

## Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2020

### Guía 4: Fuerzas Centrales. Choque y dispersión.

**Problema 1:** Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias. El período del movimiento es  $\tau$ . Este movimiento es detenido súbitamente. Luego se las suelta y caen una hacia la otra. Discuta por qué. Demuestre que chocan después de un tiempo  $t = \tau/4\sqrt{2}$ .

**Problema 2:** El potencial de un oscilador isótropo es  $V = (1/2)kr^2$ .

- Dibuje el potencial efectivo para un caso general.
- Discuta los movimientos posibles en función del valor del momento angular y las condiciones iniciales.
- Encuentre el período para el caso en que la órbita es circular.
- Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la circular.

**Problema 3:** Estudie el movimiento de una partícula en un campo central  $F(r) = -k/r^2 + c/r^3$ .

- Muestre que la ecuación de la órbita puede escribirse de la forma  $r = a(1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon \cos \alpha\varphi)$  que es una elipse cuando  $\alpha = 1$ .
- Cuando  $\alpha > 1$ , es una elipse que precede. El movimiento de precesión puede describirse en términos de la velocidad de precesión del perihelio. Encuentre una expresión para la velocidad de precesión en términos de  $\alpha$ .

*Ayuda:* Observe que el problema se reduce al de Kepler, si se redefinen el momento y la variable angular apropiadamente. Por lo tanto *no* es necesario calcular nuevamente la órbita, si ya resolvió el problema de Kepler –¿lo resolvió?.

**Problema 4:** Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la acción de un potencial central  $V(r) = k/r^2$ .

- Hallar la ecuación de la trayectoria de la partícula como función de constantes de movimiento para el caso en que el potencial sea repulsivo y  $E > 0$ . Interpretar el movimiento bidimensional  $(\theta, r)$  en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. Calcular las direcciones de las asíntotas si las hubiere. ¿Qué ocurre cuando  $k = 0$ ? Verificar que en el límite  $k \rightarrow 0$ , la solución hallada es la físicamente correcta.
- Suponer ahora que el potencial es atractivo. ¿Qué ocurre cuando  $l^2 > -2mk$ ? Suponer que  $l^2 < -2mk$ ,  $E < 0$ . Interpretar el movimiento bidimensional en términos del problema unidimensional equivalente. Dibujar la trayectoria. ¿Qué pasa con  $\dot{\theta}$ ? (no se pide calcular la trayectoria). Calcular el tiempo que tarda la partícula en llegar al origen si partió de un punto de retorno.

*Ayuda:*

$$\int \frac{du}{\sqrt{a - bu^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsen \left( \sqrt{\frac{b}{a}} u \right), & \text{si } a > 0, b > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-b}} \operatorname{argsenh} \left( \sqrt{\frac{-b}{a}} u \right), & \text{si } a > 0, b < 0 \end{cases}$$

Para calcular la trayectoria, suponer  $r_0$  un punto de retorno y  $\theta_0 = 0$ . Considere además la ayuda del problema anterior.

**Problema 5:** Considere una partícula de masa  $m$  que se mueve en el espacio bajo la acción de un campo de fuerzas radial  $F(r) = -kr + c/r^3$ , siendo  $r$  la distancia al origen de coordenadas.

- Escriba el lagrangiano y las constantes de movimiento en función de las coordenadas generalizadas elegidas.
- Halle la ecuación de la órbita ( $r = r(\theta)$ ).
- Grafique cualitativamente la trayectoria de la partícula para  $c = 0$  y  $c \neq 0$ .
- Discuta en qué casos la órbita no será cerrada y calcule la velocidad angular de precesión.

**Problema 6:** Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas por una esfera perfectamente rígida de diámetro  $a$ .

**Problema 7:** Calcule la sección eficaz de dispersión de partículas de masa  $m$ , en un pozo de potencial esféricamente simétrico con  $V = 0$  para  $r \geq a/2$  y  $V = -V_0$  para  $r < a/2$ .

**Problema 8:** Considere una esfera rígida que absorbe las partículas de un haz incidente sobre ella con una probabilidad proporcional a la componente normal de la velocidad  $v_n$  (componente de la velocidad  $v$  que es normal a la superficie de la esfera). Las partículas no absorbidas rebotan elásticamente.

- Hallar la sección eficaz diferencial.
- Obtener la sección eficaz total. Justificar.

**Problema 9:** Se hace incidir un haz uniforme de partículas sobre un paraboloide de revolución perfectamente rígido, en forma paralela al eje de simetría del cuerpo.

- Calcular la sección eficaz diferencial de *scattering*.
- A partir de a) calcular, explícitamente, la sección eficaz total de *scattering*.

**Problema 10:** Se hace incidir un haz uniforme de partículas sobre un cono perfectamente rígido, en forma paralela al eje de simetría del cuerpo.

- Calcular la sección eficaz diferencial de *scattering*.
- ¿Puede obtener la sección eficaz total de *scattering*? Justificar.

**Problema 11:** En el ciclotrón de la CNEA se aceleran partículas  $\alpha$  a una energía de 55 MeV. Se obtiene un haz interno de 0,5 nanoamperes de intensidad que se hace incidir sobre un blanco de oro de 0,5 miligramos de oro/cm<sup>2</sup> de espesor. A 20 cm de blanco y formando un ángulo de 5 grados con la dirección del haz incidente se coloca un detector de estado sólido que cuenta todas las partículas que pasan por un orificio circular de 1 mm de diámetro. ¿Cuántas partículas se espera contar por segundo por efecto de la dispersión Coulombiana?. Si el radio del núcleo constituido por  $A$  nucleones es  $R \sim 1.2A^{1/3}$  fermi, ¿podrán observarse efectos nucleares?. ¿Cómo se manifestarán dichos efectos?.

*Datos:* 1 MeV =  $1,60 \times 10^{-6}$  ergios; 1 fermi =  $10^{-13}$  cm; oro: Au<sub>79</sub><sup>197</sup>; partícula  $\alpha$ : He<sub>2</sub><sup>4</sup>; masa de nucleón:  $1,67 \times 10^{-24}$  g;  $N_a$  = número de Avogadro =  $6.02 \times 10^{23}$  g mol<sup>-1</sup>;  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  coulombs;  $e^2 = 1.43 \times 10^{-13}$  MeV cm.