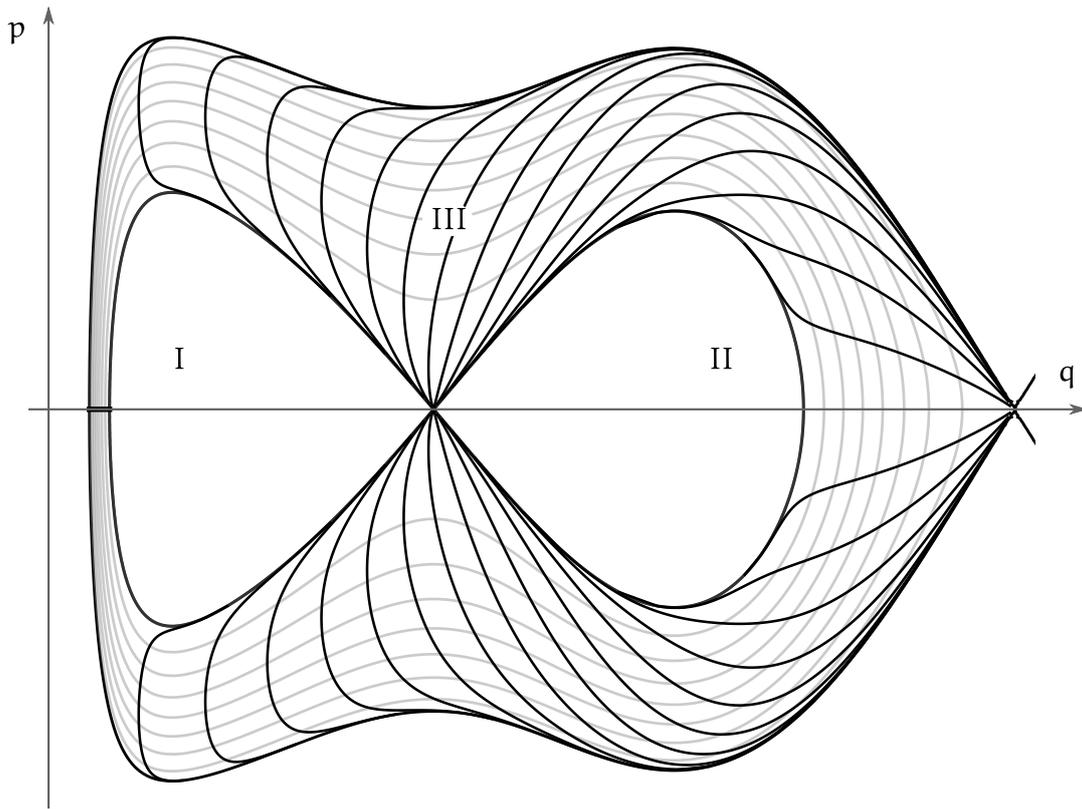
Pero la integral que aparece aquí es $2\pi J$, de modo que

$$\Delta w = 2\pi \frac{\partial J}{\partial J} = 2\pi. \quad (44)$$

La interpretación de este resultado es la siguiente. Consideremos una órbita con energía E y variable de acción $J(E)$. Sobre la órbita marcamos un punto (q, p) cualquiera y le asignamos el valor de $w = 0$. Seguimos la evolución temporal del punto en el espacio de fase. A medida que el punto se mueve, hacemos marcas sobre la órbita y las etiquetamos de acuerdo al valor de la coordenada w . Entonces, la ec. (44) dice que al regresar al punto de partida luego de completado un ciclo, el valor de la coordenada w será igual a 2π .

La transformación a las variables (w, J) , que en principio parecía una cosa muy abstracta, tiene en realidad una interpretación gráfica muy directa. Cada órbita está identificada por su valor de J , como si marcásemos curvas de nivel en un mapa de relieve. En cierto sentido podemos pensar que J es el *radio* de las órbitas. Sobre cada órbita, la coordenada w va marcando puntos entre 0 y 2π como si se tratara del cuadrante de un reloj. En el plano qp , las líneas coordenadas de J coinciden con las órbitas, en tanto que las líneas coordenadas de w trazan especies de rayos. Es un tipo de transformación que recuerda al paso de coordenadas cartesianas a polares, sólo que en lugar de círculos de radio constante tenemos a las órbitas de J constante, y en lugar de las rectas de ángulo constante tenemos a las curvas de w constante. Es como si tomásemos el sistema de coordenadas polares y lo deformásemos. (Pueden demostrar como ejercicio que las coordenadas polares en el plano qp también son canónicas).

La siguiente figura muestra las curvas coordenadas de acción constante y ángulo constante en el plano qp para la región III del potencial graficado en la pág. 6. Las curvas de J constante son las órbitas propiamente dichas. Las curvas de ángulo constante están separadas por $\Delta w = \pi/16$.



La propiedad de variar en 2π cuando el punto del espacio de fase recorre un ciclo no es la única característica notable de la coordenada w . La transformación generada por $W(q, J)$ hace que el hamiltoniano en las nuevas variables se escriba como

$$K(w, J) = E(J). \quad (45)$$

Obviamente J es constante. La dinámica de w está dada por

$$\dot{w} = \frac{dE(J)}{dJ} \equiv \omega(J), \quad (46)$$

lo que implica

$$w(t) = \omega(J)t + w_0. \quad (47)$$

Puesto que \dot{w} es constante, la partícula tarda el mismo tiempo en recorrer cualquier tramo de la órbita que comprenda el mismo intervalo Δw de la variable ángulo. Además, debido a que w varía en 2π por cada ciclo, el período de la órbita es

$$T(J) = \frac{2\pi}{\omega(J)} = 2\pi \left[\frac{dE(J)}{dJ} \right]^{-1}, \quad (48)$$

o, equivalentemente,

$$T(E) = 2\pi \frac{dJ(E)}{dE}. \quad (49)$$

La unidades de las variables de ángulo–acción

La función principal S , la función característica W y la acción J tienen unidades de q por p . Debido a que q y p pueden ser cualquier cosa, no nos es dado hablar en general de las unidades de q o de las unidades de p . Sin embargo, las ecuaciones canónicas

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (50)$$

implican que las unidades del producto qp son de energía por tiempo. Esto vale siempre, y sirve para chequear las cuentas. Las unidades de energía por tiempo son también las unidades del momento angular; es bueno recordarlo. A la constante de Planck se la llama **cuanto de acción** y tiene unidades de energía por tiempo; el momento angular está cuantizado en unidades de \hbar . La variable ángulo, que es $\partial W/\partial J$, es adimensional.

3. Variables ángulo–acción para una clase de sistemas unidimensionales

Para sistemas con un solo grado de libertad, la teoría de las variables de ángulo–acción cabe en dos renglones, pero llevarla a la práctica requiere un proceso de familiarización. En esta sección trataremos con sistemas en donde el hamiltoniano está dado por

$$H(q, p) = T(p) + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (51)$$

Para que existan movimientos periódicos, el potencial $V(q)$ debe tener al menos un mínimo local. Si el potencial tiene más de un mínimo, habrá que analizar por separado todas las regiones invariantes que permitan órbitas cerradas, como en la figura de la pág. 5

Para cada valor de E y de q la ecuación $H(q, p) = E$ tiene dos raíces iguales en módulo y de signos opuestos,

$$p(q, E) = \pm \sqrt{E - V(q)} \equiv \pm \wp(q, E), \quad (52)$$

donde por definición tomamos $\wp(q, E) \geq 0$.

Lo que digamos a continuación puede ser adaptado a hamiltonianos en donde el término cinético $T(p)$ sea una función par de p . Podría ser $T(p) = c|p|$ o

$$T(p) = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2},$$

como en algunos de los problemas de las guías, y también de los parciales. En esos casos, hay que tener mucho cuidado con los razonamientos que involucren al gráfico del potencial. Para $T(p) = p^2/2m$ sabemos leer en este gráfico las características esenciales del movimiento de la partícula, basándonos en que $\dot{q} = p/m$. Tenemos práctica en analizar problemas unidimensionales que respondan a una ecuación de conservación de la forma

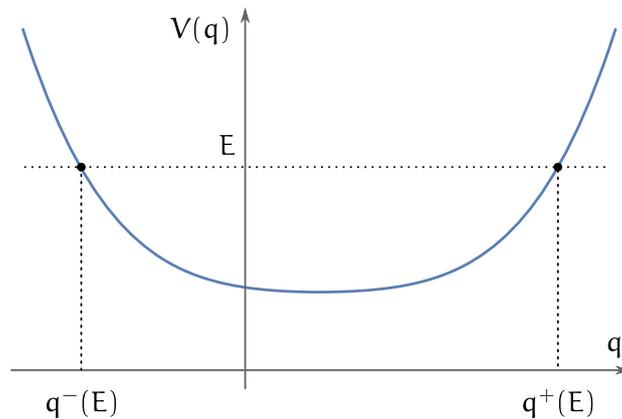
$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) = E, \quad (53)$$

pero no en problemas que impliquen cosas tales como

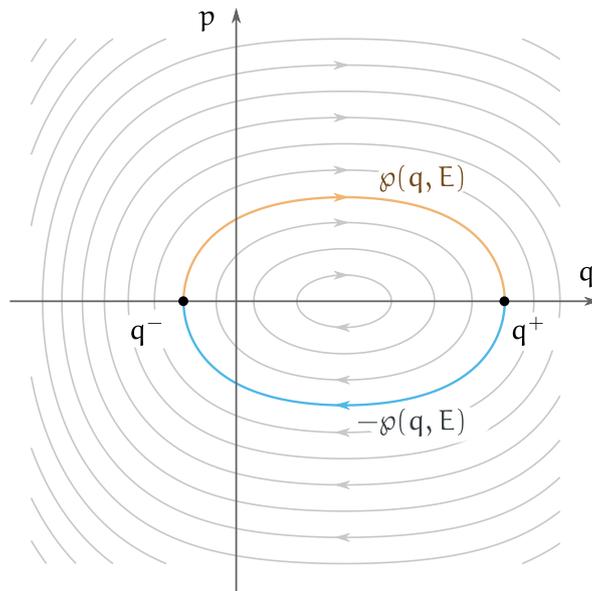
$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{q}^2/c^2}} + V(q) = E. \quad (54)$$

Funciones $T(p)$ más generales que $p^2/2m$ requerirán un estudio especial si se intenta analizar el problema en términos de q y \dot{q} . Lo más seguro es concentrarse en el retrato de fase en el plano qp y dejar a un lado momentáneamente la relación entre \dot{q} y p .

Supongamos, por dar un caso concreto, que el potencial es como muestra la figura. Lo que nos interesa es que haya un rango de energías en donde existan dos puntos de retorno, $q^\pm(E)$. De hecho, en los ejemplos veremos potenciales más generales.



Su retrato de fase tendrá el siguiente aspecto, donde hemos marcado las dos ramas de la función $p(q, E)$ para una órbita con energía E .



Lo primero es *calcular*, o al menos escribir la expresión integral de la función $W(q, E)$ a partir de la ecuación

$$H(q, W'(q)) = \frac{1}{2m} W'(q)^2 + V(q) = E. \quad (55)$$

La solución va a tener dos ramas,

$$W^{\pm}(q, E) = \pm \int dq \wp(q, E). \quad (56)$$

Por mucha integral indefinida que escribamos, en algún momento, implícita o explícitamente, habrá que elegir un límite inferior para la integral.

Cuando uno dice que la integral de x es $x^2/2$, está eligiendo una de entre infinitas funciones primitivas, la que corresponde a la integral definida

$$\int_0^x dx x. \quad (57)$$

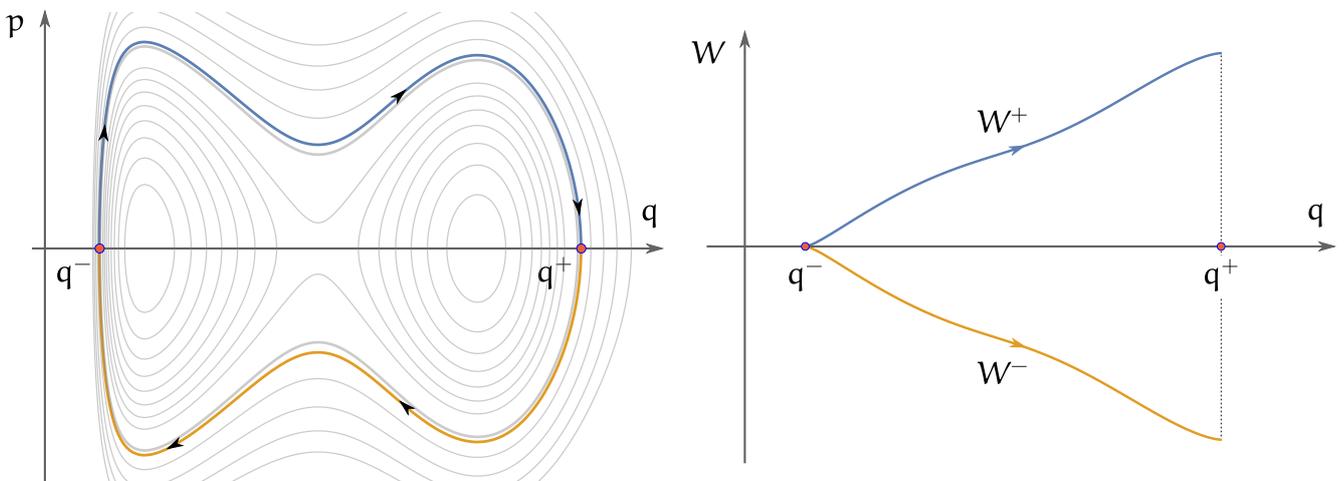
En la ec. (56), una elección práctica (pero no nuestra preferida) es fijar el límite inferior de integración en el punto de retorno $q^-(E)$, definiendo

$$W^{\pm}(q, E) = \pm \int_{q^-(E)}^q dq \wp(q, E). \quad (58)$$

No hay que apresurarse a calcular esta integral ni tampoco el valor de los puntos de retorno. En general, los puntos de retorno entran en el cálculo de las integrales únicamente a través de la propiedad que los define, a saber, que $\dot{q} = p/m$ sea cero en esos puntos. No suele ser necesario calcular q^{\pm} , sino únicamente tener en cuenta que

$$E - V(q^{\pm}) = 0. \quad (59)$$

La figura de la izquierda muestra una órbita en la región III del potencial de la pág. 6. A la derecha, se muestran las dos ramas de la función W . Las flechas en la figura de la izquierda indican el sentido de movimiento del punto de fase; las flechas en la figura de la derecha indican el sentido en el que se mueve el extremo superior de la integral (58), divergiendo a partir del punto de retorno q^- .



Volveremos a la función W más adelante.

Llegados a este punto nos preocupamos por calcular la variable de acción,

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq = \frac{1}{2\pi} \text{área}(E). \quad (60)$$

Si las órbitas en el retrato de fase son curvas con un área conocida, por ejemplo círculos, elipses, rectángulos, lemniscatas, entonces usamos directamente esa información. Si no, habrá que calcular la integral de línea, lo que supone evaluar la siguiente expresión

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{q^-(E)}^{q^+(E)} dq \wp(q, E) - \int_{q^+(E)}^{q^-(E)} dq \wp(q, E) \right]. \quad (61)$$

Vemos que lo que se está integrando aquí es lo mismo que se integra para calcular W^\pm en la ec. (58). La primera integral en el segundo miembro de la ec. (61) corresponde al tramo de la integral de línea que va desde q^- hasta q^+ a lo largo de la mitad superior de la órbita, donde es $p \geq 0$. La segunda integral corresponde al tramo de la integral de línea que regresa desde q^+ hasta q^- , recorriendo la sección de la órbita en donde $p \leq 0$. Debido a la simetría, ambas contribuciones son iguales. El área total va a ser igual a dos veces el área de cualquiera de ellas,

$$J(E) = \frac{1}{\pi} \int_{q^-(E)}^{q^+(E)} dq \wp(q, E) = \frac{1}{\pi} W^+(q^+(E), E). \quad (62)$$

Aquí hemos usado la ec. (58) para escribir la última igualdad. Notar que es útil haber calculado W , pero de ninguna manera imprescindible. No se apuren a calcular W .

Si muy a nuestro pesar nos vemos reducidos al extremo de tener que calcular la integral

$$J(E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2m} \int_{q^-(E)}^{q^+(E)} dq \sqrt{E - V(q)}, \quad (63)$$

siempre tenemos la alternativa de calcularla a partir de una primitiva. Pero aquí los límites de integración son tan especiales que hacen que la integral pueda evaluarse por métodos más refinados; por ejemplo mediante integrales de contorno en el plano complejo. Encontrar una primitiva no siempre es el método más eficiente de calcular una integral definida.

El siguiente paso es calcular la variable ángulo, que está dada por

$$w(q, J) = \frac{\partial W(q, E(J))}{\partial J} = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E(J)) E'(J). \quad (64)$$

Para evitarnos invertir la función $J(E)$, lo más inmediato es calcular la variable ángulo como función de q y de la energía,

$$w(q, E) = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial W}{\partial E}(q, E). \quad (65)$$

Es importante notar que, según la convención que hemos usado al definir la función W , la variable ángulo, como función de q y de la energía o de q y de la acción, también

se dividirá en dos ramas, una válida para la región de la órbita en la que $p \geq 0$ y la otra válida para $p \leq 0$. Tendremos

$$w^\pm(q, E) = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial W^\pm}{\partial E}(q, E). \quad (66)$$

A partir de la ec. (63) vemos que

$$J'(E) = \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{1}{\pi} \sqrt{2m} \int_{q^-(E)}^{q^+(E)} dq \sqrt{E - V(q)} \right] = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q^-(E)}^{q^+(E)} dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (67)$$

Aquí usamos algo que ya hemos mencionado varias veces. Cuando se toma la derivada de una integral de la forma

$$I(E) = \int_{q_1(E)}^{q_2(E)} dq f(q, E), \quad (68)$$

se obtiene

$$\frac{dI(E)}{dE} = \int_{q_1(E)}^{q_2(E)} dq \frac{\partial f}{\partial E}(q, E) + f(q_2(E), E) q_2'(E) - f(q_1(E), E) q_1'(E). \quad (69)$$

En la ec. (67) sólo aparece el primer término de esta fórmula debido a que el integrando en la ec. (63) es igual a cero en los extremos de integración. Volveremos a usar esta propiedad en la integral que sigue. Por simplicidad, de ahora en más omitiremos la dependencia de q^\pm en la energía.

Continuando con la evaluación de la ec. (66), la ec. (58) implica

$$\frac{\partial W^\pm}{\partial E} = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q^-}^q dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (70)$$

Finalmente,

$$w^\pm(q, E) = \pm \pi \frac{\int_{q^-}^q dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}}{\int_{q^-}^{q^+} dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}}. \quad (71)$$

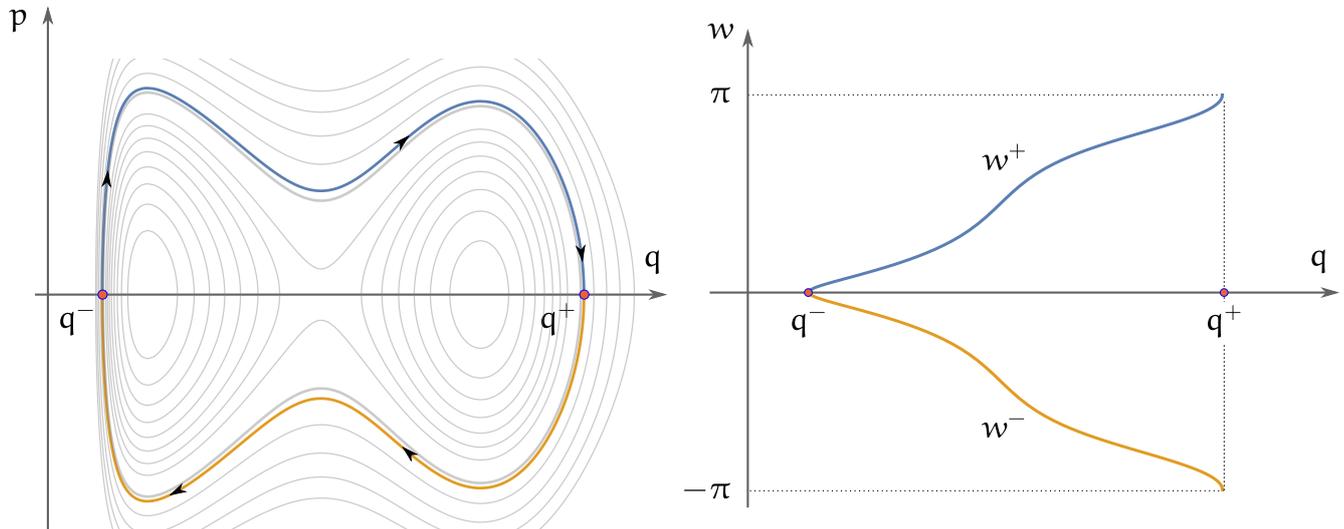
Cuando q está en el punto de retorno q^- , es $w^\pm = 0$. Si nos movemos por la rama superior de la órbita, $w^+(q, E)$ aumenta a medida que q crece y alcanza su valor máximo cuando q llega al punto de retorno q^+ . En este punto es

$$w^+(q^+, E) = \pi. \quad (72)$$

En cambio, si partimos desde q^- y recorremos la rama inferior de la órbita, w^- disminuye a medida que q aumenta, y alcanza su mínimo valor en q^+ ,

$$w^-(q^+, E) = -\pi. \quad (73)$$

Si la partícula parte desde el punto de retorno q^+ , primero recorre la rama inferior de la órbita. Durante este tramo la variable ángulo varía entre $-\pi$ y 0 . Cuando la partícula completa el ciclo, durante el movimiento sobre la rama superior de la órbita su variable ángulo habrá variado entre 0 y π . La variación neta de la variable ángulo es así igual a 2π , en acuerdo con la ec. (44). La figura de la derecha muestra la variable ángulo como función de q para la órbita de la izquierda, la misma de los ejemplos anteriores.



Otra de las propiedades de las variables de ángulo–acción es que el período de la órbita como función de la energía viene dado por la ec. (49),

$$T(E) = 2\pi J'(E). \quad (74)$$

Si reemplazamos aquí la expresión (67), resulta

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q^-}^{q^+} dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (75)$$

3.1. Ningún misterio

Se insiste en algunos libros acerca la superioridad de las variables de ángulo–acción en el cálculo del período de movimiento. Por ejemplo, en la sección que Goldstein le dedica a las variables de ángulo–acción para un sistema unidimensional se dice que

The use of action-angle variables thus provides a **powerful** technique for obtaining the frequency of periodic motion without finding a complete solution to the motion of the system.

El énfasis en la palabra *powerful* es mío. En sistemas unidimensionales, la potencia del método de las variables ángulo–acción para calcular el período de movimiento no es

superior a lo que cualquier alumno de Física 1 podría manejar. Habiendo llegado hasta un problema unidimensional equivalente, cuya ecuación de conservación se lea como

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E, \quad (76)$$

tendremos

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (77)$$

Si la partícula se mueve alrededor de un mínimo del potencial, con puntos de retorno en x_1 y x_2 , ambos funciones de E y con $x_1 < x_2$, el período del movimiento es igual al doble del tiempo que le toma a la partícula recorrer el trayecto entre x_1 y x_2 ,

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (78)$$

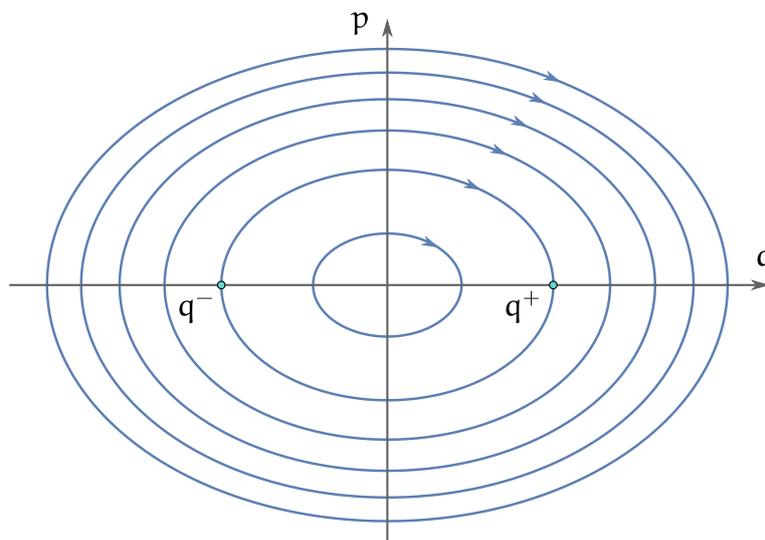
Es el mismo resultado al que llegamos a través de las variables de ángulo-acción, ec. (75). La verdadera potencia de las variables de ángulo-acción está en el análisis del movimiento de sistemas con más de un grado de libertad o, incluso tratándose de sistemas unidimensionales, en la formulación de métodos perturbativos.

3.2. Ejemplo: el oscilador armónico

El hamiltoniano es

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (79)$$

Su retrato de fase está compuesto por elipses de excentricidad constante:



La función característica de Hamilton es

$$W^\pm(q, E) = \pm\sqrt{2m} \int_{q^-}^q dq \sqrt{E - \frac{m\omega^2 q^2}{2}}. \quad (80)$$

Los puntos q^\pm satisfacen la ecuación

$$\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q^\pm = \pm 1. \quad (81)$$

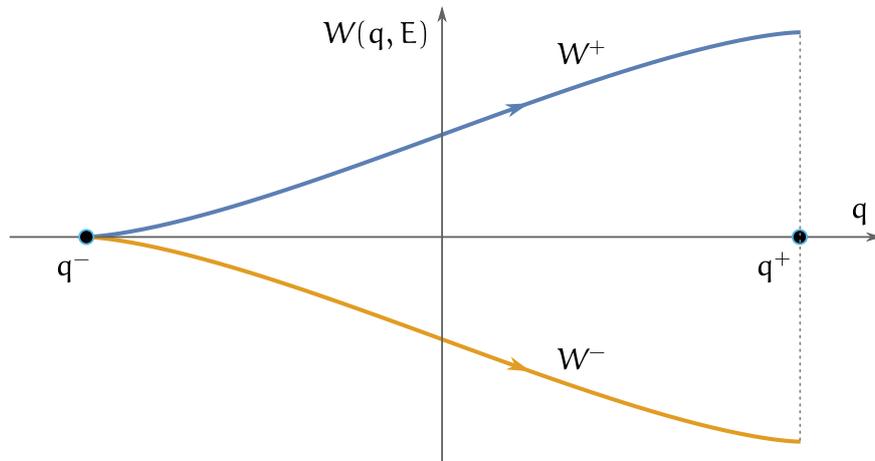
Con la sustitución

$$\sin u = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q, \quad (82)$$

queda

$$\begin{aligned} W^\pm(q, E) &= \pm \frac{2E}{\omega} \int_{-\pi/2}^{u(q, E)} du \cos^2 u = \pm \frac{E}{\omega} \left[\cos u(q, E) \sin u(q, E) + u(q, E) + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \pm \frac{E}{\omega} \left[\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}} + \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q \right) + \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

La siguiente figura muestra las dos ramas de la función W para un valor dado de la energía.



Notar que uno puede pensar a esta función como dos ramas separadas, que divergen a partir del punto de retorno q^- como indican las flechas, o como una curva continua que parte del punto inferior derecho, acompañando el movimiento de la partícula.

La acción puede calcularse a partir de la ec. (62).

$$J(E) = \frac{1}{\pi} W^+(q^+, E) = \frac{E}{\omega}. \quad (84)$$

Podemos verificar este resultado directamente a partir de las órbitas en el retrato de fase. Esas órbitas son elipses, definidas por la ecuación

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{m\omega^2 q^2}{2E} = 1. \quad (85)$$

El área de una elipse de semiejes a y b es igual a πab . Luego,

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \text{área}(E) = \frac{1}{2} \sqrt{2mE} \frac{2E}{m\omega^2} = \frac{E}{\omega}. \quad (86)$$

Según la ec. (74), el período de las oscilaciones es

$$T(E) = 2\pi J'(E) = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (87)$$

que es el resultado conocido.

Para calcular la variable ángulo, dada por la ec. (66),

$$w^\pm(q, E) = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial W^\pm}{\partial E}(q, E), \quad (88)$$

no es necesario derivar el resultado de la ec. (83). Ya dijimos varias veces que se puede hacer carrera sin tener que calcular nunca la función W . Lo más sencillo (lo desmesuradamente más sencillo) es derivar la ec. (80),

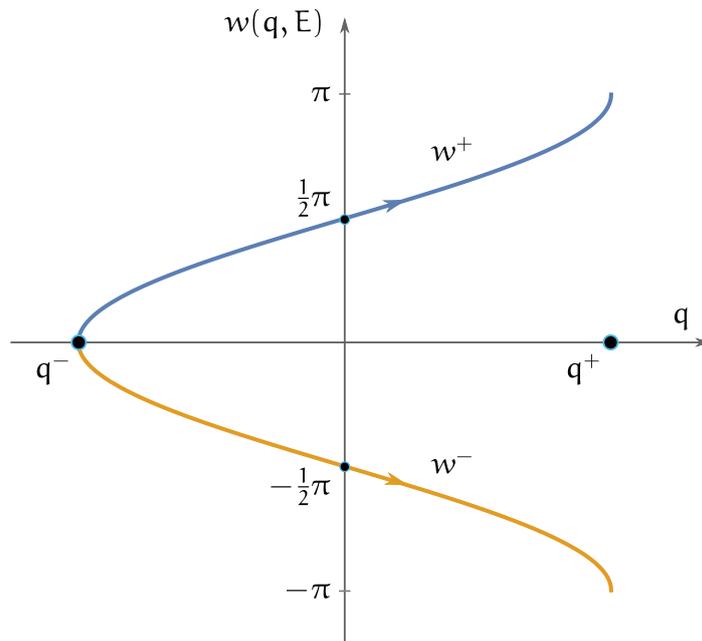
$$\frac{\partial W^\pm}{\partial E}(q, E) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q^-}^q dq \frac{1}{\sqrt{E - \frac{m\omega^2 q^2}{2}}} = \pm \frac{1}{\omega} \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q\right) + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (89)$$

A la función W la terminamos calculado de puro gusto, nomás.

Finalmente, dado que $J'(E) = 1/\omega$, la ec. (88) se lee como

$$w^\pm(q, E) = \pm \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q\right) + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (90)$$

La figura siguiente muestra la variable ángulo como función de q para un valor fijo de E .



Este gráfico puede ser visto como las dos ramas separadas de una función o como una curva continua que conecta los puntos $(q^-, -\pi)$ y (q^+, π) .

Sobre la órbita pudimos marcar sin esfuerzo cuatro puntos en donde la variable ángulo toma valores conocidos. En el punto de retorno q^+ , toma el valor $-\pi$ si nos aproximamos desde la región con $p < 0$, y toma el valor π si nos acercamos desde la región con $p > 0$. Debido a que hemos definido todas las integrales con el límite inferior de integración en el punto de retorno q^- , el valor del ángulo en ese punto es cero. Además, como el potencial es una función par de q podemos anticipar que cuando $q = 0$ el ángulo asumirá los valores $\pm\pi/2$, a medio camino entre 0 y $\pm\pi$.

Analicemos un ciclo completo de movimiento, suponiendo que en $t = 0$ la partícula está en el punto de retorno q^+ con $w(0) = -\pi$. Sabemos entonces que

$$w(t) = \omega t - \pi. \quad (91)$$

La evolución en el tiempo de la coordenada q se obtiene despejando q en términos de w a partir de la ec. (90). Verifiquen que al hacer eso la duplicidad en los signos se cancela, y queda

$$q(w) = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos w. \quad (92)$$

Usando la ec. (91),

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos \omega t. \quad (93)$$

No es difícil leer este resultado en la figura de la página anterior. Hay que rotar la figura 90° y ubicar el origen del tiempo en $w = -\pi$.

4. Definición alternativa (y más sensata) de la variable ángulo

Mostraremos una definición alternativa para calcular la función W y la variable ángulo para la familia de sistemas de la sección anterior. Es la definición usada en la clase práctica. Se trata de modificar los límites de las integrales para darles continuidad. Yo prefiero esta definición. Es menos directa pero más representativa de lo que está haciendo el sistema. En lugar de expresar W y el ángulo como funciones cuyas ramas departen a partir de q^- , se las expresa como funciones continuas del punto sobre la órbita.

Hemos visto que la función $p(q, E)$ es una función bivaluada de q . Cada rama de la función p requiere su propia transformación canónica. Para la clase de hamiltonianos de la sección anterior, pudimos definir esas dos transformaciones a partir de una misma función multiplicada por ± 1 . Al tramo de la órbita en donde

$$p(q, E) = \wp(q, E) \geq 0 \quad (94)$$

correspondió la función generatriz

$$W^+(q, E) = \int_{q^-}^q dq \varphi(q, E), \quad (95)$$

y, recíprocamente, al tramo de la órbita con

$$p(q, E) = -\varphi(q, E) \leq 0, \quad (96)$$

correspondió la función generatriz

$$W^-(q, E) = - \int_{q^-}^q dq \varphi(q, E) = -W^+(q, E). \quad (97)$$

En realidad no hay ninguna razón para que W^+ y W^- deban estar ligadas de esta forma.

Las funciones W^+ y W^- son soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dW^\pm(q)}{dq} = \pm \varphi(q, E). \quad (98)$$

Cada una de estas ecuaciones puede integrarse por separado, es decir, podemos elegir de manera independiente los límites inferiores de las siguientes integrales

$$W^+(q, E) = \int_{q_0}^q dq \varphi(q, E), \quad (99)$$

$$W^-(q, E) = - \int_{q'_0}^q dq \varphi(q, E). \quad (100)$$

En la sección anterior elegimos el mismo límite q^- en los dos casos. Eso hizo posible escribir en una sola fórmula

$$W^\pm(q, E) = \pm \int_{q^-}^q dq \varphi(q, E). \quad (101)$$

Con la definición (101) la variable ángulo varía entre $-\pi$ y π . La impresión subjetiva contenida en la fórmula (101) es que las dos ramas de la función W divergen a partir del punto q^- , como dos caminos que se separan.

La definición que ahora proponemos para W consiste en integrar la ec. (98) a lo largo de la órbita. La función W^+ se define como antes,

$$W^+(q, E) = \int_{q^-}^q dq \varphi(q, E), \quad (102)$$

pero ahora

$$W^-(q, E) = \int_{q^-}^{q^+} dq \varphi(q, E) - \int_{q^+}^q dq \varphi(q, E) = W^+(q^+, E) - \int_{q^+}^q dq \varphi(q, E). \quad (103)$$

Debería resultar claro por qué decimos que estamos integrando a lo largo de la órbita. Partimos del punto de retorno q^- e integramos sobre el tramo superior de la órbita, donde es $p \geq 0$. Esa integral nos da W^+ como en la ec. (102). Cuando alcanzamos el punto de retorno q^+ continuamos la integral como si se tratara de una integral de línea. A lo que ya hemos integrado, ahora sumamos la integral sobre el tramo inferior de la órbita. De ahí resulta la ec. (103). En el punto q^+ , las dos ramas de la función W toman el mismo valor. Puesto que la variable de integración es siempre menor que q^+ y debido a que aparece un signo menos frente a la integral, la función W^- es una función *creciente* de q , que varía entre $W^+(q^+, E)$ para $q = q^+$ y $2W^+(q^+, E)$ para $q = q^-$. Necesitamos subrayar la palabra *creciente* porque no lo es en el sentido usual, sino en el sentido de que a medida que avanzamos en la órbita W^- crece. Con la terminología usual sería una función *decreciente* de q . Quedará claro con el ejemplo de la próxima sección.

La relación entre la función definida por la ec. (103) y la función W^- de la sección anterior es en realidad muy simple. En el fondo, lo único que hemos hecho ha sido sumarle una constante. Escribiendo

$$\int_{q^+}^q = \int_{q^+}^{q^-} + \int_{q^-}^q, \quad (104)$$

la ec. (103) se lee como

$$W^-(q, E) = W^+(q^+, E) - \int_{q^+}^{q^-} dq \varphi(q, E) - \int_{q^-}^q dq \varphi(q, E) = 2W^+(q^+, E) - \int_{q^-}^q dq \varphi(q, E). \quad (105)$$

Esto significa que, según la nueva definición, W^- es igual a la función W^- de la sección anterior más $2W^+(q^+, E)$.

En resumen, si indicamos con un subíndice 1 a las funciones de la sección anterior, existe la siguiente identificación con las funciones asociadas a la definición actual:

$$W^+(q, E) = W_1^+(q, E), \quad (106)$$

$$W^-(q, E) = W_1^-(q, E) + 2W_1^+(q^+, E). \quad (107)$$

Esta manera de pensar a la función W , como si se tratara de una función continua del punto de la órbita, está estrechamente relacionada con la definición de la variable acción,

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p dq. \quad (108)$$

Aquí p debe considerarse una función continua del punto sobre la órbita, como si siguiéramos la órbita con un lápiz. Del mismo modo puede pensarse a la función W . Damos un punto de partida, el punto $p = 0$ y $q = q^-$ y definimos W mediante la integral de línea

$$W(q, E) = \int_{c(q^-, q)} p dq, \quad (109)$$

donde $\mathcal{C}(q^-, q)$ es el tramo de la órbita que va desde el punto q^- hasta el punto q siguiendo la órbita en el sentido horario. No necesitamos definir explícitamente la función W como si tuviera dos ramas. La función W va a ser bivaluada, pero se podrá pensar como una función continua del punto sobre la órbita. Cuando q se aproxime de regreso al punto de partida tendremos

$$W \rightarrow \oint p dq = 2\pi J(E). \quad (110)$$

En la práctica, usar esta convención o la de la sección anterior implica el mismo esfuerzo. Las integrales que *no* hay que calcular son las mismas. La ec. (109) es muy elegante, pero llegado el caso de evaluar W y sus derivadas, estaremos trabajando con las ecs. (102) y (103). En especial, la variable ángulo,

$$w(q, E) = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial W}{\partial E}(q, E), \quad (111)$$

será

$$w^+(q, E) = \pi \frac{\int_{q^-}^q dq \frac{\partial \varphi}{\partial E}(q, E)}{\int_{q^-}^{q^+} dq \frac{\partial \varphi}{\partial E}(q, E)}, \quad w^-(q, E) = \pi - \pi \frac{\int_{q^+}^q dq \frac{\partial \varphi}{\partial E}(q, E)}{\int_{q^-}^{q^+} dq \frac{\partial \varphi}{\partial E}(q, E)}. \quad (112)$$

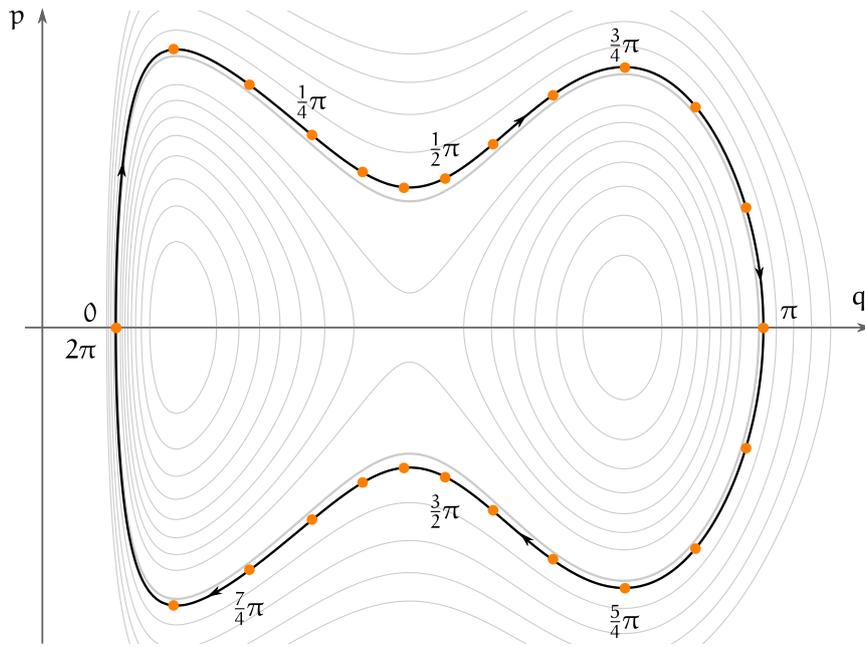
Análogamente a las relaciones (106) y (107), ahora tendremos

$$w^+(q, E) = w_1^+(q, E), \quad (113)$$

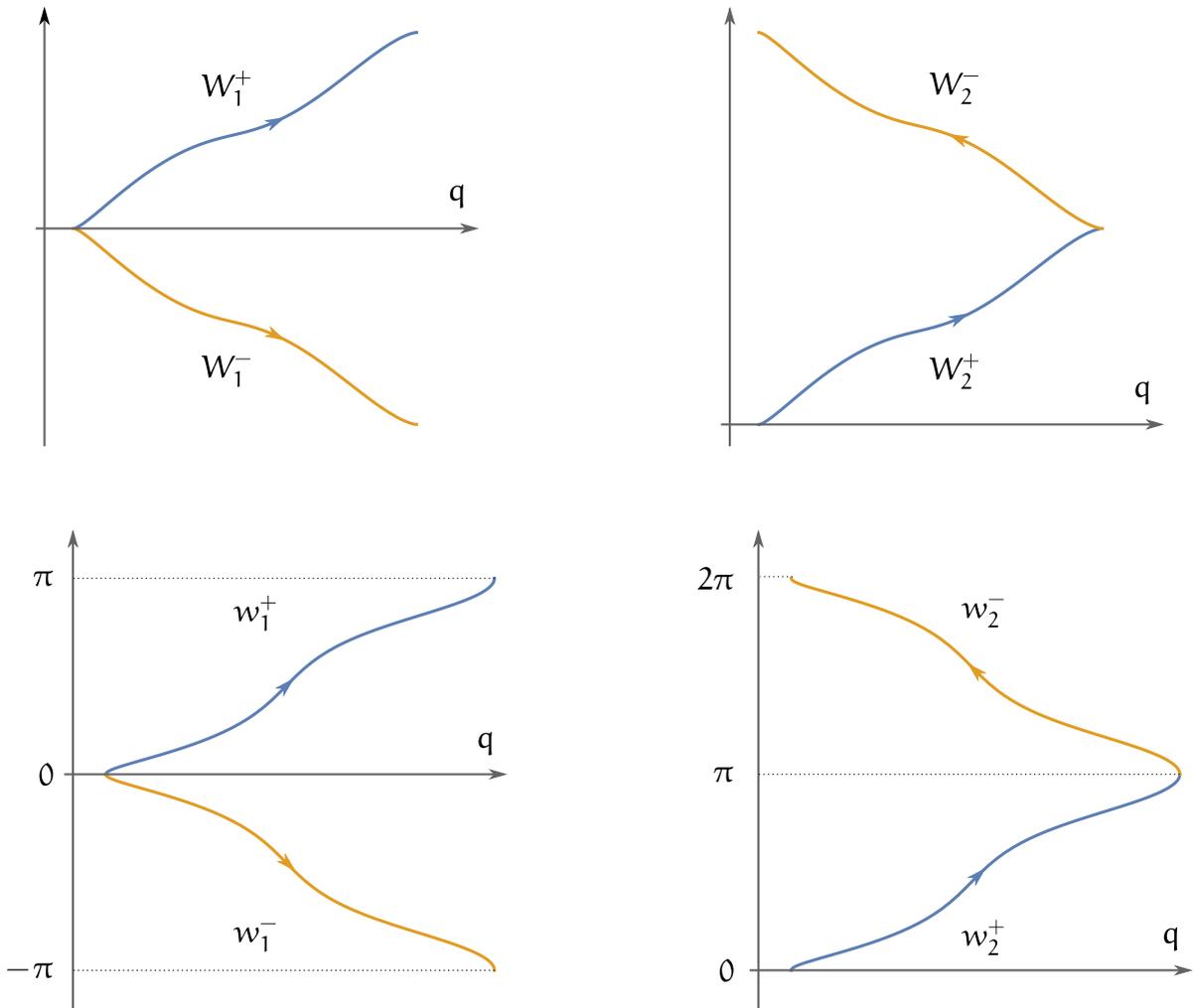
$$w^-(q, E) = w_1^-(q, E) + 2\pi. \quad (114)$$

Con esta convención, si recorremos la órbita a partir del punto de retorno q^- , la variable ángulo parte de $w = 0$, aumenta hasta π al llegar al punto de retorno q^+ y, mientras la partícula recorre la parte inferior de la órbita, w sigue aumentando hasta alcanzar el valor 2π en el punto q^- , pero arribando ahora desde el otro lado. El intervalo de variación de la variable ángulo es entonces $[0, 2\pi]$. La definición (109) no necesita estar confinada a un solo ciclo de la órbita. Podemos extenderla tanto hacia adelante como hacia atrás. El resultado es una función multivaluada de las coordenadas canónicas. Con esa extensión la variable ángulo estará entre menos y más infinito.

Como se ha notado anteriormente, debido a que \dot{w} es constante, la partícula tarda el mismo tiempo en recorrer cualquier tramo de la órbita que comprenda el mismo intervalo Δw de la variable ángulo. La siguiente figura muestra la órbita de la pág. 12. Sobre la órbita se han marcado puntos separados por el mismo intervalo $\Delta w = \frac{1}{12}\pi$. El tiempo que tarda la partícula en unir cualquier par de puntos consecutivos es el mismo.



Las siguientes figuras comparan las curvas de W y w según las dos definiciones, la de mínimo esfuerzo de la sección anterior (con subíndice 1) y la definición sensata de la presente sección (con subíndice 2). El cálculo está hecho para la órbita de la figura anterior.



4.1. Ejemplo: el oscilador armónico con la definición sensata

Casi todas las cuentas que necesitamos figuran en la sección 3.2. Usando las relaciones (106) y (107) y las funciones de la ec. (83), tendremos

$$W^+(q, E) = \frac{E}{\omega} \left[\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}} + \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q \right) + \frac{\pi}{2} \right], \quad (115)$$

$$W^-(q, E) = 2\pi \frac{E}{\omega} - W^+(q, E). \quad (116)$$

A modo de verificación calculemos $W^-(q^-, E)$, que debería ser igual a 2π veces la acción:

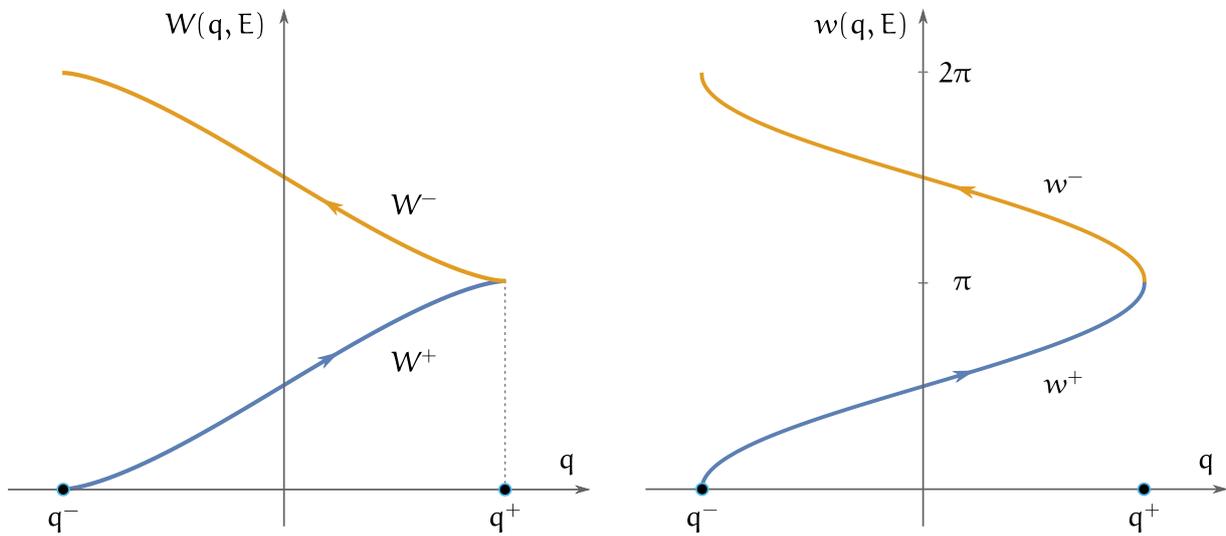
$$W^-(q^-, E) = 2\pi \frac{E}{\omega} - W^+(q^-, E) = 2\pi \frac{E}{\omega}. \quad (117)$$

Por otro lado, las relaciones (113) y (114) aplicadas a las funciones de la ec. (90) dan

$$w^+(q, E) = \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q \right) + \frac{\pi}{2} \right], \quad (118)$$

$$w^-(q, E) = 2\pi - w^+(q, E). \quad (119)$$

A continuación se muestran los gráficos de las funciones W y w según la definición sensata. Deben compararse con las figuras de la sección 3.2.



Queda como ejercicio verificar que si inicialmente la partícula está en q^+ , entonces $q(t)$ sigue estando dada por la ec. (93).