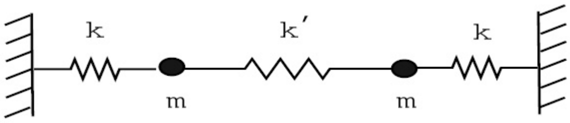
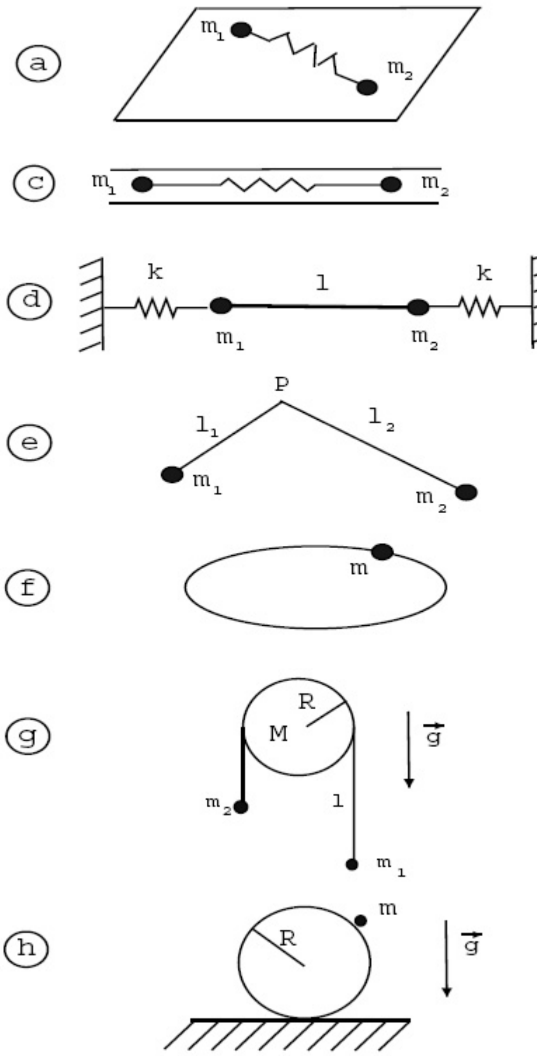
Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2020

Guía 1: *Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.*

Problema 1: Se tiene el sistema de la figura, donde x_1, x_2 se miden a partir de las posiciones de equilibrio. Sea $q_1 = x_1 + x_2$ y $q_2 = x_1 - x_2$.
a) ¿Definen (q_1, q_2) un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?.
b) Si $q_1 = 0$, describa cualitativamente el movimiento de cada partícula. Idem si $q_2 = 0$.
c) Calcular las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2.



Problema 2: Para los casos siguientes. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?. Proponga conjuntos de coordenadas generalizadas adecuadas:



a) m_1 y m_2 se mueven en el plano de la mesa.

b) Idem, pero la mesa rota con $\omega = $ cte..

c) m_1 y m_2 se hallan dentro de un tubo. Si q_1 y q_2 se miden a partir del centro de masa, ¿son coordenadas apropiadas?.

d) Las dos masas se hallan unidas entre sí por una barra rígida. Analice el caso en que *sólo* pueden moverse horizontalmente y también el caso bidimensional.

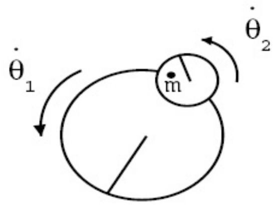
e) Discuta los casos P fijo y P móvil.

f) Una masa enhebrada en un alambre elíptico.

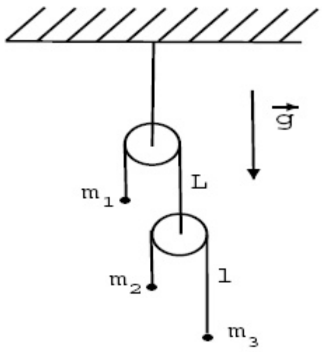
g) Una máquina de Atwood. Analice los casos en que la cuerda desliza y no desliza sobre la polea.

h) Una partícula puntual que cae por una esfera, *con* gravedad.

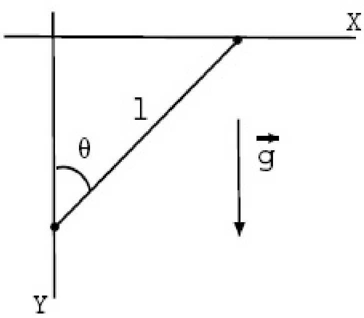
Problema 3: D_1 y D_2 son dos plataformas rotantes como se muestra en la figura. D_1 se mueve respecto a la tierra con velocidad $\dot{\theta}_1$. D_2 se mueve respecto a D_1 con velocidad $\dot{\theta}_2$. Una partícula de masa m se mueve libremente sobre D_2. Escriba el lagrangiano del sistema en términos de coordenadas polares ρ, φ, de un sistema cartesiano fijo a D_2. Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula e interprete.



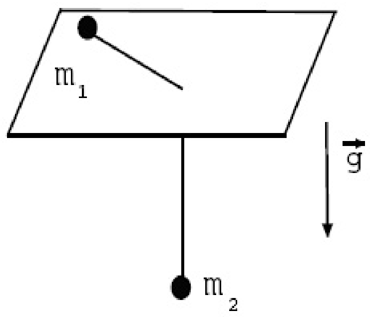
Problema 4: Se tiene el sistema de la figura. Hallar la aceleración de cada masa utilizando:
a) Las ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas.
b) El principio de los trabajos virtuales (PTV).
c) Las ecuaciones de Lagrange.
d*) Repita a y b, pero ahora considerando que las poleas tienen masa M y radio R.



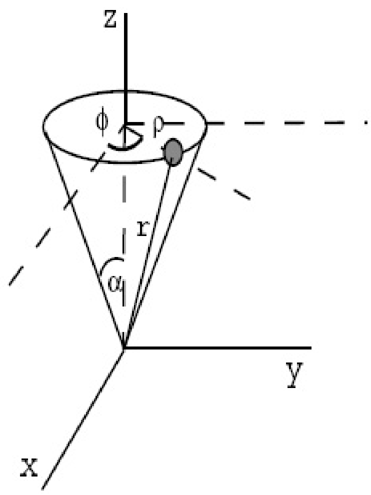
Problema 5: Dos partículas de masa m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible de longitud l; m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el y. Las condiciones iniciales son las que indica la figura.
a) Halle la ecuación de movimiento para θ utilizando el PTV.
b) Halle la ecuación de Lagrage para θ.
c) Si $m_1 = m_2 \equiv m$, halle la tensión T en el hilo como función de θ.
d) ¿Cuál es el período de movimiento de θ en este caso?. Suponga que θ sólo puede tomar valores pequeños.



Problema 6: Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por un hilo inextensible como indica la figura. m_1 se mueve en el plano de la mesa y m_2 sólo verticalmente. En $t = 0$, m_1 se encuentra a una distancia r_0 del orificio y se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.
a) Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.
b) Halle la tensión del hilo.
c) Repita a) y b) suponiendo ahora que el movimiento de m_2 es bidimensional.

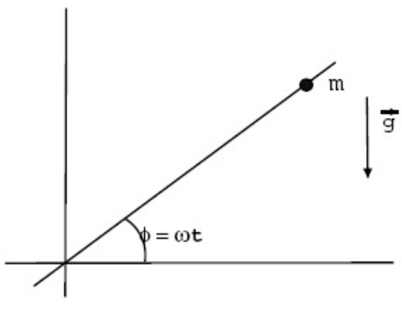


Problema 7: Bajo la acción de la gravedad, una partícula de masa m se desliza por una superficie cónica $\rho = z\,\mathrm{tg}\alpha$, sin rozamiento.
a) Halle las ecuaciones de movimiento de la partícula utilizando como coordenadas generalizadas el ángulo θ medido en el plano perpendicular al eje del cono y la distancia r al vértice del mismo, tomada a lo largo del cono.
b) Hallar r *máximo* y r *mínimo* para el caso en que $\alpha = 30°$ y las condiciones iniciales sean $r(0) = a$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\theta}^2(0) = 4\sqrt{3}g/a$.
c) Halle el potencial efectivo unidimensional equivalente. Muestre que las órbitas circulares son posibles y halle la velocidad de la partícula en tales órbitas.
d) Suponiendo la partícula en movimiento circular, halle la constante del oscilador y el período de oscilación para pequeñas perturbaciones de este movimiento. Compare este período con el de revolución para hacer una descripción cualitativa del movimiento perturbado.

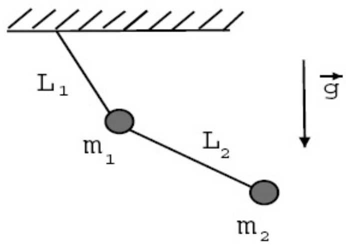


Problema 8: Analizar los siguientes puntos:
a) Dado un sistema constituído por N partículas, ¿cuál es el número de grados de libertad del mismo y cuál el de ecuaciones de vínculo?
b) ¿Se puede utilizar una velocidad como coordenada generalizada?
c) ¿Las fuerzas generalizadas se aplican sobre cada partícula?
d) El número de grados de libertad de un sistema, ¿es independiente del sistema de referencia utilizado para describir el movimiento?.
e) Para estudiar el equilibrio de un sistema, ¿es siempre válido utilizar el *principio de los trabajos virtuales*?.
f) ¿Es válida la formulación lagrangiana para un potencial dependiente de la velocidad? ¿y para el campo electromagnético?.
g) Dé un ejemplo en que un desplazamiento virtual difiera de uno real. ¿En qué casos son iguales?.
h) Las ecuaciones de vínculo para un sistema físico, ¿dependen del sistema de referencia utilizado?, ¿y las fuerzas de vínculo?.
i) Para calcular las fuerzas de vínculo de un sistema, ¿qué métodos es posible emplear?.
j) ¿Siempre se pueden escribir las ecuaciones de Newton desde el centro de masa de un sistema?.
k) Para un sistema de N partículas, ¿cuántas ecuaciones de Newton se necesitan? ¿y de Lagrange?.
l) ¿Qué se entiende por un sistema inercial? ¿Serán correctas las ecuaciones de movimiento si se escribe el lagrangiano desde un sistema no inercial?
m) Para una carga en un campo electromagnético, ¿se puede conservar el impulso lineal de la misma? ¿Qué magnitud se conserva?.

Problema 9: Sea el sistema de la figura.
a) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando el método de Lagrange.
b) Para el caso $\mathbf{g} = 0$, integre las ecuaciones para condiciones iniciales $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$.
c) Discuta el caso en que φ varía libremente.

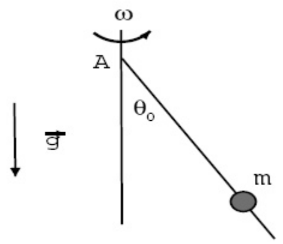


Problema 10: Considere el sistema de la figura.



a) Encuentre las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble que oscila en un plano.
b) Halle una expresión aproximada de las mismas para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
c) Resuelva las ecuaciones proponiendo una solución de tipo armónico para los grados de libertad. En $t = 0$ ambas masas se hallan en reposo sobre la vertical y a la inferior se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.
d) Halle las tensiones sobre los hilos.

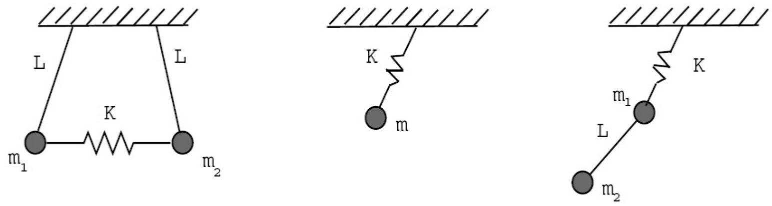
Problema 11: Una partícula de masa m se desliza sin fricción por un alambre fijo en el punto A, que forma un ángulo θ_0 con un eje vertical y que se encuentra rotando alrededor del mismo eje con velocidad angular constante ω.
a) Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange.
b) Halle $r(t)$ sabiendo que a $t = 0$, $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$.



Problema 12: Considere el péndulo en tres dimensiones –péndulo esférico–.
a) Encuentre las ecuaciones de Lagrange para el mismo.
b) A partir de las ecuaciones de Lagrange halle las constantes de movimiento.
c) Discuta cualitativamente el movimiento de este péndulo.

Problema 13: Escriba el lagrangiano de un péndulo plano donde el punto de suspensión:
a) se desplaza uniformemente por un círculo vertical de radio a con frecuencia ω,
b) efectúa oscilaciones verticales de la forma $a\cos(\omega t)$,
c) efectúa oscilaciones horizontales de la forma $a\cos(\omega t)$.

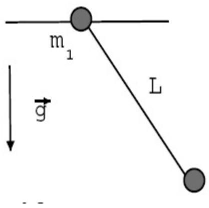
Problema 14: Encuentre el lagrangiano de los sistemas de la figura. Existe gravedad.



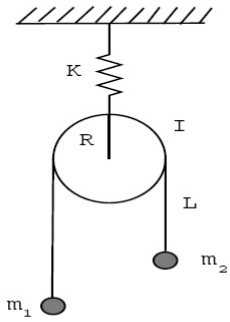
Problema 15*: Sea una partícula libre de masa m y carga q en un campo electromagnético con potenciales ϕ y $\vec{A}$, (luego $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - c^{-1}\partial\vec{A}/\partial t$; $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$).
a) Obtenga a partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ –donde U es un potencial generalizado dependiente de la velocidad– las ecuaciones de movimiento.
b) Muestre que la fuerza aplicada sobre la partícula es la de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + c^{-1}\vec{v} \times \vec{B})$, $U = q\phi - qc^{-1}\vec{v} \cdot \vec{A}$.

Problema 16*: Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, dos sistemas de referencia cartesianos bidimensionales. Suponga que el origen de coordenadas O se mueve con $\vec{v} = cte$ respecto a x_1, y_1 y que los ejes x_2, y_2 rotan con velocidad angular constante. Hallar explícitamente las ecuaciones de transformación: $x_1 = x_1(x_2, y_2, t)$ y $y_1 = y_1(x_2, y_2, t)$.

Problema 17: Encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: un péndulo simple de masa m_2, con una masa m_1 en el punto sostén, la cual puede moverse sobre una línea horizontal contenida en el plano de movimiento de m_2. Resuelva las ecuaciones de movimiento y halle la frecuencia de oscilación del sistema para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio estable. Suponga condiciones iniciales adecuadas.



Problema 18*: Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del siguiente sistema: una máquina de Atwood con una cuerda de largo L, una polea con momento de inercia I y que rueda sin deslizar con la cuerda.



Problema 19*: Sea una partícula de masa m y carga q inmersa en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$.
a) Si $\vec{A} = Bx\hat{y}$ –compruebe que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$–, encuentre las ecuaciones de movimiento y muestre que las órbitas son espirales cilíndricas. Calcule el radio y el centro de la circunferencia transversal a dicha espiral. Las condiciones iniciales son $\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.
b) Repita el punto a) pero ahora para el potencial vector $\vec{A}' = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$.
c) Calcule la función ψ que da el cambio de medida –cambio de *gauge*– $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$.
d) Si $\vec{v}(0) = 0$, interprete físicamente la solución hallada en a).

Problema 20: Sea un oscilador isótropo bidimensional ($k_x = k_y \equiv k$).
a) Escriba el lagrangiano del sistema y halle las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = y$.
b) Sea $\mathcal{L}^* = m\dot{x}\dot{y} - kxy$. Halle las ecuaciones de movimiento para este sistema. Compare con las obtenidas en a).