Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2020

Guía 6: *Cinemática y dinámica del cuerpo rígido, ángulos de Euler, ecuaciones de Euler.*

Problema 1: Analizar los siguientes puntos.
a) Mostrar que la velocidad angular de rotación de un sistema de coordenadas ligado al cuerpo es independiente del sistema elegido.
b) Ver que si en un sistema de coordenadas o (fijo al cuerpo), $\mathbf{v}_o$ y $\mathbf{\Omega}$ son perpendiculares, en el sistema o' (fijo al cuerpo), $\mathbf{v}'_o$ y $\mathbf{\Omega}$ resultan perpendiculares.
c) Mostrar, en el caso anterior, que las velocidades de todos los puntos del cuerpo rígido son perpendiculares a $\mathbf{\Omega}$.
d) Mostrar que si $\mathbf{v}_o$ y $\mathbf{\Omega}$ son perpendiculares, entonces, siempre es posible encontrar un origen o' cuya velocidad $\mathbf{v}'_o$ sea nula.
e) Ver que todos los puntos ubicados sobre una recta que pasa por o' y es paralela a $\mathbf{\Omega}$, tienen velocidad nula (este es el famoso eje instantáneo de rotación).
f) Mostrar que si $\mathbf{v}_o$ y $\mathbf{\Omega}$ no son perpendiculares, entonces puede elegirse un sistema de coordenadas en el cual $\mathbf{v}'_o$ y $\mathbf{\Omega}$ son paralelos.
g) Mostrar que si $\mathbf{v}_o$ es paralelo a $\mathbf{\Omega}$, entonces, nunca puede encontrarse un sistema de coordenadas en el cual $\mathbf{v}'_o$ sea nulo ni perpendicular a $\mathbf{\Omega}$.
h) Dado el campo de velocidades para un cuerpo rígido: $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_o + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{op}$. Demostrar que:

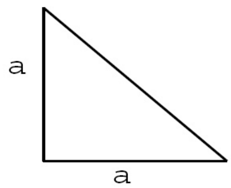
$$\mathbf{r}_{op} = \frac{1}{\Omega^2}(\mathbf{v}_p \wedge \mathbf{\Omega} - \mathbf{v}_o \wedge \mathbf{\Omega} + (\mathbf{r}_{op} \cdot \mathbf{\Omega})\mathbf{\Omega})$$

i) Ver que con la fórmula anterior si $\mathbf{r}_{op}$ es perpendicular a $\mathbf{\Omega}$ puede despejarse fácilmente $\mathbf{r}_{op}$.
j) Calcular la distancia del centro de masa al eje instantáneo de rotación.
k) ¿Puede estar fuera del cuerpo rígido el eje instantáneo de rotación?
l) ¿En qué casos la energía cinética puede desacoplarse en un término de rotación más otro de traslación?
m) ¿Qué relación satisfacen los momentos principales de inercia cuando se tiene un sistema de partículas coplanares?
n) Verificar que los momentos principales de inercia satisfacen la siguiente relación:
$I_1 + I_2 \geq I_3$.
o) Demostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría, entonces, el centro de masa está contenido en dicho eje y además es un eje principal de inercia.
p) Verificar que si un cuerpo tiene un plano de simetría, entonces, el centro de masa está en dicho plano que contiene a dos de los ejes principales de inercia, mientras que el tercero es perpendicular al plano.
q) Mostrar que en un sistema colineal de partículas los momentos principales de inercia satisfacen que $I_1 = I_2$ y que $I_3 = 0$, donde el eje x_3 coincide con la línea de las partículas.
r) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría de orden mayor que 2, hay degeneración en el plano perpendicular al eje.
s) Mostrar que cuando el tensor de inercia es totalmente degenerado, sus momentos principales de inercia son invariantes frente a cualquier rotación.

t) Escribir las condiciones de vínculo en cada uno de los siguientes casos:

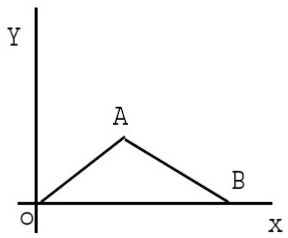
- Esfera rodando sin deslizar sobre un plano.
- Ídem para una moneda.
- Esfera rodando sin deslizar sobre una esfera que puede rodar libremente.

Problema 2: Hallar el centro de masa y calcular el tensor de inercia respecto del mismo, para el cuerpo plano de la figura (su densidad es ρ). Hallar los ejes principales de inercia y expresar el tensor de inercia en dichos ejes.



Problema 3: Determinar los ejes principales de inercia y calcular el tensor de inercia respecto del centro de masa para los siguientes sistemas:
a) Cono circular recto de altura h y radio de la base r.
b) Anillo plano circular de radios r_1 y r_2.
c) Esfera de radio r.
d) Cubo de lado a.

Problema 4: Halle la energía cinética de:
a) OA y AB son dos varillas delgadas homogéneas de longitud l unidas por una bisagra en A (ver figura). OA gira en el plano de la figura alrededor de O y el punto B se desliza a lo largo del eje x.
b) Un cilindro homogéneo de radio a que rueda dentro de una superficie cilíndrica de radio R.
c) Un cono homogéneo rodando en un plano.
d) Un cono homogéneo cuya base rueda en un plano y cuyo vértice está fijo a una altura sobre el plano, igual al radio de la base, de manera que el eje del cono permanezca paralelo al plano.



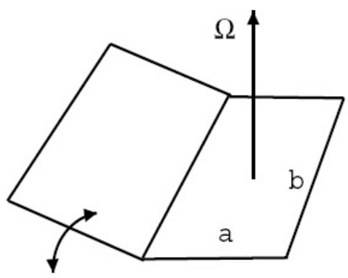
Problema 5: Muestre que las componentes de la velocidad angular, respecto de un sistema espacial de ejes, están dadas en función de los ángulos de Euler por:

$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\theta} cos(\phi) + \dot{\psi} sen(\theta) sen(\phi) \\
\omega_y &= \dot{\theta} sen(\phi) - \dot{\psi} sen(\theta) cos(\phi) \\
\omega_z &= \dot{\psi} cos(\theta) + \dot{\phi}
\end{aligned}
$$

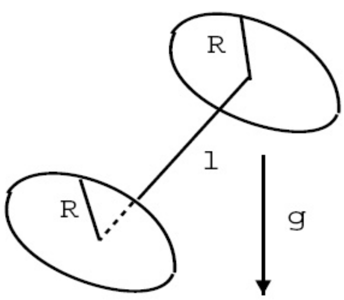
Problema 6: Un automóvil parte del reposo con una de sus puertas totalmente abierta (a 90°). Cuando el automóvil acelera, la puerta se cierra. Calcular el tiempo necesario para que se cierre totalmente si la aceleración es constante y el centro de masa está a una distancia d de las bisagras. Estime numéricamente el valor del tiempo utilizando valores realistas de los distintos parámetros.

Problema 7*: Un cilindro semicircular uniforme de masa m y radio a está apoyado sobre un plano horizontal. Escriba las ecuaciones diferenciales para pequeños desplazamientos alrededor de esa posición.

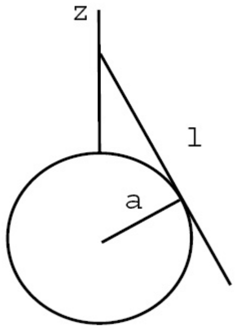
Problema 8: Se tienen dos placas de lados a y b cuyo espesor es despreciable. Una de ellas está fija por su centro de masa a un eje que gira con velocidad angular $\Omega =$ cte.. La otra placa está unida a la anterior por una bisagra ideal que le permite moverse como se indica en la figura. Determinar:
a) El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en ausencia de gravedad.
b) ¿Existe algún punto de equilibrio estable?
c) El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento con gravedad.
d) ¿Existe ahora algún punto de equilibrio estable?



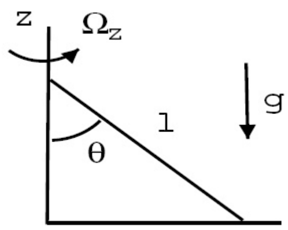
Problema 9: Se tienen dos volantes de radio R y masa m cuyos centros se encuentran unidos por una barra de longitud l según como se ve en la figura. El ángulo formado por la barra y el plano de cada volante es siempre de 90° (no puede variar). Cada volante gira libremente sobre sí mismo.
a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
b) Escriba el lagrangiano $\mathcal{L}$ y encuentre constantes de movimiento. ¿Es $H = E$?
c) Escriba las ecuaciones de movimiento.



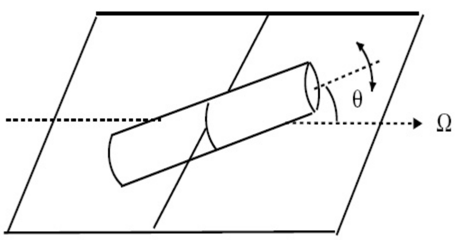
Problema 10: Dada una barra de longitud l y masa m cuyo extremo puede deslizar a lo largo del eje z y a su vez puede girar en torno de él, mientras está apoyada sobre una esfera de radio a (ver figura), determinar:
a) El lagrangiano.
b) Las ecuaciones de movimiento.
c) Las magnitudes que se conservan.



Problema 11: Un extremo de la barra de la figura –todas sus dimensiones son despreciables respecto a l– puede resbalar sobre un eje y el otro extremo sobre el piso. A $t = 0$ tiene una velocidad $\Omega_z = \omega_0$ alrededor del eje vertical y $\theta(0) = \pi/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$:
a) Encuentre Ω_z y $\dot{\theta}$ como funciones de θ.
b) Suponiendo que la barra sigue en contacto con el piso, ¿cuál es el menor valor de ω_0 para el cual la barra abandona el piso?
Sugerencia: una vez resuelta la parte a), escriba la ecuación de movimiento para el centro de masa de la barra e imponga la condición de que la reacción del piso sólo puede apuntar en la dirección z positiva.



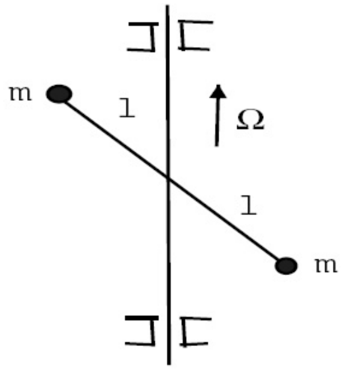
Problema 12: Un cilindro circular sólido de masa m, radio a y largo l, está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa (ver figura). Este eje gira con velocidad angular constante Ω. Suponiendo $l > \sqrt{3}a$, encontrar las posiciones de equilibrio estable y las frecuencias de oscilación para pequeños apartamientos de la misma.



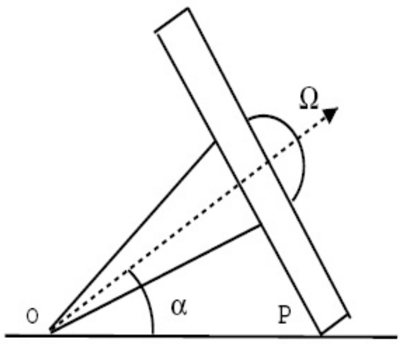
Problema 13: Se tiene un aro de radio a y masa m que rueda sin deslizar en el interior de un cilindro fijo de radio b. Encontrar el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para el aro.

Problema 14*: Una esfera homogénea de radio a se mueve por la superficie interna de un cilindro vertical de radio b sin deslizar, determine la ley de movimiento de la esfera.

Problema 15: El sistema de la figura consiste en dos masas unidas rígidamente a un eje vertical que gira con velocidad angular Ω.
a) Calcular el tensor de inercia para ejes x e y fijos al espacio.
b) Encontrar los ejes principales de inercia e interpretar.
c) Calcular el impulso angular $\mathbf{L}$ en ambos sistemas (fijo al espacio y fijo al cuerpo).
d) Calcular el par que ejercen los cojinetes, según ambos sistemas. Interprete el resultado físicamente.

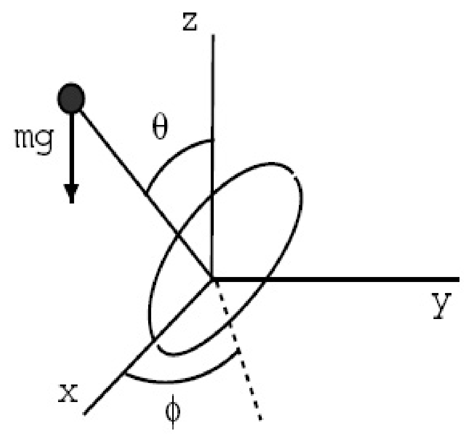


Problema 16: Un trompo con un punto de apoyo fijo o que inicialmente gira alrededor de su eje con velocidad angular Ω (la velocidad de precesión es despreciable), toca el piso y casi instantáneamente (debido al rozamiento) pasa a rodar sin deslizar (ver figura):
a) Pruebe que la componente x de $\mathbf{L_o}$ ($\hat{\mathbf{x}} \parallel \mathbf{op}$) se conserva en el contacto.
b) ¿Cuál es la nueva velocidad angular del trompo una vez que empieza a rodar sin deslizar?
c) Escriba las ecuaciones de Euler (en términos de los ángulos de Euler), después que el trompo empieza a rodar sobre el plano. Calcule el valor de la fuerza de rozamiento.
d) ¿Cuánto tarda el trompo en dar una vuelta alrededor de o?

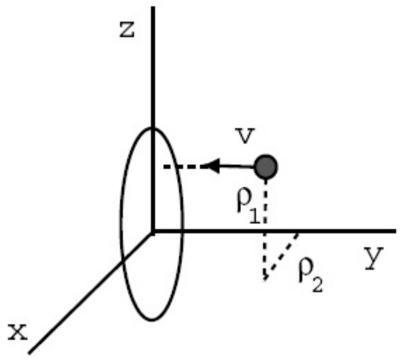


Problema 17*: Si se arroja un objeto con los tres momentos principales de inercia distintos, de tal manera que gire alrededor de un eje principal con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es relativamente estable, pero si se lo arroja tratando que gire alrededor del eje principal con momento intermedio, el movimiento es muy irregular ya que se ven grandes cambios en la posición del eje de rotación respecto del cuerpo (puede hacer la prueba con un borrador). Demuéstrelo utilizando las ecuaciones de Euler: muestre que cuando un cuerpo rígido –en un campo gravitacional uniforme– rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es estable y es inestable si el eje corresponde al momento intermedio.
Sugerencia: suponga que inicialmente tiene la velocidad angular casi paralela a un eje principal y vea como evolucionan las componentes pequeñas.

Problema 18: Un giróscopo rota alrededor del eje x_3 (ver figura), con velocidad angular constante $\Omega_3 = \omega$. Su momento de inercia axial es I_3 y el momento de inercia alrededor de cualquier eje en el plano x_1, x_2 es I. Inicialmente el volante está en posición vertical ($\theta(0) = \pi/2$) y además $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Un peso $m\mathbf{g}$ se cuelga del eje x_3 a una distancia d del origen. Por medio de las ecuaciones de Euler:
a) Encontrar las ecuaciones diferenciales para Ω_1, Ω_2 y Ω_3 en términos de θ, ϕ y ψ y sus derivadas.
b) Linealizar las ecuaciones obtenidas, bajo la suposición de que $\theta \simeq \pi/2$ y las velocidades $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ son pequeñas.
c) Resolver el sistema obtenido en b) e interpretar los resultados.
Sugerencia: eliminar en ambas ecuaciones los factores $sen(\omega t)$ usando la variable compleja $\lambda = \theta + i\phi$.
d) Establecer los límites de validez de la aproximación.



Problema 19: Una partícula se mueve paralelamente al eje y con velocidad v y con parámetros de impacto ρ_1 y ρ_2 (ver figura). Choca con un elipsoide de revolución homogéneo (los semiejes son $a = b$ y c), uniéndose con este último. Describa el movimiento del elipsoide, suponiendo que su masa es mucho mayor que la de la partícula incidente.



Problema 20*: Se tiene una esfera homogénea de masa M y radio R cuyo centro coincide con el origen del sistema de coordenadas (x, y, z) (ver figura). Una partícula de masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v} = -v_0\hat{\mathbf{x}}$ a lo largo de la recta definida por $z = y = R/2$. Cuando la partícula choca con la esfera queda pegada sobre su superficie. Describir el movimiento subsiguiente del sistema si:

a) Inicialmente la esfera no rota.

b) Inicialmente la esfera rota con $\Omega = \omega_0\hat{\mathbf{z}}$. ($\omega_0 = \text{cte.}$)

c) Inicialmente la esfera rota con $\Omega = \omega_0\hat{\mathbf{z}} + \omega_1\hat{\mathbf{y}}$. ($\omega_0, \omega_1 = \text{ctes.}$).