Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2020

Clase práctica del jueves 2/7. *Guía 7. Transformaciones canónicas.*[*]

Transformaciones canónicas

Notación: En casi todo lo que sigue debe entenderse que existen N coordenadas q_i y N coordenadas p_i, y de igual forma para Q_i y P_i. Por simplicidad, salvo en raros casos, omitiremos los subíndices y trabajaremos como si hubiera un único par de coordenadas canónicas.

Partimos de un sistema mecánico descripto por coordenadas canónicas q y p. La dinámica está generada por un hamiltoniano $H(q, p, t)$. Una transformación canónica es un cambio invertible de coordenadas

$$Q = Q(q, p, t), \qquad P = P(q, p, t), \tag{1}$$

tal que, sin importar la forma de H, existe un nuevo hamiltoniano $\bar{H}$ que genera la dinámica de las coordenadas Q y P. Nótese que una cosa es la transformación, que siempre puede definirse, y otra cosa, muy distinta, es que la transformación sea canónica.

Las coordenadas q y p evolucionan de acuerdo a las ecuaciones canónicas

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t), \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t). \tag{2}$$

Suministradas las condiciones de borde, esto dará funciones $q(t)$ y $p(t)$. Por el solo hecho de estar definidas, las relaciones (1) inducirán funciones del tiempo $Q(t)$ y $P(t)$ dadas por

$$Q(t) = Q\Big(q(t), p(t), t\Big), \qquad P(t) = P\Big(q(t), p(t), t\Big). \tag{3}$$

Para que la transformación sea canónica, ha de existir $\bar{H}$ tal que las funciones anteriores sean soluciones de las ecuaciones canónicas

$$\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P}(Q, P, t), \qquad \dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}(Q, P, t). \tag{4}$$

Dada la transformación (1), la dinámica (3) está garantizada. Lo que no está garantizado es la existencia de un nuevo hamiltoniano $\bar{H}$ que genere esa dinámica a través de las ecuaciones canónicas (4). La teoría de las transformaciones canónicas se ocupa de definir transformaciones que sean canónicas. El principal uso de las transformaciones canónicas es el formalismo de Hamilton-Jacobi. Aquí veremos cuestiones más básicas.

[*]zanellaj@df.uba.ar

Funciones generatrices

Las ecuaciones de movimiento canónicas,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t), \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t), \tag{5}$$

son equivalentes al principio de Hamilton modificado,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \big[p\dot{q} - H(q, p, t) \big] = 0. \tag{6}$$

Este es un principio variacional para las funciones q y p. Supongamos que tenemos una transformación del tipo (1),

$$Q = Q(q, p, t), \qquad P = P(q, p, t). \tag{7}$$

Mediante las transformaciones inversas, el principio variacional (6) se lee como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \Big[p(Q, P, t)\dot{q}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t) - H\Big(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t\Big) \Big] = 0. \tag{8}$$

Esto tiene la forma de un principio variacional en las funciones Q y P. Si fuera

$$p(Q, P, t)\dot{q}(Q, P, \dot{Q}, \dot{P}, t) - H\Big(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t\Big) = P\dot{Q} - \bar{H}(Q, P, t), \tag{9}$$

para cierta función $\bar{H}$, el principio variacional se leería como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \big[P\dot{Q} - \bar{H}(Q, P, t) \big] = 0. \tag{10}$$

De esta forma tendríamos asegurado un principio de Hamilton modificado y aseguradas también las ecuaciones canónicas correspondientes en las nuevas coordenadas. Ahora bien, la condición (9) es demasiado fuerte. Los integrandos de las ecs. (8) y (10) pueden diferir en la derivada total de una función cualquiera de las coordenadas, de los impulsos y del tiempo. La variación de tal término, fijados los puntos iniciales y finales de la trayectoria, es cero. Entonces, más general que la condición (9) es pedir

$$p\dot{q} - H(q, p, t) = P\dot{Q} - \bar{H}(Q, P, t) + \frac{dF}{dt}. \tag{11}$$

Esta es la ecuación fundamental. Recordándola es posible reconstruir todo el formalismo de las transformaciones canónicas. Más brevemente, la ecuación anterior puede escribirse de manera formal como

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} + \frac{dF}{dt}. \tag{12}$$

Esta ecuación es aún más fácil de recordar. Escribiendo cada lagrangiano en términos de su hamiltoniano se recupera la ec. (11), y de ahí se deduce el resto, que es como sigue.

Escrita de forma diferencial, la ecuación (11) se lee como

$$p\,dq - H\,dt = P\,dQ - \bar{H}\,dt + dF. \tag{13}$$

Agrupando términos,

$$dF = p\,dq - P\,dQ - (H - \bar{H})\,dt. \tag{14}$$

Si damos F como función de q, Q y t, tendremos definida cierta transformación y asegurada la existencia de $\bar{H}$. En efecto,

$$\begin{cases} p(q,Q,t) = \dfrac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q}, \\ P(q,Q,t) = -\dfrac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q}, \\ \bar{H} = H + \dfrac{\partial F}{\partial t}. \end{cases} \tag{15}$$

La función F, que surgió como una mera salvedad para la equivalencia de dos principios variacionales, termina definiendo ella sola la transformación y el nuevo hamiltoniano. A la función F se la llama *función generatriz*.

Para decirlo claramente: uno desearía poder definir transformaciones canónicas con una forma predeterminada, como en la ec. (1),

$$Q = Q(q,p,t), \qquad P = P(q,p,t). \tag{16}$$

No es eso lo que ocurre. Lo que uno puede elegir con una forma predeterminada es la función F. La forma de la transformación sólo se develará al final del cálculo. Lo que veremos las próximas clases, es que uno puedo elegir F con el objetivo de producir un nuevo hamiltoniano con una forma particular. Hoy veremos ejemplos de transformaciones canónicas sin ningún propósito secundario, más que el de familiarizarnos con el tipo de cálculos que involucran.

Cuando la forma diferencial (14) se escribe con q y Q como variables independientes, lo usual es llamar a F como F_1. Notar que las ecuaciones de transformación (15) están dadas de un modo mixto, y no en la forma más natural de las ecs. (16). Las ecs. (15) dan

$$\begin{cases} p = p(q,Q,t), \\ P = P(q,Q,t). \end{cases} \tag{17}$$

Para llevarlas a la forma (16), es necesario hacer un par de inversiones y composiciones.

Volviendo a las funciones generatrices. Es muy sencillo cambiar de variables independientes al momento de definir la transformación. Recién vimos que la forma más inmediata de definir la transformación es a través de las variables independientes q y Q. Pero si, por ejemplo, en la ec. (14),

$$dF = p\,dq - P\,dQ - (H - \bar{H})dt, \tag{18}$$

escribimos

$$P\,dQ = d(PQ) - Q\,dP, \tag{19}$$

la ec. (18) se transforma en esta otra

$$d(F + PQ) = p\,dq + Q\,dP - (H - \bar{H})dt. \tag{20}$$

En el miembro de la izquierda sigue apareciendo el diferencial de una función; da lo mismo que a $F + PQ$ lo llamemos simplemente F_2. Esta F_2 será función de q, P y del tiempo. Las ecuaciones de transformación se leen directamente de su forma diferencial:

$$\begin{cases} p(q, P, t) = \dfrac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q}, \\[2ex] Q(q, P, t) = \dfrac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P}, \\[2ex] \bar{H} = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}. \end{cases} \tag{21}$$

Del mismo modo, partiendo de la ec. (18) y escribiendo

$$p\,dq = d(pq) - q\,dp, \tag{22}$$

obtenemos la siguiente forma diferencial

$$d(F - pq) = -q\,dp - P\,dQ - (H - \bar{H})dt. \tag{23}$$

Llamando $F_3 = F - pq$, ahora las ecuaciones de transformación son

$$\begin{cases} q(p, Q, t) = -\dfrac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p}, \\[2ex] P(p, Q, t) = -\dfrac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q}, \\[2ex] \bar{H} = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t}. \end{cases} \tag{24}$$

Por último, si en la ec. (18) se hacen las dos sustituciones (19) y (22), queda

$$d(F - pq + PQ) \equiv dF_4 = -q\,dp + Q\,dP - (H - \bar{H})dt, \tag{25}$$

y las ecuaciones de transformación son

$$\begin{cases} q(p, P, t) = -\dfrac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p}, \\[2ex] Q(p, P, t) = \dfrac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P}, \\[2ex] \bar{H} = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t}. \end{cases} \tag{26}$$

Como nota práctica: la forma diferencial fundamental

$$dF = p\,dq - P\,dQ - (H - \bar{H})dt \tag{27}$$

siempre es fácil de reconstruir a partir de la ecuación

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} + \frac{dF}{dt}. \tag{28}$$

De allí salen directamente F_1 y sus ecuaciones de transformación. Para recordar las variables que corresponden a las otras F_i puedo sugerir la manera en que yo las recuerdo: la F_2 es la que da ecuaciones de transformación con signos positivos; la F_3 es la que da las ecuaciones con signos negativos; la F_4 es la que completa el cuadro.

A menudo una misma transformación puede definirse por funciones F de varios tipos. Pero también puede ocurrir que una transformación sea imposible de definir mediante alguna de las F. Por ejemplo, una de las transformaciones más sencillas es la transformación identidad,

$$\begin{cases} Q = q, \\[1ex] P = p. \end{cases} \tag{29}$$

Evidentemente es una transformación canónica, porque no estamos cambiando nada. Reescribiéndola ligeramente podemos pensar que se origina en una función de tipo F_2,

$$\begin{cases} Q(q, P) = q, \\[1ex] p(q, P) = P. \end{cases} \tag{30}$$

Puesto que para este tipo de funciones generatrices vale

$$\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} = p(q,P), \qquad \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P} = Q(q,P), \tag{31}$$

no es difícil ver que

$$F_2(q,P) = qP. \tag{32}$$

Si hubiéramos querido encontrar una $F_1(q,Q)$, debiéramos haber sido capaces de escribir las ecuaciones de transformación (29) en términos de q y de Q, lo que es imposible. No hay forma de expresar la ecuación $p = P$ en términos de q y Q. En cambio sí es posible hallar una función generatriz de tipo F_3. Las variables independientes en tal caso son p y Q. Podemos reformular las ecuaciones de transformación (29) como

$$\begin{cases} q(p,Q) = Q, \\ P(p,Q) = p. \end{cases} \tag{33}$$

Puesto que para las funciones generatrices de tipo F_3 vale

$$\frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial p} = -q(p,Q), \qquad \frac{\partial F_3}{\partial Q} = -P(p,Q), \tag{34}$$

debemos asegurarnos de que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial p} = -Q, \qquad \frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial Q} = -p, \tag{35}$$

lo que implica

$$F_3(p,Q) = -pQ. \tag{36}$$

Asimismo, es imposible encontrar una función de tipo F_4 para la transformación identidad.

¿Cuándo una transformación es canónica?

El criterio más inmediato para afirmar que una transformación es canónica es suministrar una función generatriz que lleve a las ecuaciones de transformación dadas. Como veremos en los ejemplos, encontrar funciones generatrices a partir de las ecuaciones de transformación supone resolver ecuaciones diferenciales, que, en última instancia, involucran el cálculo de integrales más o menos fáciles, o difíciles, según el día.

Por suerte existe otro criterio para decir si una transformación es canónica o no: es el criterio de los corchetes de Poisson. Si las coordenadas q_i y p_i son canónicas, las ecuaciones de transformación

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \qquad P_i = P_i(q, p, t) \tag{37}$$

definen una transformación canónica si y sólo si Q_i y P_i satisfacen las relaciones de conmutación

$$[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0, \qquad [Q_i, P_j] = \delta_{ij}. \tag{38}$$

Este criterio funciona para los dos lados. El dato pueden ser las ecuaciones de transformación inversas

$$q_i = q_i(Q, P, t), \qquad p_i = p_i(Q, P, t). \tag{39}$$

No es necesario invertir estas ecuaciones para aplicar el criterio de los corchetes de Poisson, basta verificar que se satisfacen las relaciones de conmutación

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \qquad [q_i, p_j] = \delta_{ij}, \tag{40}$$

donde ahora los corchetes están calculados respecto a las coordenadas Q_i y P_i. Si valen estas relaciones de conmutación, entonces Q_i y P_i son coordenadas canónicas.

Los corchetes de Poisson serán el tema de la próxima clase, de modo que, por el momento, si nos piden demostrar que una transformación es canónica buscaremos una función generatriz.

Problema 8-b

En este problema se dan las ecuaciones de transformación y se pide demostrar que corresponden a una transformación canónica. Las ecuaciones de transformación son

$$Q(q, p) = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right), \qquad P(q, p) = q \cot p. \tag{41}$$

Para demostrar que es una transformación canónica trataremos de encontrar alguna función generatriz. Como las transformaciones no involucran explícitamente el tiempo, buscaremos una función generatriz que no dependa explícitamente del tiempo. Empezaremos por probar con una de tipo $F_1(q, Q)$. Para eso necesitamos escribir las ecuaciones de transformación en términos de las variables independientes q y Q. Eso es muy fácil para la primera ecuación, que nos da

$$\sin p = q e^Q \quad \Rightarrow \quad p(q, Q) = \arcsin q e^Q. \tag{42}$$

Si en la segunda ecuación de transformación usamos este resultado, obtenemos

$$P(q, Q) = q\frac{\cos p}{\sin p} = e^{-Q}\sqrt{1 - q^2 e^{2Q}} = \sqrt{e^{-2Q} - q^2}. \tag{43}$$

Una función generatriz de tipo F_1 satisface las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} = p(q, Q), \qquad \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q} = -P(q, Q). \tag{44}$$

Luego, para la función que estamos buscando debe ser

$$\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} = \arcsin qe^Q, \qquad \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q} = -\sqrt{e^{-2Q} - q^2}. \tag{45}$$

Encontrar F_1 es como reconstruir una función a partir de su gradiente. Podemos integrar cualquiera de las dos ecuaciones. Vayamos con la primera; necesitaremos la primitiva de la función $\arcsin x$, que es

$$\int dx \ \arcsin x = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}. \tag{46}$$

(Esta integral se obtiene por partes o mediante la sustitución $x = \sin u$). Con esto tenemos

$$F_1(q, Q) = \int dq \ \arcsin qe^Q + C(Q) = e^{-Q}\left[qe^Q \arcsin qe^Q + \sqrt{1 - q^2 e^{2Q}}\right] + C(Q)$$
$$= q \arcsin qe^Q + \sqrt{e^{-2Q} - q^2} + C(Q). \tag{47}$$

La *constante* de integración es función de Q. Para encontrar $C(Q)$, calculamos la derivada de la función (47) respecto de Q e igualamos con la segunda ec. (45). La derivada es

$$\frac{q^2 e^Q}{\sqrt{1 - q^2 e^{2Q}}} - \frac{e^{-2Q}}{\sqrt{e^{-2Q} - q^2}} + C'(Q) = -\sqrt{e^{-2Q} - q^2} + C'(Q). \tag{48}$$

Comparando con la segunda ec. (45) vemos que

$$C'(Q) = 0. \tag{49}$$

Podemos elegir entonces la alternativa más cómoda: $C(Q) = 0$. Con esto resulta

$$F_1(q, Q) = q \arcsin qe^Q + \sqrt{e^{-2Q} - q^2}. \tag{50}$$

Encontrada una función generatriz, afirmamos que la transformación es canónica.

Si nuestra intención hubiera sido encontrar una función generatriz de tipo $F_2(q, P)$, debiéramos haber escrito las ecuaciones de transformación en términos de las variables independientes q y P. Recordemos que las ecuaciones de transformación eran

$$Q(q,p) = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right), \qquad P(q,p) = q\cot p. \tag{51}$$

A partir de la segunda ecuación es inmediato escribir $p(q,P)$,

$$p(q,P) = \arctan\frac{q}{P}. \tag{52}$$

Por otro lado, mediante la identidad

$$\sin p = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 p}}, \tag{53}$$

la segunda ec. (51) da

$$\sin p = \frac{q}{\sqrt{q^2+P^2}}, \tag{54}$$

y al reemplazar en la primera ec. (51) resulta

$$Q(q,P) = -\log\sqrt{q^2+P^2}. \tag{55}$$

Una función generatriz de tipo F_2 satisface las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} = p(q,P), \qquad \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial Q} = Q(q,P). \tag{56}$$

Luego, para la función que estamos buscando debe ser

$$\frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} = \arctan\frac{q}{P}, \qquad \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P} = -\log\sqrt{q^2+P^2}. \tag{57}$$

Integremos la primera ecuación. La primitiva de la función $\arctan x$ puede obtenerse rápidamente integrando por partes,

$$\int dx\ \arctan x = x\arctan x - \log\sqrt{1+x^2}. \tag{58}$$

Así,

$$\begin{aligned} F_2(q,P) &= \int dq\ \arctan\frac{q}{P} + C(P) = P\left[\frac{q}{P}\arctan\frac{q}{P} - \log\frac{\sqrt{q^2+P^2}}{P}\right] + C(P) \\ &= q\arctan\frac{q}{P} - P\log\frac{\sqrt{q^2+P^2}}{P} + C(P). \end{aligned} \tag{59}$$

En esta expresión podemos absorber el término $P \log P$ dentro de la *constante*, por lo que es preferible escribir (conservando el mismo nombre C)

$$F_2(q, P) = q \arctan \frac{q}{P} - P \log \sqrt{q^2 + P^2} + C(P). \tag{60}$$

Para hallar $C(P)$ debemos calcular la derivada de esta función respecto de P e igualarla a la segunda ec. (57). La derivada respecto de P es

$$-\frac{q^2}{q^2 + P^2} - \log \sqrt{q^2 + P^2} - \frac{P^2}{q^2 + P^2} + C'(P) = -\log \sqrt{q^2 + P^2} - 1 + C'(P). \tag{61}$$

Entonces, comparando con la segunda ec. (57) vemos que $C'(P) = 1$. Un elección cómoda es

$$C(P) = P, \tag{62}$$

con lo que finalmente resulta

$$F_2(q, P) = q \arctan \frac{q}{P} - P \log \sqrt{q^2 + P^2} + P. \tag{63}$$

Para verificar este resultado podemos obtenerlo por otros medios, por ejemplo a través de la función F_1 que calculamos en primera instancia. Cuando ambas funciones F_1 y F_2 existen, están relacionadas, salvo términos constantes, por

$$F_2 = F_1 + PQ. \tag{64}$$

Para que este resultado sea de alguna utilidad, debemos escribir todas las funciones en el segundo miembro en términos de q y P, que son las variables de las que depende la función F_2,

$$F_1 + PQ = F_1\Big(q, Q(q, P)\Big) + PQ(q, P). \tag{65}$$

La ec. (55) nos da $Q(q, P)$,

$$Q(q, P) = -\log \sqrt{q^2 + P^2}. \tag{66}$$

Lo que nos falta calcular es

$$F_1\Big(q, Q(q, P)\Big). \tag{67}$$

En la ec. (50) habíamos encontrado que

$$F_1(q, Q) = q \arcsin q e^Q + \sqrt{e^{-2Q} - q^2}. \tag{68}$$

Luego,

$$F_1\Big(q, Q(q,P)\Big) = q \arcsin \frac{q}{\sqrt{q^2+P^2}} + P = q \arctan \frac{q}{P} + P. \tag{69}$$

Así,

$$F_1\Big(q, Q(q,P)\Big) + PQ(q,P) = q \arctan \frac{q}{P} + P - P \log \sqrt{q^2+P^2}, \tag{70}$$

que coincide con el resultado (63).

Queda como ejercicio encontrar la función F_3, que en este problema es la más sencilla de todas, y la F_4, que también es muy simple. Los resultados a los que deberían llegar son

$$F_3(p,Q) = e^{-Q} \cos p, \qquad F_4(p,P) = P + P \log \frac{\cos p}{P}. \tag{71}$$

Sería conveniente que llegaran a estos resultados por dos caminos: i) integrando directamente las ecuaciones diferenciales que definen cada F, ii) a partir de las funciones F_1 o F_2, mediante la suma de productos adecuados de las variables q, p, Q y P.

La transformación aplicada a un sistema físico

El enunciado del problema, sin gran rigor lógico, dice que se trata de un oscilador armónico. A los fines de encontrar las funciones generatrices, en nada importa de qué sistema se trate. Una de las propiedades más importantes de las transformaciones canónicas es que pueden aplicarse a cualquier sistema. En ningún momento de la deducción necesitamos saber que el sistema al que se le iba a aplicar la transformación era un oscilador armónico. Pero, en fin, el oscilador armónico está y su hamiltoniano es

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \tag{72}$$

La pregunta natural es: ¿cuál es el hamiltoniano en el nuevo sistema de coordenadas?

La relación entre el hamiltoniano original y el de las coordenadas transformadas siempre se expresa igual

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{73}$$

La dificultad en escribir por extenso este tipo de expresiones es que cada término tiene distintas variables naturales. Quisiéramos calcular $\bar{H}(Q,P)$, pero conocemos H como función de q y p, y F como función de un par mixto de variables. La parte que toca a la función F en la expresión (73) es trivial en este ejemplo, porque las funciones generatrices que encontramos no dependen explícitamente del tiempo.

Todo el trabajo está en escribir H en términos de Q y P; es decir,

$$\bar{H}(Q, P) = H\Big(q(Q, P), p(Q, P)\Big). \tag{74}$$

Recordemos que el par de ecuaciones de transformación es

$$Q(q, p) = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right), \qquad P(q, p) = q \cot p. \tag{75}$$

Necesitamos invertir estas ecuaciones. Tomando la exponencial de la primera y multiplicándola por la segunda, resulta

$$Pe^{Q} = \cos p. \tag{76}$$

Entonces,

$$p(Q, P) = \arccos Pe^{Q}. \tag{77}$$

La primera ec. (75) implica entonces

$$q(Q, P) = e^{-Q} \sin p(Q, P) = e^{-Q} \sin\big(\arccos Pe^{Q}\big). \tag{78}$$

El seno de un arcocoseno es fácil de calcular, escribiendo $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. En definitiva,

$$q(Q, P) = \sqrt{e^{-2Q} - P^2}. \tag{79}$$

Luego, todo lo que hay que hacer es utilizar las ecs. (77) y (79) en la expresión (72):

$$\bar{H}(Q, P) = \frac{1}{2m}\left(\arccos Pe^{Q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(e^{-2Q} - P^2\right). \tag{80}$$

No parece probable que esto conduzca a ninguna simplificación respecto del hamiltoniano y las coordenadas originales.

■ **Ejercicio:** a) Encontrar al menos 5 libros que incluyan la transformación de este ejemplo entre los problemas de final de capítulo. b) Encontrar al menos un libro en donde esta transformación sea aplicada con algún provecho.

La primera parte del ejercicio es sencilla. De la última no sé de ninguna respuesta cierta, y agradecería que me remitieran algún ejemplo. Esto pone en evidencia lo siguiente: no es trivial encontrar transformaciones canónicas que partan de las propias ecuaciones de transformación, $Q(q, p)$ y $P(q, p)$, y no de una función generatriz. Cuando uno encuentra tal transformación tampoco sabe, en principio, para qué le puede ser útil, salvo como ejercicio de fin de capítulo.

Ejemplo de una transformación útil

(Goldstein, 2da. ed., problema 9-18). El hamiltoniano de un sistema es

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 q^4 + \frac{1}{q^2}\right). \tag{81}$$

a) Hallar la ecuación de movimiento para q.

b) Hallar una transformación canónica que reduzca H a la forma de un oscilador armónico. Demostrar que, para las variables transformadas, la solución es tal que se cumple la ecuación de movimiento hallada en el apartado (a).

Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas canónicas originales son

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} = pq^4, \tag{82}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} = \frac{1}{q^3} - 2p^2q^3. \tag{83}$$

Una ecuación de movimiento que sólo involucre a q se obtiene derivando la primera ecuación y escribiendo p y $\dot{p}$ en términos de q y $\dot{q}$:

$$\begin{aligned}\ddot{q} &= \dot{p}q^4 + \frac{4\dot{q}^2}{q} = q - 2p^2q^7 + \frac{4\dot{q}^2}{q} \\ &= q + \frac{2\dot{q}^2}{q}.\end{aligned} \tag{84}$$

Es una ecuación no lineal y no parece haber ninguna solución obvia.

Ahora es cuando intentamos introducir una transformación canónica que transforme el hamiltoniano original en uno cuyas ecuaciones de movimiento sepamos resolver.

El enunciado pide encontrar una transformación tal que el nuevo hamiltoniano sea el del oscilador armónico. Teniendo en cuenta que

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 q^4 + \frac{1}{q^2}\right). \tag{85}$$

Una forma de conseguir eso es que sean

$$P = pq^2, \tag{86}$$

$$Q = \frac{1}{q}. \tag{87}$$

No está dicho que esta transformación sea canónica. Debemos encontrar una función generatriz que la lleve a cabo. Probemos con una de tipo $F_2(q, P)$. Hay que escribir primero las ecuaciones de transformación usando q y P como variables independientes:

$$p(q, P) = \frac{P}{q^2}, \tag{88}$$

$$Q(q, P) = \frac{1}{q}. \tag{89}$$

La función generatriz debe satisfacer las ecuaciones

$$\frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} = p(q, P), \qquad \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P} = Q(q, P), \tag{90}$$

lo que en nuestro caso implica

$$\frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} = \frac{P}{q^2}, \qquad \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P} = \frac{1}{q}. \tag{91}$$

La segunda ecuación da

$$F_2(q, P) = \frac{P}{q} + C(q). \tag{92}$$

Esta ecuación nos conduce a

$$\frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} = -\frac{P}{q^2} + C'(q). \tag{93}$$

Comparando con la primera ec. (91), vemos que hay un signo de diferencia. Podemos remediar esto si reemplazamos la ec. (88) por esta otra

$$p(q, P) = -\frac{P}{q^2}. \tag{94}$$

Ahora sí, basta con tomar $C(q) = 0$ en la ec. (93) y la función generatriz es entonces

$$F_2(q, P) = \frac{P}{q}. \tag{95}$$

Por construcción, el nuevo hamiltoniano es

$$\bar{H}(Q, P) = H\Big(q(Q, P), p(Q, P)\Big) = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2). \tag{96}$$

La dinámica de las coordenadas Q y P es trivial. Salvo por una constante de integración que podemos absorber redefiniendo el origen del tiempo, tenemos

$$Q(t) = A\cos t, \tag{97}$$

$$P(t) = -A\sin t. \tag{98}$$

De acuerdo a la ec. (89) esto significa que

$$q(t) = \frac{1}{A\cos t}. \tag{99}$$

Verifiquemos que esta función es en verdad solución de la ec. (84),

$$\ddot{q} - \frac{2\dot{q}^2}{q} - q = 0. \tag{100}$$

Por un lado,

$$\dot{q}(t) = \frac{\sin t}{A\cos^2 t}, \tag{101}$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{A\cos t} + \frac{2\sin^2 t}{A\cos^3 t}. \tag{102}$$

Luego,

$$\frac{2\dot{q}(t)^2}{q(t)} + q(t) = \frac{2\sin^2 t}{A\cos^3 t} + \frac{1}{A\cos t}, \tag{103}$$

que es, en efecto, igual a $\ddot{q}(t)$. Hemos aprendido que una solución de la ecuación (100) es $1/\cos t$. Como no hay nada de especial en la elección de la fase, otra solución sería $1/\sin t$.

Uno puede estar tentado de aplicar este método a otros hamiltonianos de forma parecida. Recordemos que el hamiltoniano original en este problema era

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 q^4 + \frac{1}{q^2}\right). \tag{104}$$

¿Podríamos, por ejemplo, utilizar la misma estrategia en este otro hamiltoniano?:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 q^2 + \frac{1}{q^2}\right). \tag{105}$$

Igual que antes, proponemos una transformación que convierta a este hamiltoniano en el del oscilador armónico, eligiendo

$$P = pq, \qquad Q = \frac{1}{q}. \tag{106}$$

Ahora buscamos una $F_2(q, P)$ que realice esta transformación. Para eso reescribimos las ecuaciones de transformación tomando q y P como variables independientes:

$$p(q, P) = \frac{P}{q}, \qquad Q(q, P) = \frac{1}{q}. \tag{107}$$

La función generatriz debe satisfacer las ecuaciones

$$\frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} = p(q, P), \qquad \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P} = Q(q, P), \tag{108}$$

lo que en nuestro caso implica

$$\frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} = \frac{P}{q}, \qquad \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P} = \frac{1}{q}. \tag{109}$$

Se ve que esto no va a funcionar. Si integramos la primera ecuación obtenemos

$$F_2(q, P) = P \log q + C(P). \tag{110}$$

Derivando con respecto a P y comparando con la segunda ec. (109) debería ser

$$\log q + C'(P) = \frac{1}{q}, \tag{111}$$

lo que evidentemente es imposible. Vemos entonces que para este segundo hamiltoniano la transformación que estamos proponiendo no es canónica. Esto no quiere decir que no exista una transformación canónica que lleve a este hamiltoniano a la forma del hamiltoniano de un oscilador armónico. La transformación en verdad existe, pero no tiene la forma tan sencilla que estamos proponiendo.

¿Por qué la estrategia funcionó con el primer hamiltoniano y no con el segundo? La clave está en las condiciones de integrabilidad. Una vez propuestas las transformaciones, el problema de encontrar la función generatriz es equivalente al de encontrar una función a partir de su gradiente:

$$\frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q} = p(q, P), \qquad \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P} = Q(q, P). \tag{112}$$

La condición necesaria y suficiente para que exista F_2 es la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2 F_2(q, P)}{\partial P \partial q} = \frac{\partial^2 F_2(q, P)}{\partial q \partial P}. \tag{113}$$

En términos de las ecuaciones de transformación esto implica

$$\frac{\partial p(q,P)}{\partial P} = \frac{\partial Q(q,P)}{\partial q}. \tag{114}$$

En el caso del primer hamiltoniano, habíamos propuesto

$$p(q,P) = -\frac{P}{q^2}, \tag{115}$$

$$Q(q,P) = \frac{1}{q}. \tag{116}$$

Aquí evidentemente es cierta la igualdad entre las derivadas cruzadas. Pero en el caso del segundo hamiltoniano la transformación propuesta tenía la forma

$$p(q,P) = \frac{P}{q}, \tag{117}$$

$$Q(q,P) = \frac{1}{q}, \tag{118}$$

y las derivadas cruzadas no son iguales: falla la condición de integrabilidad. Esto quiere decir que el primer hamiltoniano fue elegido con el debido cuidado para que el ejercicio pudiera llevarse a cabo.