

Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2020
Clase práctica del 16/7: Hamilton-Jacobi. Variables de ángulo–acción*

1.	Función característica de Hamilton	1
1.1.	Ningún misterio	4
2.	El potencial $V(q) = a \sec^2(q/l)$	5
2.1.	Interpretación de las nuevas coordenadas Q y E	9
3.	Variables ángulo–acción para sistemas de un solo grado de libertad	10
3.1.	Las unidades de las variables de ángulo–acción	14
3.2.	Variables de ángulo–acción para $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$	14
3.3.	Ningún misterio	18
4.	El potencial $V(q) = a \sec^2(q/l)$	20
4.1.	Cálculo de la acción integrando en el plano complejo	22
5.	Otros potenciales que pueden resolverse	24
6.	Diversidad	24

Antes de definir las variables de ángulo–acción vamos a estudiar la transformación generada por la función característica de Hamilton W . La teoría de las variables de ángulo–acción cabe en dos renglones, pero la práctica requiere un proceso de familiarización.

1. Función característica de Hamilton

Para sistemas conservativos de un solo grado de libertad, la ecuación de H–J para la función principal de Hamilton S es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \tag{1}$$

Respecto a su dependencia en q y en t , S satisface la misma ecuación diferencial que una función generatriz de tipo F_2 que lleva del hamiltoniano original al hamiltoniano nulo,

$$K = \frac{\partial F_2}{\partial t} + H = 0. \tag{2}$$

Para sistemas conservativos, hemos visto que S puede buscarse de la forma

$$S(q, t) = -Et + W(q). \tag{3}$$

La función W recibe el nombre de **función característica de Hamilton** o **acción abreviada**. Las ecs. (1) y (3) implican que la ecuación diferencial que satisface W es

$$H(q, W'(q)) = E. \tag{4}$$

*zanellaj@df.uba.ar

La solución dependerá explícitamente de E ,

$$W = W(q, E). \quad (5)$$

De manera que sería más propio escribir la ec. (3) como

$$S(q, E, t) = -Et + W(q, E). \quad (6)$$

No hicimos esto desde un comienzo para enfatizar que W satisface una ecuación diferencial ordinaria, la ec. (4). La constante E termina apareciendo en W y en S de manera paramétrica. Una vez incorporada a la definición de W y de S , el parámetro E tiene todo el derecho de ser ascendido al rol de variable y es por eso que escribimos la ec. (6).

No alcanza con que la función S satisfaga la ecuación diferencial de una función generatriz que lleva al hamiltoniano nulo. Además S tiene que tener el número suficiente de variables para permitir definir una $F_2(q, P, t)$. Dos de esas variables, q y t , figuran desde el comienzo. La tercera variable necesaria es E , que se incorpora a la solución primero como un parámetro y luego adquiere el estatus de variable. Entonces podemos definir

$$F_2(q, P, t) = S(q, P, t). \quad (7)$$

Esta función generatriz lleva del hamiltoniano original al hamiltoniano nulo,

$$K(Q, P) = \frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t) + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, P, t)\right) = 0. \quad (8)$$

Usamos aquí momentáneamente el símbolo P para remarcar que P es el nuevo impulso, pero en lo que sigue continuaremos usando el símbolo E , con el mismo significado.

Para que quede claro: no menos fundamental que el hecho de que S satisfaga la ecuación de H-J es que la solución dependa del número suficiente de constantes (no aditivas), que, consideraras como variables de la función S , puedan alojar a los nuevos impulsos.

Si la función generatriz es

$$S(q, E, t) = -Et + W(q, E), \quad (9)$$

entonces la nueva coordenada es

$$Q(q, E, t) = \frac{\partial S}{\partial E}(q, E, t) = -t + \frac{\partial W}{\partial E}(q, E). \quad (10)$$

Esta es una ecuación de transformación, con la particularidad de que depende de t . El tiempo no aparece aquí asociado a la dinámica sino a la transformación. La dinámica entra a través de las ecuaciones canónicas.

Puesto que el nuevo hamiltoniano es nulo, Q es constante, digamos $Q = Q_0$. Luego, la ec. (10) permite despejar q como función de t :

$$q = q(t, E, Q_0). \quad (11)$$

Esta es la solución de la ecuación de movimiento para la coordenada original. De acuerdo al número de condiciones iniciales que es necesario fijar, tiene el número suficiente de parámetros libres.

Hay que observar que la propia función $W(q, E)$ depende del número suficiente de variables como para ser considerada ella misma función generatriz de tipo F_2 . Puesto que W no depende del tiempo, la transformación que genera deja invariante el hamiltoniano, $K = H$. Si asignamos el lugar de E en la función $W(q, E)$ al nuevo impulso P , definiendo

$$F_2(q, E) = W(q, E), \quad (12)$$

vemos que en las nuevas variables el hamiltoniano es justamente E ,

$$K(Q, E) = H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q, E)\right) = E. \quad (13)$$

La transformación definida por W lleva, de este modo, a un hamiltoniano que no es cero, como sucedía con la función principal de Hamilton S , pero que, sin embargo, tiene una dinámica muy simple. Como es obvio por el hecho de que el sistema sea conservativo, la ecuación de movimiento para E es

$$\dot{E} = -\frac{\partial K(Q, E)}{\partial Q} = 0. \quad (14)$$

La ecuación de movimiento para Q , que con la función S era $\dot{Q} = 0$, es ahora

$$\dot{Q} = \frac{\partial K(Q, E)}{\partial E} = 1, \quad (15)$$

es decir,

$$Q(t) = t + Q_0. \quad (16)$$

La constante Q_0 es la otra constante necesaria para fijar las condiciones iniciales.

Las ecuaciones de transformación son ahora independientes del tiempo:

$$p(q, E) = \frac{\partial W}{\partial q}(q, E), \quad Q(q, E) = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E). \quad (17)$$

La primera ecuación da las órbitas en el espacio de fase. La segunda ecuación, a través de la ec. (16), contiene la dinámica,

$$t + Q_0 = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E), \quad (18)$$

lo que permite despejar q como función del tiempo,

$$q = q(t, E, Q_0). \quad (19)$$

Notar la correspondencia con las ecs. (10) y (11). Lo más cómodo es trabajar con W .

Si el hamiltoniano es de la forma

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (20)$$

la ecuación diferencial que satisface W es

$$\frac{W'(q)^2}{2m} + V(q) = E. \quad (21)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones,

$$W(q, E) = \pm \sqrt{2m} \int_{q_0(E)}^q dq \sqrt{E - V(q)}. \quad (22)$$

La rama '+' de la solución corresponde a la sección de la órbita con $p \geq 0$, y viceversa. Notar que hemos incorporado en la definición de W la dependencia con E . También hemos dado la libertad de que el límite inferior de la integral sea una función de E , $q_0(E)$. Haber agregado una nueva dependencia en E a través del límite de integración no afecta en lo más mínimo el hecho de que tanto S como W sean soluciones de la ecuación de H-J.

La elección del punto $q_0(E)$ dependerá del problema. Puede ser incluso el mismo punto para todas las órbitas: por ejemplo, todas las órbitas de un péndulo simple pasan por $\theta = 0$.

Raramente uno está interesado en calcular W . Lo que importa son sus derivadas. Por ejemplo, la segunda ec. (17) se lee como

$$Q(q, E) = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0(E)}^q \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}} \mp \sqrt{2m} \sqrt{E - V(q_0(E))} \frac{dq_0(E)}{dE}. \quad (23)$$

Por lo tanto, si $q_0(E)$ es un punto de retorno, el último término se anula y queda

$$Q(q, E) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0(E)}^q \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (24)$$

Como ocurre a menudo, la integral anterior, estrictamente hablando, es una integral impropia, pues el integrando diverge en el límite inferior de integración. Como es también habitual, la integral, sin embargo, está bien definida, a menos que $V(q)$ justo tenga un punto estacionario en $q_0(E)$.

1.1. Ningún misterio

Para problemas unidimensionales cuya energía cinética es de la forma $m\dot{q}^2/2$, el formalismo de H-J no representa en realidad un avance sustancial. Es sólo una manera sofisticada de obtener resultados que están al alcance de cualquier alumno de Física 1.

La ecuación de conservación de la energía es

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) = E \Rightarrow dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (25)$$

Supongamos que existe un punto de retorno q_E y que en $t = t_0$ la partícula alcance ese punto. Entonces

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_E}^q \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}, \quad (26)$$

que no es otra cosa que la ec. (24),

$$Q = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0(E)}^q \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}, \quad (27)$$

que obtuvimos a través del método de H-J, habida cuenta de que $Q(t) = t + Q_0$.

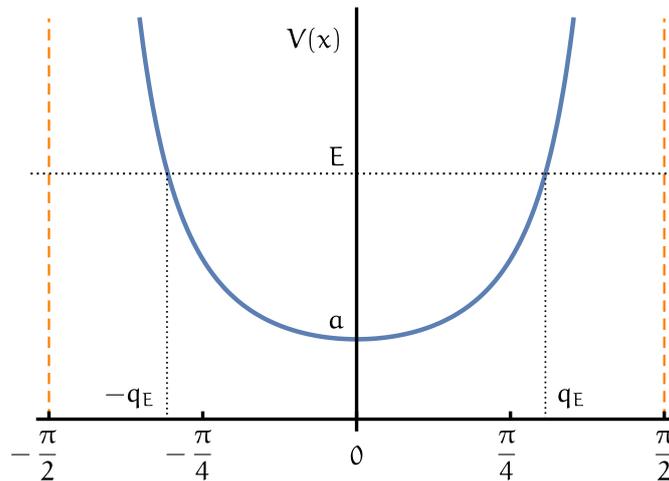
El método de H-J aplicado a problemas en una dimensión con hamiltonianos de la forma $H = p^2/2m + V(q)$ no aporta ninguna ventaja sobre métodos más elementales. Que estos ejemplos nos sirvan como práctica. La verdadera utilidad sólo puede apreciarse en sistemas con mayor número de grados de libertad o con hamiltonianos más generales.

2. El potencial $V(q) = \alpha \sec^2(q/l)$

Se trata de un hamiltoniano de la forma $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$. El potencial

$$V(q) = \alpha \sec^2(q/l) \quad (28)$$

tiene el aspecto que muestra la figura, donde se ha tomado $l = 1$.

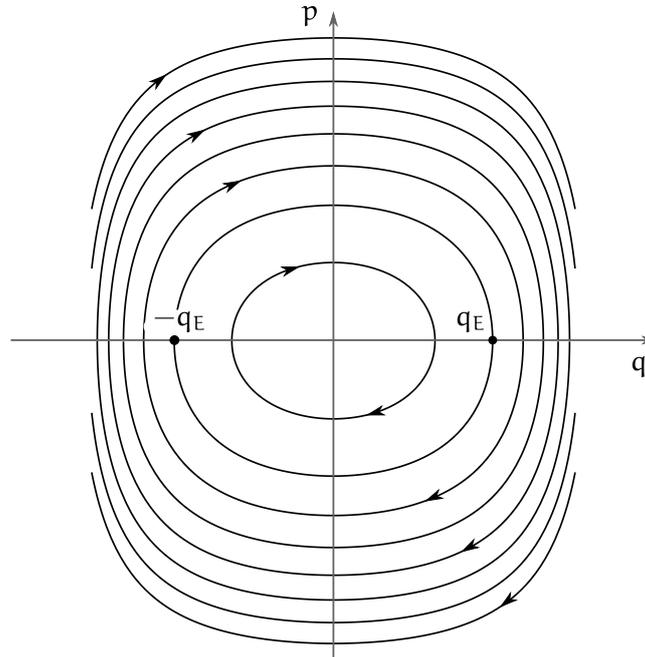


Para una energía E , el movimiento tendrá lugar entre $-q_E$ y q_E . En esos puntos

$$E - V(\pm q_E) = 0 \Rightarrow q_E = l \arccos \sqrt{\frac{\alpha}{E}}. \quad (29)$$

Verán que en ningún momento necesitaremos usar esta última expresión. Es un hecho que se observa con la práctica: no suele ser necesario escribir explícitamente los puntos de retorno en las etapas iniciales del cálculo y, con frecuencia, nunca.

El retrato de fase tiene la apariencia característica de un movimiento de oscilación (también referido como de libración). El sentido de circulación está determinado por el hecho de que $\dot{q} = p/m$: la velocidad y el impulso tienen el mismo signo.



La función característica de Hamilton, ec. (22), será

$$W(q, E) = \pm \sqrt{2m} \int_{q_0(E)}^q dq \sqrt{E - a \sec^2(q/l)}. \quad (30)$$

Una nota práctica: yo sé cuánto les fascina resolver integrales, pero no se apuren a hacer la integral que aparece en la ec. (30). Las ecuaciones de transformación no tratan directamente con W , sino con sus derivadas. Con frecuencia es más sencillo derivar primero e integrar después. Por eso el enunciado de la guía pide encontrar una expresión integral.

Como el movimiento tiene lugar en un pozo de potencial, habrá dos puntos de retorno. Resulta conveniente elegir $q_0(E)$ en la ec. (30) como uno de esos puntos. Elegiremos como límite de la integral el punto de retorno $-q_E < 0$ que muestran las figuras anteriores.

$$W(q, E) = \pm \sqrt{2m} \int_{-q_E}^q dq \sqrt{E - a \sec^2(q/l)}. \quad (31)$$

Ahora debemos encontrar $q(t)$ a través de la transformación definida por W y de la dinámica de las nuevas coordenadas. Debido a que hemos identificado a la función generatriz F_2 con la función W , la ecuación de transformación para la nueva coordenada es

$$Q(q, E) = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-q_E}^q dq \frac{1}{\sqrt{E - a \sec^2(q/l)}}. \quad (32)$$

La ventaja de haber elegido $q_0(E) = -q_E$ es que la derivada respecto de E puede pasar a través del símbolo integral como si q_E no dependiera de E .

Reordenando un poco los términos, en definitiva tenemos que resolver la integral

$$I = \int_{-q_E}^q dq \frac{\cos(q/l)}{\sqrt{E \cos^2(q/l) - \alpha}}. \quad (33)$$

El cambio de variables

$$u = \sin(q/l) \quad (34)$$

transforma la integral en esta otra, fácilmente resoluble,

$$I = \int_{-u_E}^{u(q)} du \frac{l}{\sqrt{E - \alpha - Eu^2}} = \frac{l}{\sqrt{E}} \left\{ \arcsin \left[\sqrt{\frac{E}{E - \alpha}} u(q) \right] + \arcsin \left[\sqrt{\frac{E}{E - \alpha}} u_E \right] \right\}, \quad (35)$$

donde

$$u_E = \sin(q_E/l). \quad (36)$$

La ecuación que define $u_E > 0$ sigue siendo la anulación de lo que figura dentro de la raíz en el primer miembro de la ec. (35),

$$\sqrt{\frac{E}{E - \alpha}} u_E = 1. \quad (37)$$

Esto permite evaluar el último término en la ec. (35) de manera inmediata,

$$\arcsin \left[\sqrt{\frac{E}{E - \alpha}} u_E \right] = \frac{\pi}{2}. \quad (38)$$

En definitiva, puesto que $\arcsin x + \pi/2 = \arccos(-x)$, resulta

$$I = \int_{-q_E}^q dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}} = \frac{l}{\sqrt{E}} \arccos \left[-\sqrt{\frac{E}{E - \alpha}} \sin(q/l) \right], \quad (39)$$

y

$$Q(q, E) = \pm \sqrt{\frac{ml^2}{2E}} \arccos \left[-\sqrt{\frac{E}{E - \alpha}} \sin(q/l) \right]. \quad (40)$$

Invirtiéndolo, queda

$$q(Q, E) = -l \arcsin \left[\sqrt{\frac{E - \alpha}{E}} \cos \left(\pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2}} Q \right) \right]. \quad (41)$$

Vemos así que la duplicidad en los signos es cancelada por la paridad de la función $\cos q$,

$$q(Q, E) = -l \arcsin \left[\sqrt{\frac{E - \alpha}{E}} \cos \left(\sqrt{\frac{2E}{ml^2}} Q \right) \right]. \quad (42)$$

Lo que hemos escrito hasta ahora han sido las ecuaciones de transformación. La ecuación que da q como función de t surge a través de la dinámica de Q . Esa información está contenida de manera independiente en las ecuaciones canónicas del nuevo hamiltoniano,

$$K(Q, E) = E. \quad (43)$$

De esta expresión se deduce que $\dot{Q} = \partial K / \partial E = 1$ y

$$Q(t) = t + Q_0. \quad (44)$$

Luego, reemplazando en la ec. (42),

$$q(t, E, Q_0) = -l \arcsin \left[\sqrt{\frac{E - \alpha}{E}} \cos \left(\sqrt{\frac{2E}{ml^2}} (t + Q_0) \right) \right]. \quad (45)$$

Esta es una función periódica. La frecuencia angular de las oscilaciones es

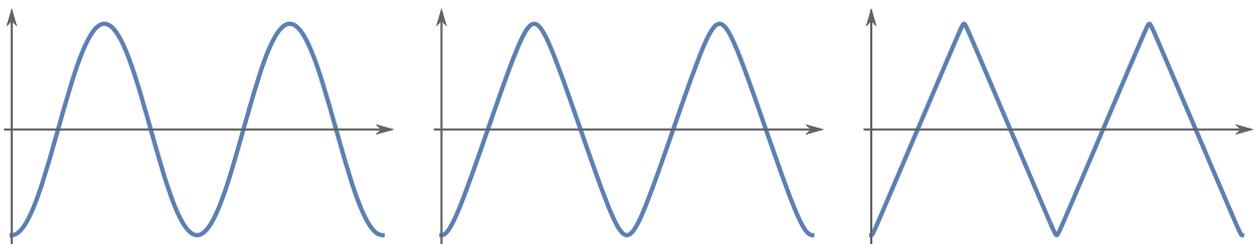
$$\omega(E) = \sqrt{\frac{2E}{ml^2}}. \quad (46)$$

A mayor amplitud, menor el período. Las constantes E y Q_0 sirven para fijar las condiciones iniciales. La interpretación de la constante Q_0 está relacionada con la elección del extremo de integración $q_0(E) = -q_E$ que usamos al calcular W . Para $t = -Q_0$ resulta

$$q(-Q_0, E, Q_0) = -l \arcsin \sqrt{\frac{E - \alpha}{E}} = -l \arccos \sqrt{\frac{\alpha}{E}} = -q_E. \quad (47)$$

Esto quiere decir que $t = -Q_0$ es el tiempo en el que la partícula pasa por el punto $-q_E$.

La figura siguiente muestra la forma de la trayectoria $q(t)$ para valores crecientes de la energía. Para bajas energías, la oscilación es aproximadamente sinusoidal. A mayores energías, el pozo de potencial se parece cada vez más a una caja de paredes rígidas y el movimiento tiende a adoptar la forma de rectas quebradas. Las escalas están normalizadas.



Verificación a modo de ejercicio

A modo de verificación, resuelvan de manera independiente el problema de pequeñas oscilaciones alrededor del mínimo del potencial y luego comparen con la aproximación que se obtiene a partir de la ec. (45) para energías próximas al mínimo del potencial. Otro límite que ofrece una verificación es cuando $E \gg \alpha$.

2.1. Interpretación de las nuevas coordenadas Q y E

Del mismo modo en que al pasar de coordenadas cartesianas a polares graficamos en el plano xy las líneas coordenadas de las nuevas variables (que son círculos y rectas), quisiéramos graficar en el plano qp las curvas coordenadas de las variables QE. Las curvas coordenadas son aquellas en donde cada variable toma un valor constante. Así, las curvas coordenadas de la variable ρ de las coordenadas polares son círculos, y las de φ son rectas.

Las curvas coordenadas de la variable E son las órbitas en el plano qp . Son las curvas de nivel de la función

$$E(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (48)$$

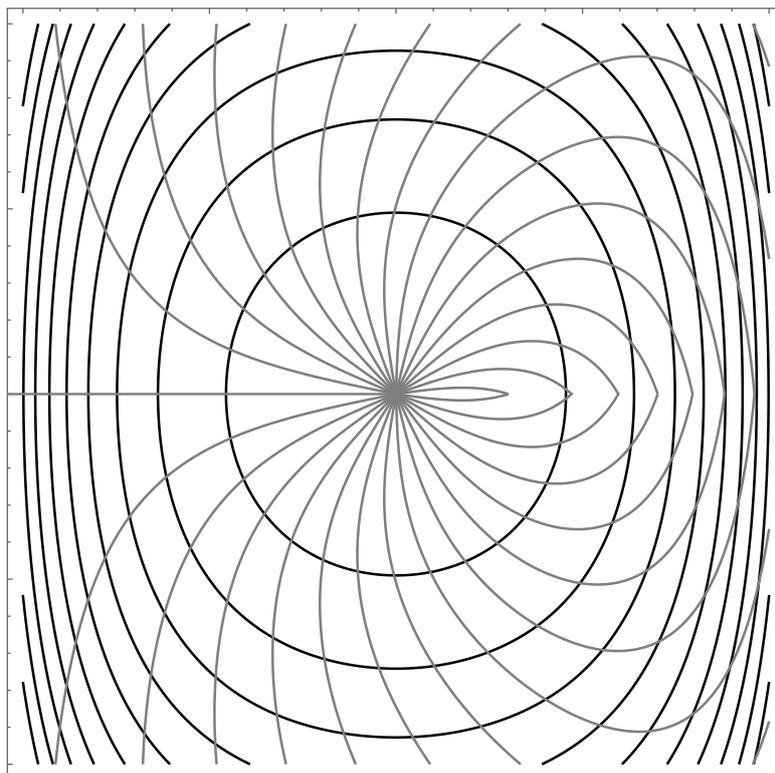
Es decir, no son otra cosa que el retrato de fase, con omisión de las flechitas.

Las curvas coordenadas de la nueva variable Q suelen ser complicadas. En el ejemplo del potencial $V(q) = a \sec^2(q/l)$ la ecuación de transformación que define la variable Q es

$$Q(q, p) = \pm \sqrt{\frac{ml^2}{2E}} \arccos \left[-\sqrt{\frac{E}{E-a}} \sin(q/l) \right], \quad (49)$$

donde a su vez E debe ser considerada función de q y p a través de la ec. (48).

En el programa *Mathematica*, las curvas de nivel de las funciones $E(q, p)$ y $Q(q, p)$ pueden trazarse sin dificultad con la función `ContourPlot`. Las curvas coordenadas son las que muestra la figura.



3. Variables ángulo–acción para sistemas de un solo grado de libertad

Para construir las variables de ángulo-acción de un sistema unidimensional, necesitamos que el movimiento sea **periódico**. Las órbitas en el espacio de fase deben ser curvas simples cerradas. Si el espacio de fase se divide en varias regiones invariantes, las variables de ángulo-acción pueden definirse en aquellas regiones en donde las órbitas satisfagan el criterio anterior. No habrá tiempo de tratar con movimientos de rotación, para los que valen resultados análogos.

En sistemas conservativos de un solo grado de libertad, la esencia de las variables ángulo–acción está en elegir como nuevo impulso generalizado no la energía E sino una función especial de la energía. Como todo el asunto radica en la elección adecuada del nuevo impulso, primero explicaremos en detalle la manera en que el nuevo impulso puede elegirse como una función previamente determinada de la energía. Luego se tratará de aplicar esto a un caso particular.

La ecuación de H–J para la función característica de Hamilton es

$$H(q, W'(q)) = E. \quad (50)$$

Encontrada una solución

$$W = W(q, E), \quad (51)$$

la transformación canónica generada por W conduce del hamiltoniano original $H(q, p)$ a un nuevo hamiltoniano

$$K(Q, E) = E, \quad (52)$$

donde E es el impulso y Q su coordenada conjugada. La relación entre las coordenadas originales y las nuevas viene dada a través de las ecuaciones de transformación

$$p(q, E) = \frac{\partial W}{\partial q}(q, E), \quad Q(q, E) = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E). \quad (53)$$

Recién aquí es donde se revela en cada problema el significado geométrico de Q .

En verdad, la forma en la que definimos la constante de separación en la ec. (50) es arbitraria. Del mismo modo sería válido escribir

$$H(q, W'(q)) = f(\alpha). \quad (54)$$

Una función de una constante es tan buena como una constante. La solución de esta ecuación va a depender de f . Todo se limita a escribir $f(\alpha)$ en donde antes aparecía E .

$$W_f(q, \alpha) = W(q, f(\alpha)). \quad (55)$$

Esta función W_f satisface la misma ecuación diferencial que W y tiene el número suficiente

de variables como para definir a través de ella una función generatriz F_2 , donde el lugar asignado al nuevo impulso sea el que ocupa α :

$$F_2(q, P) = W(q, f(P)). \quad (56)$$

La relación entre el nuevo impulso y la energía es

$$E = f(P). \quad (57)$$

Con la introducción de la función f , mediando entre P y la energía, estamos cambiando la definición y el significado de la nueva coordenada:

$$Q(q, P) = \frac{\partial W_f(q, P)}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial E}(q, f(P))f'(P). \quad (58)$$

Como ahora el nuevo hamiltoniano es

$$K(Q, P) = f(P), \quad (59)$$

el impulso P sigue siendo una constante de movimiento, relacionada con la energía por

$$P = f^{-1}(E). \quad (60)$$

Por otro lado, la evolución de Q está determinada por

$$\dot{Q} = f'(P) \Rightarrow Q(t) = f'(P)t + Q_0. \quad (61)$$

De manera que el efecto de la función f es cambiar la velocidad con la que evoluciona $Q(t)$. Como P puede considerarse una función de la energía, la velocidad a la que avanza $Q(t)$ no sólo ya no es igual a 1, sino que es en sí misma una función de E ,

$$\dot{Q}(E) = f'(P(E)). \quad (62)$$

Antes, la velocidad de la coordenada Q era independiente de la órbita. Ahora depende de E .

Si el movimiento es **periódico** para todas las órbitas analizadas, entonces la variación de $Q(t)$ a lo largo de un período del movimiento para una órbita con energía E es

$$\Delta Q(E) = T(E)f'(P(E)). \quad (63)$$

En los sistemas unidimensionales que estamos considerando, el objetivo es elegir la función f de manera tal que el cambio $\Delta Q(E)$ sea independiente de la energía; más aún, que sea igual a 2π para todas las órbitas.

El período es la integral de dt a lo largo de un ciclo

$$T(E) = \int_0^{T(E)} dt = \oint \frac{dq}{\dot{q}} = \oint \frac{dq}{\partial H(q, p)/\partial p}. \quad (64)$$

De manera que

$$T(E) = \oint \frac{\partial p(q, H)}{\partial H} dq. \quad (65)$$

Hablar de p como función de H es equivalente a hablar de p como función de la energía. Cuando pensamos en la función $H(q, p)$ mentalmente la intercambiamos con $E(q, p)$. Luego

$$T(E) = \oint \frac{\partial p(q, E)}{\partial E} dq = \frac{d}{dE} \oint p(q, E) dq. \quad (66)$$

Entonces, si queremos que $\Delta Q(E)$ en la ec. (63) sea igual a 2π , deberá cumplirse

$$\frac{2\pi}{f'(P(E))} = \frac{d}{dE} \oint p(q, E) dq. \quad (67)$$

Puesto que $P(E) = f^{-1}(E)$, en el miembro de la izquierda tenemos

$$\frac{2\pi}{f'(P(E))} = 2\pi(f^{-1})'(E). \quad (68)$$

Finalmente, la función buscada es (salvo una constante)

$$f^{-1}(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq. \quad (69)$$

Esta es la definición de la variable de acción,

$$J(E) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq, \quad (70)$$

quien será de ahora en más el nuevo impulso P .

Si hemos resuelto la ecuación de H-J y la solución es $W(q, E)$, en lugar de definir la función generatriz como $F_2(q, E) = W(q, E)$, definimos

$$F_2(q, J) = W(q, E(J)). \quad (71)$$

Una de las propiedades que se señala con mayor énfasis al presentar las variables de ángulo-acción es que el período del movimiento puede obtenerse sin tener que resolver las ecuaciones de movimiento. Por su misma construcción hemos visto que

$$T(E) = 2\pi J'(E) \Rightarrow \omega(E) = \frac{1}{J'(E)}. \quad (72)$$

A la variable conjugada de J la llamaremos w . Según vimos antes, su evolución está dada por

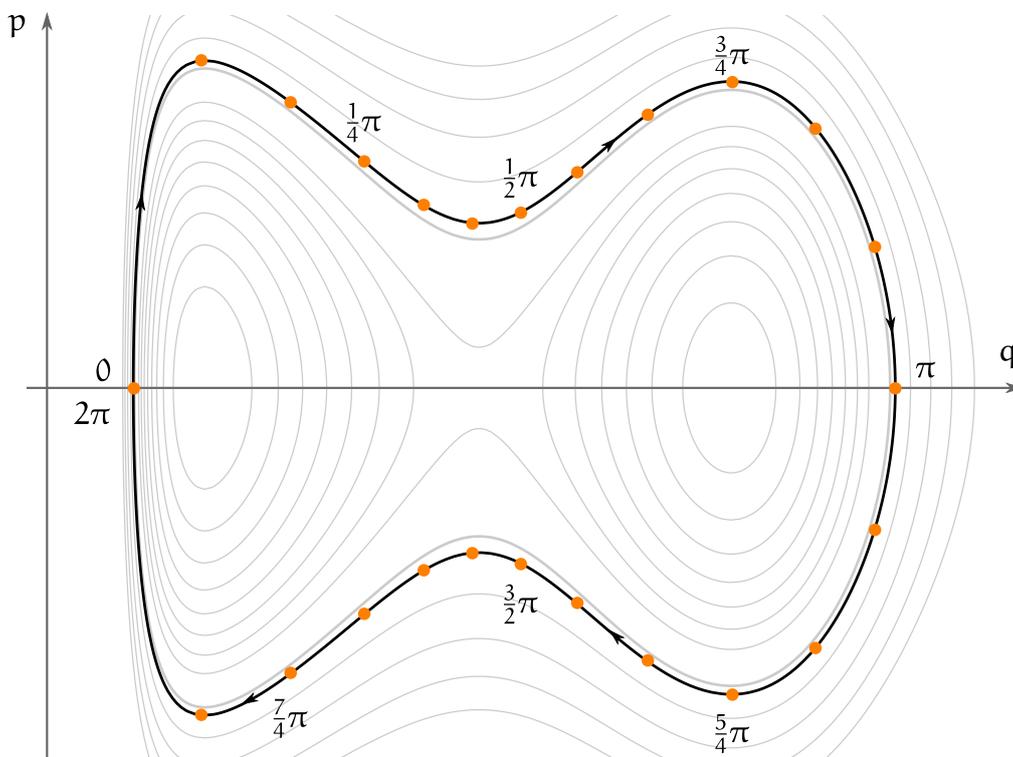
$$\dot{w}(t) = E'(J) \Rightarrow w(t) = \omega(E)t + w_0. \quad (73)$$

En un intervalo de tiempo $T(E)$ la variable ángulo se incrementa en 2π ,

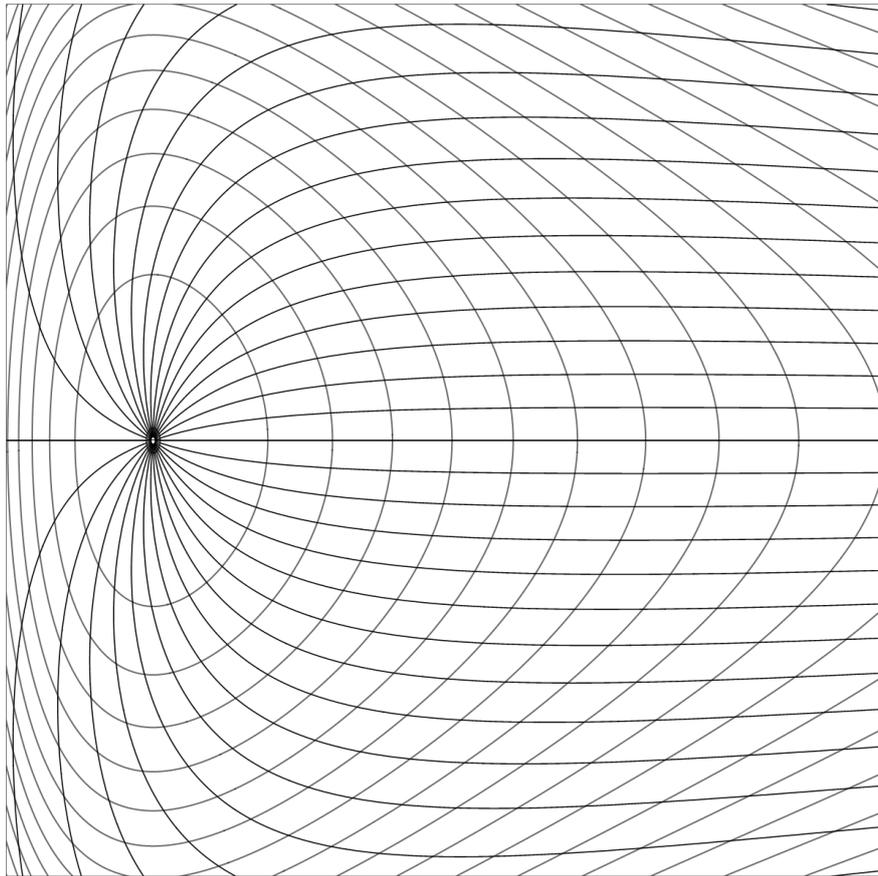
$$\Delta w = 2\pi. \quad (74)$$

Tal fue, en primer lugar, la propiedad que nos llevó a introducir la variable de acción.

La interpretación de este resultado es la siguiente: consideremos una órbita con energía E y variable de acción $J(E)$. Sobre la órbita marcamos un punto (q, p) cualquiera y le asignamos el valor de $w = 0$. Seguimos la evolución temporal del punto en el espacio de fase. A medida que el punto se mueve, hacemos marcas sobre la órbita y las etiquetamos de acuerdo al valor de la coordenada w . Entonces, la ec. (74) dice que al regresar al punto de partida, luego de completado un ciclo, el valor de la coordenada w será igual a 2π .



La transformación a las variables (w, J) tiene una interpretación gráfica muy directa. Cada órbita está identificada por su valor de J , como si marcásemos curvas de nivel en un mapa de relieve. En cierto sentido podemos pensar que J es el *radio* de las órbitas. Sobre cada órbita, la coordenada w va marcando puntos entre 0 y 2π como si se tratara del cuadrante de un reloj. En el plano qp , las líneas coordenadas de J coinciden con las órbitas, en tanto que las líneas coordenadas de w trazan especies de rayos. Es un tipo de transformación que recuerda al paso de coordenadas cartesianas a polares, sólo que en lugar de círculos de radio constante tenemos a las órbitas de J constante, y en lugar de las rectas de ángulo constante tenemos a las curvas de w constante. Es como si tomásemos el sistema de coordenadas polares y lo deformásemos. La figura siguiente muestra las líneas coordenadas de las variables de ángulo-acción para el problema radial de Kepler.



3.1. La unidades de las variables de ángulo–acción

La función principal S , la función característica W y la acción J tienen unidades de q por p . Debido a que q y p pueden ser cualquier cosa, no es posible hablar en general de las unidades de q o de las unidades de p . Sin embargo, las ecuaciones canónicas

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (75)$$

implican que las unidades del producto qp son de energía por tiempo. Esto vale siempre, y es útil para chequear las cuentas. Las unidades de energía por tiempo son también las unidades del momento angular; es bueno recordarlo. A la constante de Planck se la llama **cuanto de acción** y tiene unidades de energía por tiempo; el momento angular está cuantizado en unidades de \hbar . La variable ángulo, que es $\partial W/\partial J$, es adimensional.

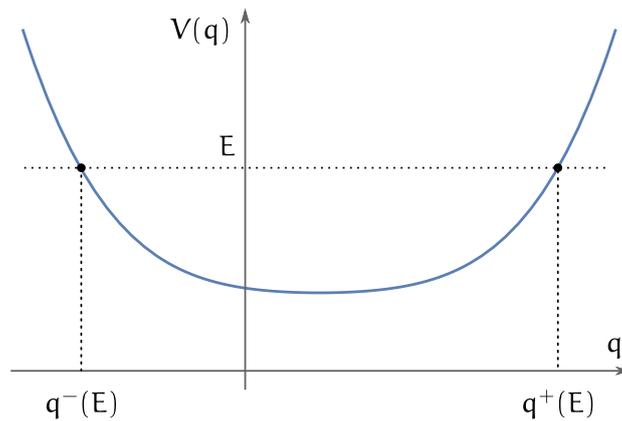
3.2. Variables de ángulo–acción para $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Los objetivos en esta clase de problemas son: primero, calcular la acción $J(E)$ y la función $E(J)$; segundo, a partir de estas funciones calcular el período $T(E)$ o $T(J)$; por último, calcular la ecuación de transformación a la variable ángulo $w(q, E)$ o $w(q, J)$. La señal más acabada de que el problema se ha resuelto completamente consiste en graficar las curvas coordenadas de w y J en el plano qp , como en el ejemplo anterior del problema de Kepler.

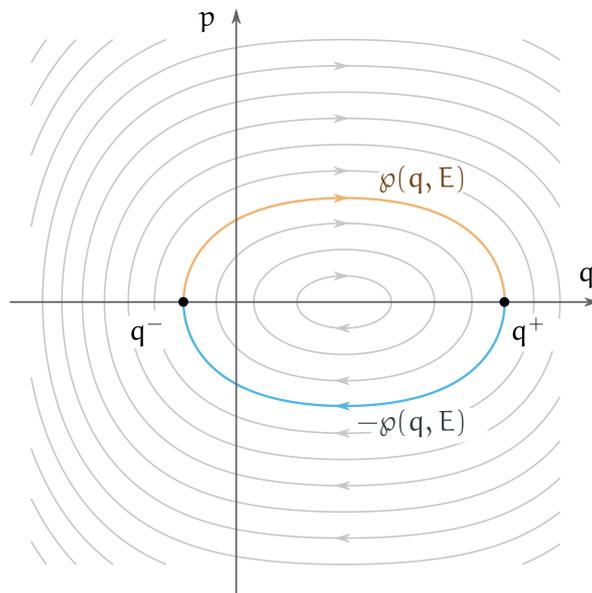
En general, en un problema de este tipo se empieza calculando la expresión integral de la función $W(q, E)$, algo que ya hemos hecho varias veces. Consideremos un hamiltoniano de la forma

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (76)$$

Asumamos, por dar un caso concreto, que $V(q)$ es como muestra la figura. Lo que nos interesa es que haya un rango de energías en el que existan dos puntos de retorno, $q^\pm(E)$.



El retrato de fase tendrá el siguiente aspecto, donde hemos marcado las dos ramas de la función $p(q, E)$ para una órbita con energía E .



La ecuación diferencial que satisface W es

$$\frac{W'(q)^2}{2m} + V(q) = E, \quad (77)$$

y, por lo tanto, la función W tiene también dos ramas

$$W^\pm(q, E) = \pm \sqrt{2m} \int_{q^-(E)}^q dq \sqrt{E - V(q)}. \quad (78)$$

Por convención, hemos fijado el límite inferior de integración en el punto de retorno de la izquierda. Suele bastar con esta expresión integral. Lo que nos interesa de W son sus derivadas, de modo que no hay que apresurarse a calcular esta integral ni tampoco el valor de los puntos de retorno. En general, los puntos de retorno entran en el cálculo de las integrales únicamente a través de la propiedad que los define, a saber, que $\dot{q} = p/m$ es cero en esos puntos. No suele ser necesario calcular $q^\pm(E)$, sino sólo tener en cuenta que

$$E - V(q^\pm(E)) = 0. \quad (79)$$

Por simplicidad, de ahora en más omitiremos la dependencia de q^\pm en la energía.

Tratándose de las variables de ángulo-acción, la función generatriz que nos interesa no es $W(q, E)$ sino

$$W(q, E(J)). \quad (80)$$

De manera que el siguiente paso, si no el primero, es calcular la acción $J(E)$. Por su propia definición, para una órbita de energía E la acción es el área encerrada por la órbita en el plano qp . A veces estas órbitas son elipses, o círculos, o cuadrados, y entonces es fácil calcular el área sin tener que recurrir a la definición integral de $J(E)$. Esos casos no abundan. Para un hamiltoniano de la forma

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (81)$$

la órbita en el espacio de fase tiene dos ramas simétricas

$$p(q, E) = \pm \sqrt{2m[E - V(q)]}. \quad (82)$$

La acción, que es $1/2\pi$ veces el área encerrada por la órbita, es

$$J(E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2m} \int_{q^-}^{q^+} dq \sqrt{E - V(q)}, \quad (83)$$

donde hemos usado la simetría de las dos ramas del impulso. Esta integral puede llevarse a cabo explícitamente sólo en contados casos.

Nótese que la misma integral aparece tanto en la definición de W , ec. (78),

$$W^\pm(q, E) = \pm \sqrt{2m} \int_{q^-}^q dq \sqrt{E - V(q)}, \quad (84)$$

como en el cálculo de $J(E)$, ec. (83). En $W^\pm(q, E)$ el límite de integración está libre, lo que equivale a calcular una primitiva. En $J(E)$ el límite de integración se ha fijado en el valor q^+ . Esto puede dar la falsa idea de que para calcular $J(E)$ primero es necesario calcular $W^+(q, E)$, y luego evaluar esta función en $q = q^+$,

$$J(E) = \frac{1}{\pi} W^+(q^+, E). \quad (85)$$

Esta identidad difícilmente puede ser aprovechada en el cálculo de $J(E)$. El camino más directo para calcular una integral definida no es siempre a través de una primitiva.

Pasamos ahora al cálculo de la variable ángulo, que está dada por

$$w(q, J) = \frac{\partial W(q, E(J))}{\partial J} = \frac{\partial W}{\partial E}(q, E(J)) E'(J). \quad (86)$$

Para evitarnos invertir la función $J(E)$, lo más inmediato es calcular la variable ángulo como función de q y de E ,

$$w(q, E) = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial W}{\partial E}(q, E). \quad (87)$$

Si uno ya calculó la coordenada Q asociada a la función generatriz $W(q, E)$, la relación entre la variable ángulo y Q es

$$w(q, E) = \frac{1}{J'(E)} Q(q, E). \quad (88)$$

Es importante notar que, según la convención que hemos usado al definir la función W , la variable ángulo, como función de q y de la energía o de q y de la acción, también se dividirá en dos ramas, una válida para la región de la órbita en la que $p \geq 0$ y la otra válida para $p \leq 0$. Tendremos

$$w^\pm(q, E) = \frac{1}{J'(E)} Q^\pm(q, E) = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial W^\pm}{\partial E}(q, E). \quad (89)$$

A partir de la ec. (83) vemos que

$$J'(E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q^-}^{q^+} dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (90)$$

Por otro lado, la ec. (78),

$$W^\pm(q, E) = \pm \sqrt{2m} \int_{q^-}^q dq \sqrt{E - V(q)}, \quad (91)$$

implica

$$Q^\pm(q, E) = \frac{\partial W^\pm}{\partial E}(q, E) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q^-}^q dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (92)$$

Finalmente,

$$w^\pm(q, E) = \pm \pi \frac{\int_{q^-}^q dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}}{\int_{q^-}^{q^+} dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}}. \quad (93)$$

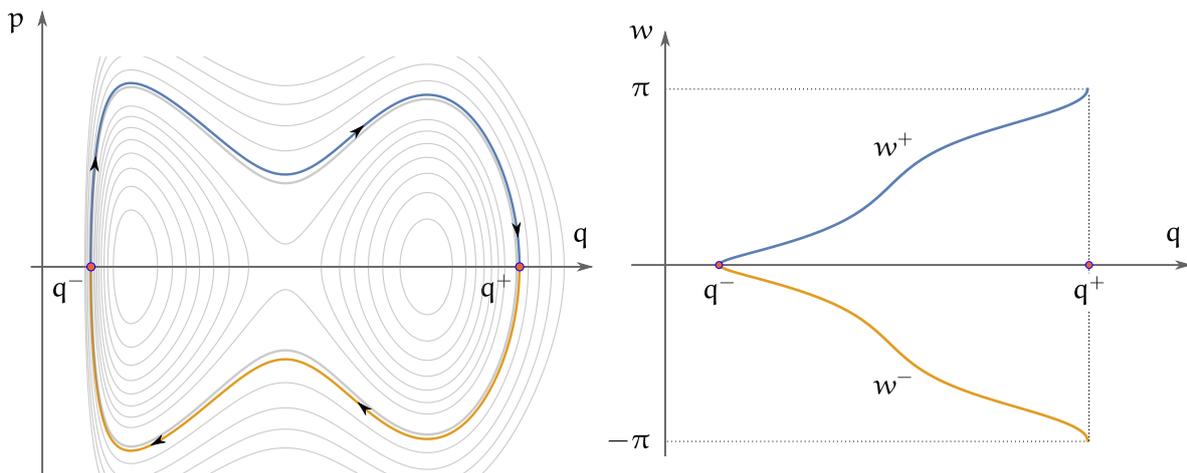
En el punto de retorno q^- , es $w^\pm = 0$. Si nos movemos por la rama superior de la órbita, $w^+(q, E)$ aumenta a medida que q crece y alcanza su valor máximo cuando q llega al punto de retorno q^+ . En este punto es

$$w^+(q^+, E) = \pi. \quad (94)$$

En cambio, si partimos desde q^- y recorremos la rama inferior de la órbita, w^- disminuye a medida que q aumenta, y alcanza su mínimo valor en q^+ ,

$$w^-(q^+, E) = -\pi. \quad (95)$$

Si la partícula parte desde el punto de retorno q^+ , primero recorre la rama inferior de la órbita. Durante este tramo la variable ángulo varía entre $-\pi$ y 0 . Cuando la partícula completa el ciclo, durante el movimiento sobre la rama superior de la órbita su variable ángulo se mueve entre 0 y π . La variación neta de la variable ángulo es así igual a 2π , en acuerdo con la ec. (74). La figura de la derecha muestra la variable ángulo como función de q para la órbita de la izquierda.



Antes de seguir, notemos que comparando las ecs. (90) y (92), también podemos escribir

$$w^\pm(q, E) = \pm\pi \frac{Q^+(q, E)}{Q^+(q^+, E)}. \quad (96)$$

Esto es útil para calcular w si ya se ha calculado Q .

3.3. Ningún misterio

Se insiste en algunos libros acerca la superioridad de las variables de ángulo–acción en el cálculo del período de movimiento. Por ejemplo, en la sección que Goldstein le dedica a las variables de ángulo–acción para un sistema unidimensional se dice que

la utilización de las variables de acción–ángulo nos proporciona una técnica **potente** para la obtención de la frecuencia de un movimiento periódico *sin hallar una solución completa del movimiento del sistema*

El énfasis en la palabra **potente** es mío. Las itálicas son de Goldstein. En sistemas unidimensionales, la potencia del método de las variables ángulo–acción para calcular el período de movimiento no es superior a lo que cualquier alumno de Física 1 podría manejar.

En verdad una de las propiedades de las variables de ángulo–acción es que el período de la órbita como función de la energía viene dado por la ec. (72),

$$T(E) = 2\pi J'(E). \quad (97)$$

Si reemplazamos aquí la expresión (90), resulta

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q^-}^{q^+} dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (98)$$

Ahora bien, esto es exactamente lo mismo que un alumno de Física 1 escribiría para un problema unidimensional cuya ecuación de conservación se leyese como

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) = E. \quad (99)$$

En tal caso tendremos

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (100)$$

Si la partícula se mueve alrededor de un mínimo del potencial, con puntos de retorno en q_1 y q_2 , ambos funciones de E y con $q_1 < q_2$, el período del movimiento es igual al doble del tiempo que le toma a la partícula recorrer el trayecto entre q_1 y q_2 ,

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_1}^{q_2} dq \frac{1}{\sqrt{E - V(q)}}. \quad (101)$$

Es el mismo resultado al que llegamos laboriosamente a través de las variables de ángulo–acción, ec. (98). Entonces, si un alumno de Física 1 puede llegar al mismo resultado en dos renglones, ¿dónde está la potencia del método? Se puede argüir que no está en la expresión (98), sino en el hecho de que tal vez sea más sencillo calcular $J(E)$ y tomar su derivada, que haber tomado su derivada antes de calcular $J(E)$. La respuesta es que esto no es así. Lo usual es que

$$J(E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2m} \int_{q^-}^{q^+} dq \sqrt{E - V(q)} \quad (102)$$

sea increíblemente más difícil de calcular que la integral (98), aunque al final tenga una expresión sencilla.

La verdadera potencia de las variables de ángulo–acción está en el análisis del movimiento de sistemas con más de un grado de libertad o en la formulación de métodos perturbativos.

4. El potencial $V(q) = \alpha \sec^2(q/l)$

Se trata de calcular las ecuaciones de transformación a las variables de ángulo-acción. Gran parte del trabajo ya está hecho, debido a que hemos calculado $Q(q, E)$, ec. (40). Para calcular la variable ángulo podemos usar la ec. (96),

$$w^\pm(q, E) = \pm\pi \frac{Q^+(q, E)}{Q^+(q^+, E)}, \quad (103)$$

donde, según la ec. (40),

$$Q^\pm(q, E) = \pm\sqrt{\frac{ml^2}{2E}} \arccos \left[-\sqrt{\frac{E}{E-\alpha}} \sin(q/l) \right] \quad (104)$$

y

$$Q^+(q^+, E) = \sqrt{\frac{ml^2}{2E}}. \quad (105)$$

Luego,

$$w(q, E) = \pm \arccos \left[-\sqrt{\frac{E}{E-\alpha}} \sin(q/l) \right]. \quad (106)$$

Hemos dejado lo mejor para lo último. Nos queda únicamente calcular la acción,

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq = \frac{1}{\pi} \sqrt{2m} \int_{-q_E}^{q_E} dq \sqrt{E - \alpha \sec^2(q/l)}. \quad (107)$$

Hay muchos caminos para resolver esta integral, aquí mostramos uno sólo. Reordenando términos y usando paridad,

$$J(E) = \frac{2l\sqrt{2m}}{\pi} \int_0^{q_E/l} dx \frac{\sqrt{E \cos^2 x - \alpha}}{\cos x} = \frac{2l\sqrt{2mE}}{\pi\lambda} \int_0^{q_E/l} dx \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 x}}{\cos x}, \quad (108)$$

con

$$\lambda^2 = \frac{E}{E-\alpha}. \quad (109)$$

Mediante el cambio de variables

$$\lambda \sin x = \sin u \Rightarrow dx = \frac{\cos u}{\lambda \cos x}, \quad (110)$$

queda

$$J(E) = \frac{2l\sqrt{2mE}}{\pi} \int_0^{\pi/2} du \frac{\cos^2 u}{\lambda^2 - \sin^2 u}. \quad (111)$$

En este punto se abren varias opciones. La que seguimos nosotros consiste en escribir $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$, $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$ y en cambiar a la variable $v = 2u$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} du \frac{\cos^2 u}{\lambda^2 - \sin^2 u} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} dv \frac{1 + \cos v}{2\lambda^2 - 1 + \cos v} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} dv \frac{(2\lambda^2 - 1 + \cos v) - 2(\lambda^2 - 1)}{2\lambda^2 - 1 + \cos v} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} dv \left(1 - \frac{2(\lambda^2 - 1)}{2\lambda^2 - 1 + \cos v} \right). \end{aligned} \quad (112)$$

La última integral se puede hacer mediante la mejor sustitución del mundo, $z = \tan v/2$,

$$\int_0^{\pi} \frac{dv}{2\lambda^2 - 1 + \cos v} = \int_0^{\infty} dz \frac{1}{\lambda^2 + (\lambda^2 - 1)z^2} = \frac{\pi}{2\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1}}. \quad (113)$$

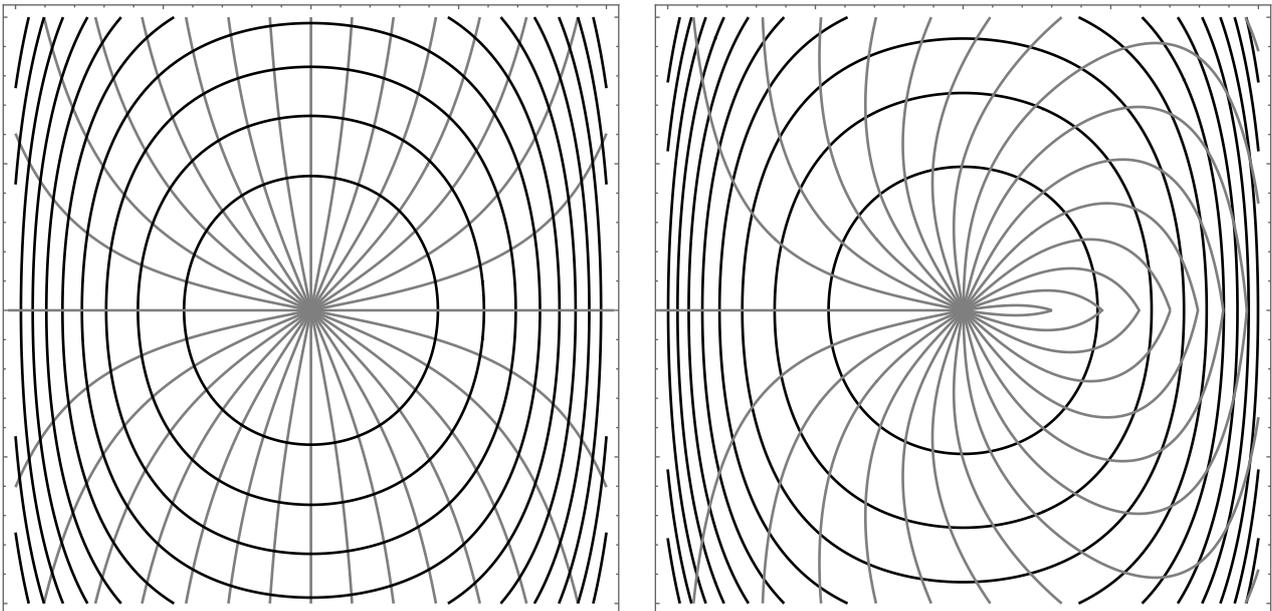
Luego,

$$J(E) = l\sqrt{2m} \left(\sqrt{E} - \sqrt{a} \right). \quad (114)$$

Se verifica entonces el resultado obtenido antes para la frecuencia del movimiento, ec. (46),

$$\omega(E) = \frac{1}{J'(E)} = \sqrt{\frac{2E}{ml^2}}. \quad (115)$$

Notemos que para pasar de la variable Q a la variable ángulo, apenas si hubo que suprimir un pequeño prefactor en la ec. (104). Sin embargo el cambio es notable. Las curvas coordenadas de las variables w y J son como las que muestra la figura de la izquierda. A modo de comparación, a la derecha mostramos de nuevo la figura con las curvas coordenadas de las variables Q y E . El mayor cambio se produce en el paso de Q a w , debido a que J esencialmente es \sqrt{E} .



4.1. Cálculo de la acción integrando en el plano complejo

Para el potencial de la sección anterior, el cálculo de la acción demandó una larga cadena de sustituciones, desde la ec. (108) hasta la ec. (114). Tiene su interés calcular la acción mediante integrales de contorno en el plano complejo. Con un poco de práctica este método resulta muy superior al de la integración directa.

En la ec. (108) que define la acción, la integral que hay que calcular es

$$I = \frac{1}{\lambda} \int_0^{x_E/l} dx \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 x}}{\cos x}, \quad (116)$$

siendo

$$J(E) = \frac{2l\sqrt{2mE}}{\pi} I. \quad (117)$$

El límite superior de la integral es el valor de x mayor que cero que hace nulo el argumento de la raíz cuadrada. Con el cambio de variables

$$\lambda \sin x = u, \quad (118)$$

y haciendo uso de la paridad del integrando, resulta

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \frac{\sqrt{1 - u^2}}{\lambda^2 - u^2}. \quad (119)$$

Definimos una función de la variable z en el plano complejo que tenga en el eje real un corte de ramificación a lo largo del segmento $(-1, 1)$ y que, cuando la parte imaginaria de z tienda a 0^+ , coincida en ese intervalo con el integrando de la ec. (119),

$$f(z) = \frac{i\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}}{\lambda^2 - z^2}. \quad (120)$$

El corte de ramificación de la función raíz cuadrada se elige a lo largo del semieje real positivo, de modo que para $z \rightarrow x \pm i0^+$

$$\begin{cases} \sqrt{z-1}\sqrt{z+1} \rightarrow \pm i\sqrt{1-x^2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{z-1}\sqrt{z+1} \rightarrow \sqrt{x^2-1}, & \text{si } 1 < x, \\ \sqrt{z-1}\sqrt{z+1} \rightarrow -\sqrt{x^2-1}, & \text{si } x < -1. \end{cases} \quad (121)$$

Lo importante es que, a lo largo del corte, el integrando tome un valor por encima y el valor opuesto por debajo.

Además del corte de ramificación, la función $f(z)$ tiene polos en $z = \pm\lambda$. De acuerdo a su definición, ec. (109), $\lambda > 1$, de manera que los polos están fuera del corte. Los residuos

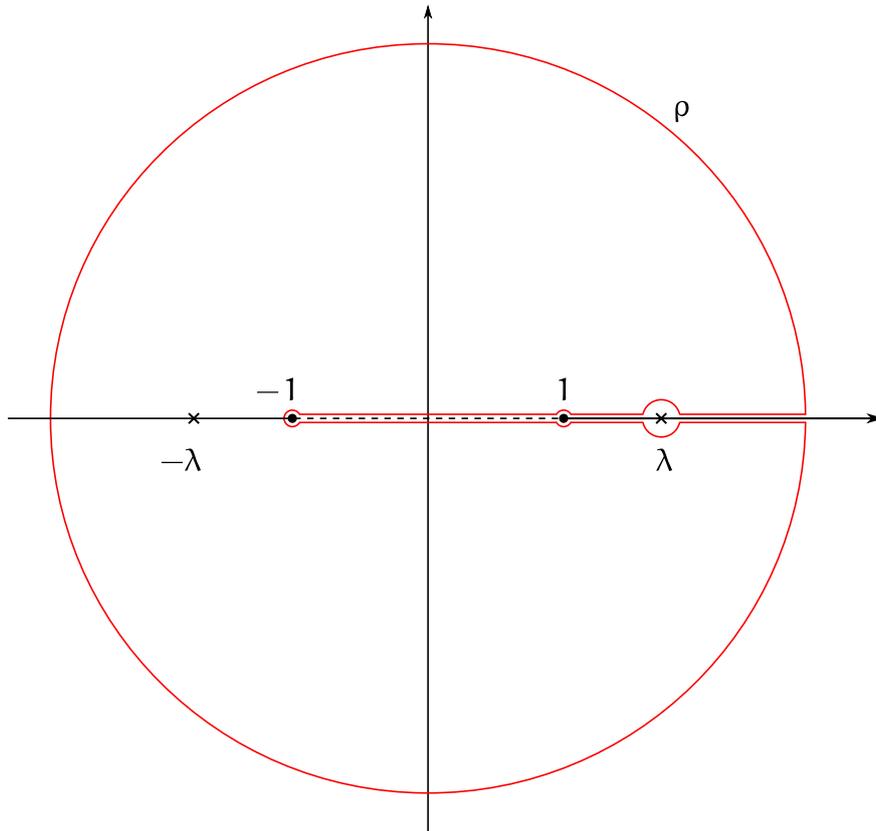
de la función en estos polos son

$$\text{Res}[f]_{z=\pm\lambda} = -\frac{i\sqrt{\lambda^2-1}}{2\lambda}. \quad (122)$$

Respecto al comportamiento en el infinito, para $z = \rho e^{i\varphi}$ con $\rho \gg 1$ encontramos

$$f(z) \rightarrow -\frac{i}{\rho e^{i\varphi}}. \quad (123)$$

Teniendo en cuenta todas estas cosas, integramos $f(z)$ sobre el contorno de la figura.



El polo $z = -\lambda$ queda en el interior del contorno. Las integrales sobre los dos semicírculos que rodean al polo $z = \lambda$ suman $-2\pi i \text{Res}[f]_{z=\lambda}$. La integral sobre el círculo de radio ρ , para $\rho \rightarrow \infty$ tiende a 2π . Las integrales por encima y por debajo del eje x entre 1 e infinito se cancelan mutuamente. Las integrales por encima y por debajo del corte de ramificación se suman. Finalmente,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = -2 \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{\lambda^2-x^2} - 2\pi \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2\lambda} + 2\pi = 2\pi \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2\lambda}. \quad (124)$$

Esto implica que

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{\lambda^2-x^2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda} \right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{E}} \right). \quad (125)$$

5. Otros potenciales que pueden resolverse

Dejando de lado alteraciones triviales de los potenciales armónicos o lineales, el cálculo de $J(E)$ y de la ecuación de transformación a la variable ángulo para hamiltonianos

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (126)$$

sólo puede llevarse a cabo en contadísimos casos, sin que sea necesario introducir funciones especiales. El siguiente catálogo está tomado del libro de Percival y Richards, donde también pueden encontrarse las integrales necesarias en uno de sus apéndices. Para estar seguros de que entendieron el procedimiento, pueden consultar esas integrales sin mayores escrúpulos. A los que les divierta calcular integrales difíciles, tienen ahí otro buen ejercicio. Estos son los potenciales propuestos:

$$V_1(q) = U \tan^2 \alpha q, \quad (127)$$

$$V_2(q) = U (e^{-2\alpha q} - 2e^{-\alpha q}), \quad (128)$$

$$V_3(q) = -\frac{U}{\cosh^2 \alpha q}, \quad (129)$$

$$V_4(q) = U \left[\left(\frac{\alpha}{q} \right)^2 - 2 \frac{\alpha}{q} \right]. \quad (130)$$

El primer potencial es en realidad equivalente a $V(q) = \alpha \sec^2(q/l)$. El último es una versión adimensionalizada del problema de Kepler radial. Podríamos agregar el problema radial del oscilador en el plano,

$$V_5(q) = U \left[\left(\frac{\alpha}{q} \right)^2 + \left(\frac{q}{\alpha} \right)^2 \right]. \quad (131)$$

■ **Advertencia:** no todos los hamiltonianos son de la forma (126). Por ejemplo, el término cinético podría ser relativista o ultrarrelativista, $\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ y $|p|c$, respectivamente. Los retratos de fase tampoco tienen que ser simétricos respecto del eje q . Por ejemplo, un hamiltoniano de la forma $p^2 - pq + q^2$ tiene órbitas que son elipses a 45° grados. Lo que vimos es sólo una muestra y únicamente para sistemas unidimensionales.

6. Diversidad

Dependiendo de la fuente que consulten, el factor $1/2\pi$ puede o no estar contenido en la definición de J . En la clase teórica definieron J sin el factor $1/2\pi$ pero introdujeron un factor 2π al definir la variable ángulo θ , con lo que J y θ no son estrictamente coordenadas canónicas. Landau incluye el factor $1/2\pi$. Goldstein lo omite y su variable ángulo aumenta en 1 durante un ciclo.