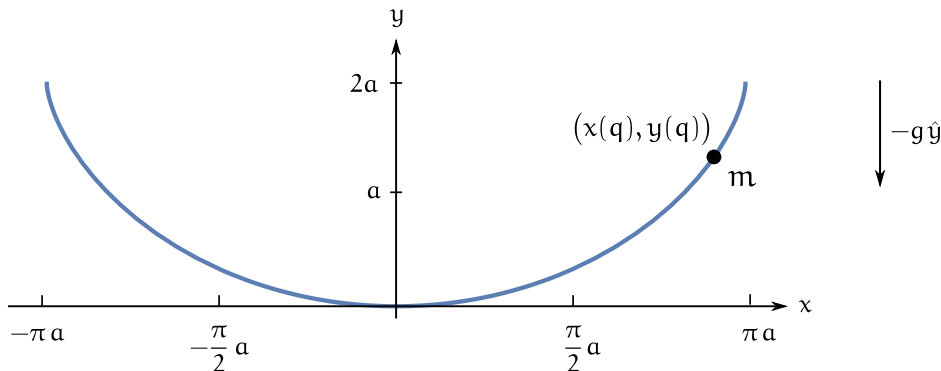


Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2020
Simulacro de 2do. parcial con las soluciones

■ **Problema 1.** Una partícula de masa m está restringida a moverse en el plano vertical a lo largo de la curva definida paramétricamente por las ecuaciones:

$$x(q) = (q + \sin q)a, \quad y(q) = (1 - \cos q)a,$$

con $-\pi \leq q \leq \pi$, y a una constante positiva. Hay gravedad. La energía inicial de la partícula es menor que $2mga$.



- a) Usando q como coordenada, escriba el lagrangiano $L(q, \dot{q})$ y el hamiltoniano $H(q, p)$. Aplique lo antes posible las identidades trigonométricas $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$, $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$.
- b) Encuentre una expresión integral para la función característica de Hamilton $W(q, E)$.
- c) Encuentre las variables de ángulo-acción $J(E)$ y $w(q, E)$.
- d) Calcule la frecuencia $\omega(E)$ como función de la energía. La respuesta lo sorprenderá.

■ **Solución.** La posición de la partícula, su velocidad, energía cinética y energía potencial:

$$\mathbf{r}(q) = (q + \sin q)a \hat{x} + (1 - \cos q)a \hat{y},$$

$$\dot{\mathbf{r}}(q, \dot{q}) = [(1 + \cos q)a \hat{x} + a \sin q \hat{y}] \dot{q},$$

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m a^2 (1 + \cos^2 q + 2 \cos q + \sin^2 q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} (4 m a^2 \cos^2 \frac{q}{2}) \dot{q}^2,$$

$$V(q) = m g a (1 - \cos q) = 2 m g a \sin^2 \frac{q}{2}. \quad (1)$$

Su lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = T - V = \frac{1}{2} (4 m a^2 \cos^2 \frac{q}{2}) \dot{q}^2 - 2 m g a \sin^2 \frac{q}{2}. \quad (2)$$

A todos los efectos prácticos podemos multiplicar el lagrangiano por una constante que haga las cuentas más sencillas. Si lo dividimos por ma^2 y definimos

$$\omega_0^2 = \frac{g}{m}, \quad (3)$$

a todos los fines prácticos podemos escribir

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (4 \cos^2 \frac{q}{2}) \dot{q}^2 - 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{q}{2}. \quad (4)$$

Su hamiltoniano es

$$H(q, p) = T + V = \frac{p^2}{8 \cos^2 \frac{q}{2}} + 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{q}{2}. \quad (5)$$

El movimiento ocurre entre los puntos de retorno $\pm q_E$, donde q_E es la raíz positiva de la ecuación

$$E = 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{q_E}{2}. \quad (6)$$

Notar que ahora E se mide en unidades de ω_0^2 .

■ La función característica es

$$W^\pm(q, E) = \pm \int_{-q_E}^q dq \, 2 \cos \frac{q}{2} \left[2 (E - 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{q}{2}) \right]^{1/2}. \quad (7)$$

■ La variable acción es

$$J(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-q_E}^{q_E} dq \, 2 \cos \frac{q}{2} \left[2 (E - 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{q}{2}) \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Con la sustitución

$$\sqrt{\frac{2}{E}} \omega_0 \sin \frac{q}{2} = v, \quad (9)$$

queda

$$J(E) = \frac{4}{\pi} \frac{E}{\omega_0} \int_{-1}^1 dv \sqrt{1 - v^2}. \quad (10)$$

Reconocemos aquí el área de medio disco de radio 1, o bien escribimos

$$\int_{-1}^1 dv \sqrt{1 - v^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

En definitiva

$$J(E) = \frac{2E}{\omega_0}. \quad (12)$$

Esto quiere decir que la frecuencia de las oscilaciones es

$$\omega(E) = \frac{1}{J'(E)} = \frac{\omega_0}{2}, \quad (13)$$

independientemente de la energía; esto es, de la amplitud.

■ Nota al pie: una verificación sencilla es calcular la frecuencia en la aproximación de pequeñas oscilaciones. El resultado no debería diferir del de la ec. (13). Para $|q| \ll 1$, el hamiltoniano (5) toma la forma aproximada

$$H \simeq \frac{p^2}{8} + 2\omega_0^2 \frac{q^2}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{4} + \omega_0^2 q^2 \right), \quad (14)$$

que es el hamiltoniano de un oscilador lineal, cuya frecuencia viene dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4}} = \frac{\omega_0}{2}, \quad (15)$$

que coincide con (13). Lo interesante es que la frecuencia de las pequeñas oscilaciones es en verdad válida para todo el rango de amplitudes. La curva sobre la cual se mueve la partícula es una cicloide. Debido a esta independencia de la frecuencia con la amplitud se dice que es una curva tautócrona.

■ Para calcular la variable ángulo usamos la relación

$$w^\pm(q, E) = \pm\pi \frac{Q^+(q, E)}{Q^+(q_E, E)}, \quad (16)$$

donde

$$Q^\pm(q, E) = \frac{\partial W^\pm(q, E)}{\partial E} = \pm\sqrt{2} \int_{-q_E}^q dq \frac{\cos \frac{q}{2}}{\sqrt{E - 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{q}{2}}}. \quad (17)$$

Con la sustitución $s = \sin \frac{q}{2}$, resulta

$$\begin{aligned} Q^\pm(q, E) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sin \frac{q_E}{2}}^{\sin \frac{q}{2}} \frac{ds}{\sqrt{E - 2\omega_0^2 s^2}} = \pm \frac{1}{2\omega_0} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{2\omega_0^2}{E}} \sin \frac{q}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \pm \frac{1}{2\omega_0} \arccos \left(-\sqrt{\frac{2\omega_0^2}{E}} \sin \frac{q}{2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Así,

$$Q^+(q_E, E) = \frac{\pi}{2\omega_0}. \quad (19)$$

Finalmente,

$$\omega^\pm(q, E) = \pm \arccos \left(-\sqrt{\frac{2\omega_0^2}{E}} \sin \frac{q}{2} \right). \quad (20)$$

■ *Post scriptum*: El hecho de que la frecuencia sea independiente de la amplitud sugiere una relación no tan lejana entre este sistema y un oscilador lineal. A poco que uno mire el lagrangiano

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (4 \cos^2 \frac{q}{2}) \dot{q}^2 - 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{q}{2}, \quad (21)$$

se hace visible lo siguiente:

$$\dot{q} \cos \frac{q}{2} = 2 \frac{d}{dt} \left(\sin \frac{q}{2} \right). \quad (22)$$

Si en lugar de q se eligiese $s = \sin \frac{q}{2}$ como coordenada generalizada, el lagrangiano sería

$$L(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} [(16) \dot{s}^2 - 4\omega_0^2 s^2], \quad (23)$$

que es el lagrangiano de un oscilador lineal. Encontramos que la frecuencia está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{4\omega_0^2}{16}} = \frac{\omega_0}{2}. \quad (24)$$

La sustitución $s = \sin \frac{q}{2}$ también permite integrar inmediatamente el movimiento. Tendremos

$$s(t) = A \cos \left[\frac{\omega_0}{2} (t - t_0) \right]. \quad (25)$$

Es decir,

$$q(t) = 2 \arcsin \left\{ A \cos \left[\frac{\omega_0}{2} (t - t_0) \right] \right\}. \quad (26)$$

Eligiendo t_0 como el instante en el que la partícula alcanza el punto de retorno

$$-q_E = -2 \arcsin \sqrt{\frac{E}{2\omega_0^2}}, \quad (27)$$

queda

$$q(t) = -2 \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{E}{2\omega_0^2}} \cos \left[\frac{\omega_0}{2} (t - t_0) \right] \right\}. \quad (28)$$

Podemos comparar este resultado con el que se obtiene a partir del método de H-J. Por un lado tenemos la relación entre la variable ángulo y la coordenada q , ec. (20). Por otro

lado tenemos la dinámica de la variable ángulo a través del hamiltoniano

$$K(w, J) = E(J) = \frac{\omega_0 J}{2} \Rightarrow \dot{w} = \frac{\omega_0}{2}. \quad (29)$$

donde hemos usado el resultado (12). Para la rama del movimiento con $p \geq 0$ resulta

$$w^+(t) = \frac{\omega_0}{2}(t - t_0), \quad (30)$$

donde hemos elegido la constante de integración de modo que en t_0 sea $w^+ = 0$. Esto corresponde al punto de retorno de la izquierda. Luego, combinando este resultado con la ec. (20), para esa rama del movimiento vale lo siguiente

$$\frac{\omega_0}{2}(t - t_0) = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2\omega_0^2}{E}} \sin \frac{q}{2}\right). \quad (31)$$

De aquí despejamos $q(t)$,

$$q(t) = -2 \arcsin\left\{\sqrt{\frac{E}{2\omega_0^2}} \cos\left[\frac{\omega_0}{2}(t - t_0)\right]\right\}, \quad (32)$$

que coincide con la ec. (28). Como esta forma es par respecto de t_0 , vale también para la rama del movimiento con $p \leq 0$.

■ **Problema 2.** Dado el primer par de transformaciones para un sistema de dos grados de libertad,

$$Q_1 = q_1^2, \quad Q_2 = q_1 + q_2. \quad (33)$$

- Suponiendo una función generatriz de tipo F_2 independiente del tiempo. ¿Qué par de ecuaciones diferenciales debe satisfacer para ser compatible con las relaciones (33)?
- Integre las ecuaciones y encuentre la familia de funciones generatrices $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2)$ más general compatible con las ecuaciones (33).
- Para esa familia de funciones, dar las ecuaciones de transformación de los impulsos,

$$P_i = P_i(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

- Dado un sistema cuyo hamiltoniano es

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2,$$

elija una de las F_2 dentro de la familia de funciones posibles, de modo que Q_1 y Q_2 sean cíclicas respecto del nuevo hamiltoniano K . Escriba K explícitamente.

■ **Solución.** Las dos ecuaciones conocidas son

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_1} = q_1^2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_2} = q_1 + q_2. \quad (34)$$

Integrando la primera, resulta

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1^2 P_1 + f(q_1, q_2, P_2). \quad (35)$$

Derivando esta ecuación respecto de P_2 e igualando con la segunda ec. (34) queda

$$\frac{\partial f}{\partial P_2}(q_1, q_2, P_2) = q_1 + q_2. \quad (36)$$

Integrando,

$$f(q_1, q_2, P_2) = (q_1 + q_2)P_2 + g(q_1, q_2). \quad (37)$$

Nada más podemos decir. La función g es arbitraria. En definitiva, la familia de funciones posibles está dada por

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1^2 P_1 + (q_1 + q_2)P_2 + g(q_1, q_2). \quad (38)$$

El otro par de ecuaciones de transformación es

$$p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = 2q_1 P_1 + P_2 + \frac{\partial g}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = P_2 + \frac{\partial g}{\partial q_2}, \quad (39)$$

que pueden reescribirse con todas las variables nuevas de un lado y las antiguas al otro. Empezando por la segunda, despejamos P_2 en términos de p_2 y de $\partial g/\partial q_2$. Luego usamos eso en la primera ecuación y despejamos P_1 ,

$$P_1 = \frac{1}{2q_1} \left(p_1 - p_2 - \frac{\partial g}{\partial q_1} + \frac{\partial g}{\partial q_2} \right),$$

$$P_2 = p_2 - \frac{\partial g}{\partial q_2}. \quad (40)$$

■ La aplicación de estas transformaciones al hamiltoniano propuesto lleva a una expresión provisoria, que mezcla ambos grupos de variables. Unas deben entenderse como funciones de las otras:

$$K = \left[P_1 + \frac{1}{2q_1} \left(\frac{\partial g}{\partial q_1} - \frac{\partial g}{\partial q_2} \right) \right]^2 + P_2 + \frac{\partial g}{\partial q_2} + (q_1 + q_2)^2. \quad (41)$$

Las variables Q_1 y Q_2 sólo pueden aparecer en esta expresión a través de las variables q_1 y q_2 , ya que en las transformaciones (33) los impulsos no participan. Entonces, para que las variables Q_1 y Q_2 resulten cíclicas hay que cancelar todos los términos en donde aparecen

q_1 y q_2 . La forma más evidente de lograr eso es eligiendo g de forma tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial q_1} - \frac{\partial g}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial q_2} &= -(q_1 + q_2)^2.\end{aligned}\quad (42)$$

Si no funciona, se probará otra cosa, pero por lo pronto ensayamos lo más simple. Integrando la última de las ecs. (42), obtenemos

$$g(q_1, q_2) = -\frac{1}{3}(q_1 + q_2)^3 + h(q_1). \quad (43)$$

Para esta función resulta, por otro lado,

$$\frac{\partial g}{\partial q_1} - \frac{\partial g}{\partial q_2} = \frac{dh(q_1)}{dq_1}, \quad (44)$$

que, según la primera ec. (42), implica que h debe ser constante. Podemos elegir entonces $h = 0$. Finalmente, la F_2 buscada es

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1^2 P_1 + (q_1 + q_2) P_2 - \frac{1}{3}(q_1 + q_2)^3, \quad (45)$$

y el nuevo hamiltoniano, escrito en sus variables correctas, es

$$K(P_1, P_2) = P_1^2 + P_2. \quad (46)$$

■ Posdata: aunque con otras vestiduras, la F_2 que encontramos hace el mismo trabajo y satisface la misma ecuación diferencial que la función característica W para la ecuación de Hamilton-Jacobi. La solución del problema en las nuevas variables es trivial. Los impulsos P_1 y P_2 son constantes, y las coordenadas Q_1 y Q_2 evolucionan de acuerdo al par de ecuaciones canónicas

$$\dot{Q}_1 = 2P_1, \quad \dot{Q}_2 = 1. \quad (47)$$

Es decir,

$$Q_1(t) = 2P_1 t + Q_{10}, \quad Q_2(t) = t + Q_{20}. \quad (48)$$

A partir de las transformaciones (33) y (39), resulta

$$\begin{cases} q_1(t) = \pm(2P_1 t + Q_{10})^{1/2}, \\ q_2(t) = t + Q_{20} - q_1(t), \end{cases} \quad \begin{cases} p_1(t) = 2P_1 q_1(t) + P_2 - (Q_{20} + t)^2, \\ p_2(t) = P_2 - (Q_{20} + t)^2. \end{cases} \quad (49)$$

■ Epílogo: siempre que tengan una ecuación de la forma

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (50)$$

significa que $g(x, y) = g(x + y)$. Saber esto resultaba útil para integrar las ecuaciones (42). La demostración es sencilla: cualquier función de x e y puede escribirse como una función del par de variables $u = x + y$ y $v = x - y$,

$$g(x, y) = F(x + y, x - y), \quad (51)$$

donde $F(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Por otro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right) = 2\frac{\partial}{\partial v}. \quad (52)$$

Luego, la ec. (50) se lee como

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial v} = 0, \quad (53)$$

lo que quiere decir que $F(u, v) = F(u)$, y, por lo tanto $g(x, y) = F(x + y)$. Recíprocamente, si cambian el signo en la ec. (50), entonces debe ser $g(x, y) = F(x - y)$.

■ **Problema 3.** Un disco plano de masa m y radio a es arrojado hacia arriba ($I_3 = \frac{1}{2}ma^2$).

- Mostrar que la dinámica se desacopla en una parte de traslación y otra de rotación.
- Definir un problema 1D para el ángulo de Euler θ .
- Suponer que las condiciones iniciales son

$$\varphi(0) = \psi(0) = \theta(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0,$$

con $|\dot{\theta}_0| \ll \omega_0$. Encontrar $\theta(t)$, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ hasta orden $\delta\theta \equiv \dot{\theta}_0/\omega_0$. *Ayuda:* asumir que $|\theta| \ll 1$ y justificar luego de hechas las cuentas.

- Hasta el mismo orden de aproximación encontrar $\hat{e}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Demostrar que \hat{e}_3 realiza un movimiento que tiene el doble de la frecuencia que el movimiento que realizan \hat{e}_1 y \hat{e}_2 .

■ **Solución.** La configuración del disco queda definida por la posición de su centro de masa y la orientación de sus ejes. Cada parte de esta descripción es independiente de la otra. El lagrangiano se escribirá como una suma de dos lagrangianos desacoplados,

$$\mathcal{L}_{\text{total}}(\mathbf{r}_{\text{cm}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}, \varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \mathcal{L}_{\text{tras}}(\mathbf{r}_{\text{cm}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}) + \mathcal{L}(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}). \quad (54)$$

Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas de traslación están desacopladas de aquellas para las coordenadas de rotación. A todos los efectos prácticos, si lo único que nos interesa es la parte rotacional, podemos trabajar con el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta). \quad (55)$$

Este lagrangiano coincide con la energía cinética de rotación y, como no depende explícitamente del tiempo, se conserva,

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}. \quad (56)$$

Se conservan además los impulsos p_ψ y p_φ ,

$$p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta), \quad (57)$$

$$p_\varphi = p_\psi \cos \theta + I\dot{\varphi} \sin^2 \theta. \quad (58)$$

Reemplazando en la ecuación de conservación de la energía resulta

$$\mathcal{E} = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta}. \quad (59)$$

El primer término se puede omitir. Esta ecuación define un problema efectivo para el ángulo θ . Según las condiciones iniciales es

$$p_\psi = p_\varphi = I_3 \omega_0. \quad (60)$$

Luego, usando que $I_3 = 2I$,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + 2\omega_0^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \text{constante}. \quad (61)$$

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(\theta) = 2\omega_0^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}. \quad (62)$$

Inicialmente $\theta = 0$ y su derivada es pequeña respecto de ω_0 . En la vecindad de $\theta = 0$ el potencial efectivo está dado por

$$V_{\text{ef}}(\theta) \simeq \frac{1}{2}\omega_0^2 \theta^2. \quad (63)$$

De modo que si la derivada $\dot{\theta}(0)$ es lo suficientemente pequeña podemos considerar que θ realiza un movimiento de pequeñas oscilaciones alrededor de $\theta = 0$, gobernado por la ecuación

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 \theta^2 = \text{constante}. \quad (64)$$

La solución de esta ecuación para las condiciones iniciales dadas es

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \equiv \delta\theta \sin \omega_0 t. \quad (65)$$

A partir de la ec. (58) vemos que

$$\dot{\varphi} = 2\omega_0 \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \omega_0 + \mathcal{O}(\delta\theta^2) \simeq \omega_0 \quad (66)$$

Por otro lado, la ec. (57) implica

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \dot{\varphi} \cos \theta = \mathcal{O}(\delta\theta^2) \simeq 0. \quad (67)$$

En resumen, hasta orden $\delta\theta$

$$\psi(t) = 0, \quad \varphi(t) = \omega_0 t, \quad \theta(t) = \delta\theta \sin \omega_0 t. \quad (68)$$

Los versores de los ejes principales fijos al cuerpo son

$$\hat{e}_1 = \cos \psi \hat{\rho}(\varphi) + \sin \psi [\cos \theta \hat{\varphi}(\varphi) + \sin \theta \hat{z}], \quad (69)$$

$$\hat{e}_2 = -\sin \psi \hat{\rho}(\varphi) + \cos \psi [\cos \theta \hat{\varphi}(\varphi) + \sin \theta \hat{z}], \quad (70)$$

$$\hat{e}_3 = -\sin \theta \hat{\varphi}(\varphi) + \cos \theta \hat{z}. \quad (71)$$

Reemplazando aquí las expresiones (68), y conservando términos de hasta orden $\delta\theta$,

$$\hat{e}_1(t) = \hat{\rho}(\omega_0 t), \quad (72)$$

$$\hat{e}_2(t) = \hat{\varphi}(\omega_0 t) + \delta\theta \sin(\omega_0 t) \hat{z}, \quad (73)$$

$$\hat{e}_3(t) = -\delta\theta \sin(\omega_0 t) \hat{\varphi}(\omega_0 t) + \hat{z}. \quad (74)$$

Evidentemente el movimiento de los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 tiene frecuencia ω_0 . En cambio, si escribimos \hat{e}_3 por extenso encontramos

$$\begin{aligned} \hat{e}_3(t) &= \hat{z} + \delta\theta \left[\sin^2(\omega_0 t) \hat{x} - \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \hat{y} \right] \\ &= \hat{z} + \frac{\delta\theta}{2} \left[\hat{x} - \cos(2\omega_0 t) \hat{x} - \sin(2\omega_0 t) \hat{y} \right] \\ &= \hat{z} + \frac{\delta\theta}{2} \left[\hat{x} - \hat{\rho}(2\omega_0 t) \right]. \end{aligned} \quad (75)$$

Se ve entonces que \hat{e}_3 tiene un movimiento de frecuencia $2\omega_0$.

■ **Problema 4.** Una partícula de masa m se mueve en un potencial que, en coordenadas esféricas, se escribe como

$$U(r, \theta, \varphi) = V(r) + \frac{g(\theta)}{r^2}. \quad (76)$$

- Escribir el hamiltoniano en coordenadas esféricas.
- Mostrar que la ecuación de H-J es separable en coordenadas esféricas.
- Encontrar una expresión integral para la función característica de Hamilton W . (Por simplicidad, al tomar raíces cuadradas, omitir el símbolo \pm).
- A partir de la función W escribir las expresiones que, de llevar a cabo las integrales, dan la solución de las ecuaciones de movimiento.

■ **Solución.** El hamiltoniano de una partícula en un potencial de la forma (76) es

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r) + \frac{g(\theta)}{r^2}. \quad (77)$$

Para hacer la separación igualamos H a una constante E y tratamos de agrupar cada par de coordenadas conjugadas en un término separado. La coordenada más fácil de separar es r ,

$$r^2 \left[\frac{p_r^2}{2m} + V(r) - E \right] + \left[\frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2 \theta} + g(\theta) \right] = 0. \quad (78)$$

Entonces debe ser

$$r^2 \left[\frac{p_r^2}{2m} + V(r) - E \right] = - \left[\frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2 \theta} + g(\theta) \right] = -\alpha. \quad (79)$$

Por un lado tenemos

$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{\alpha}{r^2} + V(r) = E. \quad (80)$$

A su vez,

$$\left[\frac{p_\theta^2}{2m} + g(\theta) - \alpha \right] \sin^2 \theta + \frac{p_\varphi^2}{2m} = 0. \quad (81)$$

Esta ecuación implica (como pudimos haber previsto) que p_φ es constante y además

$$\frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2 \theta} + g(\theta) = \alpha. \quad (82)$$

La función característica de Hamilton se escribirá como

$$W(r, \theta, \varphi, E, \alpha, p_\varphi) = W_r(r, E, \alpha) + W_\theta(\theta, \alpha, p_\varphi) + \varphi p_\varphi. \quad (83)$$

Aquí hemos anticipado la forma de W_φ e incluido las dependencias en las constantes de separación. Las ecuaciones que satisfacen las funciones W_r y W_θ se obtienen reemplazando $p_i \rightarrow W'_i$ en las ecuaciones de conservación para las respectivas variables:

$$\frac{W_r'^2}{2m} + \frac{\alpha}{r^2} + V(r) = E, \quad (84)$$

$$\frac{W_\theta'^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2 \theta} + g(\theta) = \alpha. \quad (85)$$

La integración formal da

$$W_r(r, E, \alpha) = \int^r dr \sqrt{2m \left[E - \frac{\alpha}{r^2} - V(r) \right]}, \quad (86)$$

$$W_\theta(\theta, \alpha, p_\varphi) = \int^\theta d\vartheta \sqrt{2m \left[\alpha - \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2 \vartheta} - g(\vartheta) \right]}. \quad (87)$$

El hamiltoniano en las nuevas coordenadas es

$$K(Q_1, Q_2, Q_3, E, \alpha, p_\varphi) = E. \quad (88)$$

La coordenada Q_1 es la única que depende del tiempo, el resto son constantes,

$$Q_1 = t - t_0. \quad (89)$$

Esta ecuación, obtenida a través de la dinámica, en conjunción con la ecuación de transformación $\partial W / \partial E = Q_1$, implica una relación entre r y el tiempo (notar que E sólo aparece en la función W_r)

$$Q_1 = t - t_0 = \frac{\partial W_r}{\partial E} = \int^r dr \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - \frac{\alpha}{r^2} - V(r)}}. \quad (90)$$

Del mismo modo, la ecuación de transformación para $Q_2 = \partial W / \partial \alpha$, que es la coordenada conjugada del nuevo impulso α , establece una relación entre r y θ (notar que tanto W_r como W_θ dependen de α)

$$Q_2 = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial W_\theta}{\partial \alpha} = - \int^r dr \frac{\sqrt{m/2}}{r^2 \sqrt{E - \frac{\alpha}{r^2} - V(r)}} + \int^\theta d\vartheta \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2 \vartheta} - g(\vartheta)}}. \quad (91)$$

Finalmente, la ecuación de transformación $Q_3 = \partial W / \partial p_\varphi$ vincula a θ con φ ,

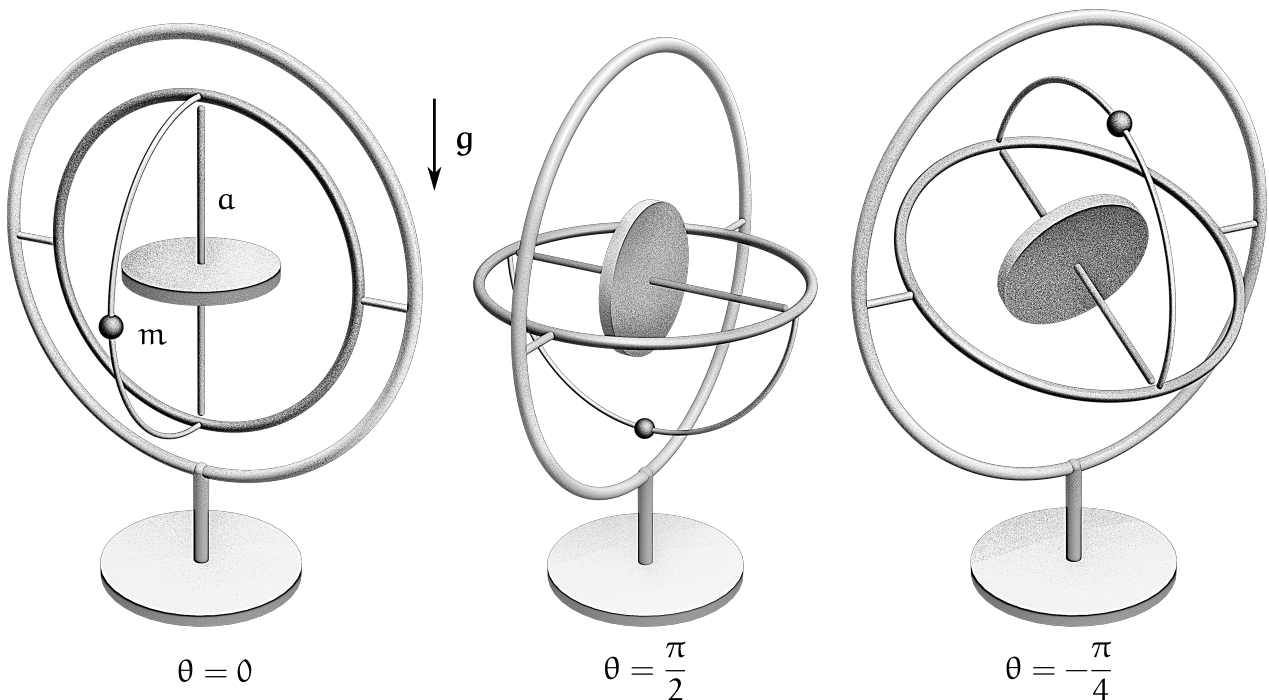
$$Q_3 = \varphi + \frac{\partial W_\theta}{\partial p_\varphi} = \varphi - \int^\theta d\vartheta \frac{p_\varphi / \sin^2 \vartheta}{\sqrt{2m \left[\alpha - \frac{p_\varphi^2}{2m \sin^2 \vartheta} - g(\vartheta) \right]}}. \quad (92)$$

■ **Problema 5.** Una partícula de masa m está fija al marco interno de un giróscopo mediante un semicírculo de radio a , como muestran las figuras. El marco externo rota alrededor del eje vertical. El marco interno rota alrededor del eje horizontal que pasa por los puntos que lo unen al marco externo. La peonza central puede rotar sobre su propio eje. El giróscopo tiene momentos de inercia respecto de su CM $I_1 = I_2 \equiv I$ e I_3 (los marcos tienen masa despreciable). **Vale la siguiente relación: $ma^2 = I$.** Hay gravedad.

- a) Escribir el lagrangiano. Encontrar al menos 3 constantes de movimiento.
 b) Formular un problema unidimensional para el ángulo de Euler θ . Considerar de ahora en más que las condiciones iniciales son tales que

$$\dot{\phi}(0) = 0, \quad p_\phi(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = \omega_3.$$

- c) Mostrar que $\theta = \pi/2$ es siempre un punto de equilibrio estable para el problema 1D.
 d) Mostrar que existe ω_0 tal que para $|\omega_3| > \omega_0$ hay otro punto de equilibrio estable θ_1 . ¿Cuál es este punto de equilibrio y cuánto vale ω_0 ?
 e) Resolver el movimiento del sistema cuando θ realiza pequeñas oscilaciones alrededor de θ_1 , con $\theta(0) = \theta_1 + \delta\theta_0$, donde $|\delta\theta_0| \ll 1$, y $\phi(0) = \psi(0) = 0$. (Es decir, dar expresiones para los tres ángulos de Euler como funciones del tiempo).
 f) En la misma aproximación, calcular $\hat{e}_3(t)$ y graficar la curva que describe su extremo.



Notación: $\omega_g = \sqrt{g/a}$, $\alpha = (I_3\omega_3/I\omega_g)^2$.

■ **Solución.** A la energía del giróscopo hay que sumarle la energía de la masa m . La masa está fija sobre el eje 2 que resulta de las dos primeras rotaciones. El versor asociado es $\hat{\psi}(\theta, \varphi)$. La posición de la partícula es

$$\mathbf{r}_m = -a \hat{\psi}(\theta, \varphi) = -a [\sin \theta \hat{z} + \cos \theta \hat{\varphi}(\varphi)], \quad (93)$$

y su velocidad,

$$\dot{\mathbf{r}}_m = -a \left\{ \dot{\theta} [\cos \theta \hat{z} - \sin \theta \hat{\varphi}(\varphi)] - \dot{\varphi} \cos \theta \hat{\rho}(\varphi) \right\}. \quad (94)$$

Todos los versores son normales entre sí, de modo que calcular el módulo al cuadrado es tarea fácil,

$$|\dot{\mathbf{r}}_m|^2 = a^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta). \quad (95)$$

Por hipótesis $ma^2 = I$, de manera que la energía cinética de la masa m es

$$T_m = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta). \quad (96)$$

Por otro lado, su energía potencial es

$$V(\theta) = -mga \sin \theta. \quad (97)$$

El lagrangiano es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &= \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + mga \sin \theta \\ &= \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \frac{I}{2} (2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + mga \sin \theta. \end{aligned} \quad (98)$$

Las coordenadas ψ y φ con cíclicas y el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. Por lo tanto se conservan los impulsos conjugados p_ψ , p_φ y la función h , que en este caso es igual a la energía:

$$p_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta), \quad (99)$$

$$p_\varphi = p_\psi \cos \theta + I\dot{\varphi}, \quad (100)$$

$$E = \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \frac{I}{2} (2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) - mga \sin \theta. \quad (101)$$

Las dos primeras ecuaciones pueden usarse para reescribir la energía, cuya ecuación de conservación resulta así

$$E = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + I\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I} - mga \sin \theta. \quad (102)$$

Esto es equivalente a una ecuación de conservación para un problema unidimensional en la coordenada θ . Según las condiciones iniciales, es

$$p_\psi = I_3 \left[\dot{\psi}(0) + \dot{\phi}(0) \cos \theta(0) \right] = I_3 \omega_3, \quad p_\phi = 0. \quad (103)$$

Luego,

$$I\dot{\theta}^2 + \frac{(I_3\omega_3)^2}{2I} \cos^2 \theta - mga \sin \theta = \text{constante}. \quad (104)$$

Dividiendo por I y usando que $ma^2 = I$, queda

$$\dot{\theta}^2 + \frac{(I_3\omega_3)^2}{2I^2} \cos^2 \theta - \frac{g}{a} \sin \theta = \text{constante}. \quad (105)$$

En el último término del primer miembro reconocemos la frecuencia propia de las pequeñas oscilaciones de un péndulo de longitud a ,

$$\omega_g = \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (106)$$

Es conveniente adimensionalizar la ecuación (105) tomando como unidad de tiempo el recíproco de ω_g ,

$$t = \omega_g^{-1} \tau. \quad (107)$$

Con esto resulta

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{I_3\omega_3}{I\omega_g} \right)^2 \cos^2 \theta - \sin \theta = \text{constante}. \quad (108)$$

Para ver esto con ojos de ecuación de conservación de la energía, debemos asignar una masa $m = 2$ y un potencial efectivo

$$V(\theta) = \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta - \sin \theta, \quad (109)$$

con

$$\alpha = \left(\frac{I_3\omega_3}{I\omega_g} \right)^2. \quad (110)$$

Notar que la importancia del término proporcional al $\cos^2 \theta$, que está asociado a la rotación del giróscopo, es mayor cuanto mayor es $|\omega_3|$. Si fuera $\alpha \gg 1$ el potencial sería aproximadamente igual a $\frac{1}{2}\alpha \cos^2 \theta$, y tendría dos puntos de equilibrio estable, en $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$. El punto de equilibrio estable con $\theta = -\pi/2$ sólo es posible debido al efecto estabilizador del momento angular. Si $\omega_3 = 0$ el giróscopo tiende a alinearse horizontalmente, con la masa m lo más abajo posible.

Para analizar los puntos críticos del potencial necesitamos escribir sus dos primeras derivadas:

$$V'(\theta) = -(\alpha \sin \theta + 1) \cos \theta, \quad (111)$$

$$V''(\theta) = -\alpha \cos 2\theta + \sin \theta. \quad (112)$$

En general, los puntos críticos del potencial satisfacen la ecuación

$$V'(\theta) = 0. \quad (113)$$

Los puntos $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ son siempre puntos críticos. Allí la derivada segunda del potencial es

$$V''(\pm \frac{1}{2}\pi) = \alpha \pm 1. \quad (114)$$

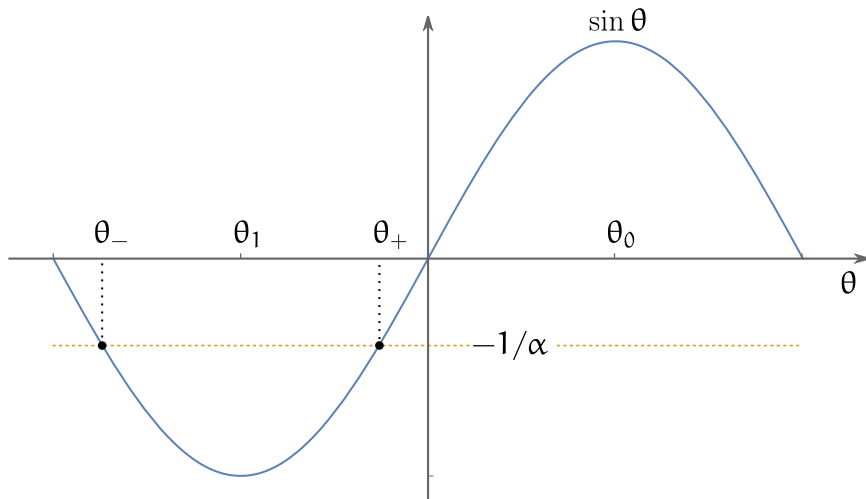
Vemos entonces que $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ es siempre un punto de equilibrio estable. En cambio, $\theta_1 = -\frac{1}{2}\pi$ es estable únicamente si $\alpha > 1$, es decir, si

$$|\omega_3| > \frac{I\omega_g}{I_3}. \quad (115)$$

Si $\alpha > 1$, la ec. (113) también se satisface si

$$\sin \theta = -\frac{1}{\alpha}. \quad (116)$$

Esto da dos puntos críticos adicionales, θ_{\pm} , como es fácil de ver en la figura.



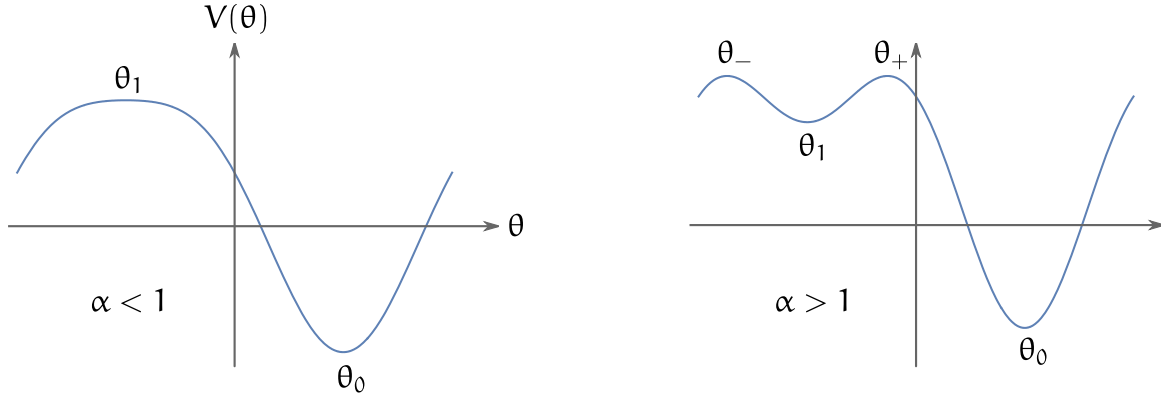
El punto crítico θ_1 queda en el medio de los dos. Esto indica que los nuevos puntos críticos no pueden ser otra cosa que puntos de equilibrio inestable. En efecto, notando que

$$\cos 2\theta_{\pm} = \frac{1 - \sin^2 \theta_{\pm}}{2} = \frac{1 - 1/\alpha^2}{2} \quad (117)$$

obtenemos

$$V''(\theta_{\pm}) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha^2 + 1), \quad (118)$$

que es siempre menor que cero. Las figuras muestran los dos casos posibles, dependiendo del valor de α .



Para pequeñas oscilaciones alrededor del punto $\theta_1 = -\frac{1}{2}\pi$, escribimos

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \delta\theta, \quad (119)$$

con $|\delta\theta| \ll 1$, de modo que es

$$\cos \theta = \delta\theta + \mathcal{O}(\delta\theta^3), \quad \sin \theta = -1 + \frac{\delta\theta^2}{2} + \mathcal{O}(\delta\theta^4). \quad (120)$$

Reemplazando estas aproximaciones en la ec. (108), la ecuación de conservación para el problema de pequeñas oscilaciones se lee como

$$\left(\frac{d\delta\theta}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}(\alpha - 1)\delta\theta^2 = \text{constante}. \quad (121)$$

Verificamos así que la condición de equilibrio estable es $\alpha > 1$. Para la condición inicial $\delta\theta(0) = \delta\theta_0$, recordando que $\tau = \omega_g t$, la solución es

$$\delta\theta(t) = \delta\theta_0 \cos \Omega t, \quad (122)$$

donde

$$\Omega = \frac{\omega_g}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha - 1} = \frac{\omega_g}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{I_3 \omega_3}{I \omega_g}\right)^2 - 1}. \quad (123)$$

La ecuación que determina la evolución de φ es la ec. (100) con $p_\varphi = 0$,

$$\dot{\varphi} = -\frac{I_3 \omega_3}{I} \cos \theta \simeq -\frac{I_3 \omega_3}{I} \delta\theta_0 \cos \Omega t. \quad (124)$$

La condición inicial $\varphi = 0$ implica que $\varphi = \delta\varphi$, con

$$\delta\varphi(t) = -\frac{I_3\omega_3}{I\Omega}\delta\theta_0 \sin \Omega t = -\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\alpha-1}}\delta\theta_0 \sin \Omega t. \quad (125)$$

Para el ángulo ψ la ec. (99) con $p_\psi = I_3\omega_3$ implica

$$\dot{\psi} = \omega_3 - \dot{\varphi} \cos \theta = \omega_3 + \frac{I_3\omega_3}{I} \cos^2 \theta \simeq \omega_3. \quad (126)$$

Las correcciones son de orden $\delta\theta_0^2$. Luego, ψ evoluciona linealmente. Para tiempos $t \ll 1/(\omega_3|\delta\theta_0|^2)$ será válido escribir

$$\psi(t) = \omega_3 t. \quad (127)$$

Por último, el versor $\hat{e}_3(\theta, \varphi)$ es

$$\hat{e}_3 = -\sin \theta \hat{\varphi}(\varphi) + \cos \theta \hat{z}. \quad (128)$$

Reemplazando $\theta = -\frac{1}{2}\pi + \delta\theta$ y $\varphi = \delta\varphi$ se obtiene, hasta primer orden en δ

$$\hat{e}_3 = \hat{y} + -\delta\varphi \hat{x} + \delta\theta \hat{z}. \quad (129)$$

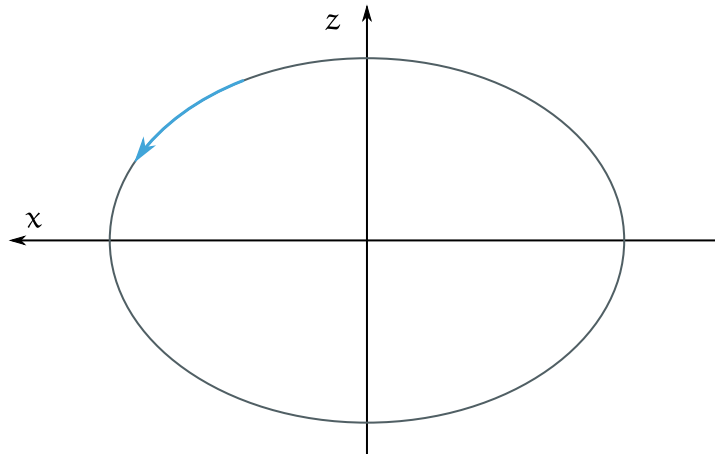
Su dependencia temporal es

$$\hat{e}_3(t) = \hat{y} + \left(\sqrt{2} \sin \Omega t \hat{x} + \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}} \cos \Omega t \hat{z} \right) \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha-1}} \delta\theta_0. \quad (130)$$

Esta curva es una elipse con su eje mayor según la dirección x . Es una curva plana sólo en la aproximación de pequeñas oscilaciones. Notar que para $\alpha > 1$ es

$$\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}} < 1. \quad (131)$$

Visto de frente, \hat{e}_3 gira en sentido antihorario.



Si $\omega_3 \gg \omega_g$, resulta

$$\hat{e}_3(t) \simeq \left(\sqrt{2} \sin \Omega t \hat{x} + \cos \Omega t \hat{z} \right) \delta\theta_0, \quad (132)$$

y las oscilaciones horizontales tienen una amplitud que es $\sqrt{2}$ veces la amplitud de las oscilaciones verticales. Es el caso que tiene menor excentricidad.

Un aspecto que puede resultar desconcertante de la ec. (125) es que para α muy próximo a 1 las excursiones del ángulo φ pueden ser arbitrariamente grandes. En realidad esto no es así. Veremos que si las oscilaciones en θ son pequeñas entonces las oscilaciones en φ son también pequeñas. Hay que demostrar que el producto

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha-1}} |\delta\theta_0| \quad (133)$$

nunca puede hacerse de orden 1. Para que las oscilaciones en θ sean pequeñas, el apartamiento $|\delta\theta_0|$ tiene que ser mucho menor que el ancho del pozo de potencial asociado a $\theta_1 = -\pi/2$. Ese pozo está limitado por los ángulos θ_{\pm} . Recordemos que $\sin \theta_{\pm} = -1/\alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} |\delta\theta_0| &\ll \theta_+ + \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow |\delta\theta_0| &\simeq |\sin \delta\theta_0| \ll \cos \theta_+ = \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \quad (134)$$

Para $\alpha > 1$, $\sqrt{\alpha+1}/\sqrt{\alpha}$ es de orden 1. Luego, la condición que debemos pedir para que sea válido hablar de pequeñas oscilaciones en θ es

$$|\delta\theta_0| \ll \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}}, \quad (135)$$

que implica lo que queríamos demostrar, a saber,

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha-1}} |\delta\theta_0| \ll 1, \quad (136)$$

y por lo tanto $|\delta\varphi| \ll 1$.