# Mecánica Clásica – 1er. Cuat. 2020

**Guía 7:** *Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas.*

**Problema 1:** Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:
**a)** Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Use coordenadas cartesianas. Resuelva las ecuaciones.
**b)** Una partícula en un potencial central $U(r)$. Halle las constantes de movimiento. En el caso particular $U(r) = -k/r$, discuta las órbitas posibles.
**c)** Un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad). Ídem con un punto fijo, en el campo gravitatorio terrestre. En ambos casos, halle las constantes de movimiento.
**d)** Una máquina de Atwood, considerando los casos en que la polea, de radio $R$, carece de masa y tiene masa $M$.
**e)** Construya los diagramas de fases correspondientes.

**Problema 2:** Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas *cilíndricas* y en coordenadas *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

**Problema 3:** Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano la energía total?.

**Problema 4:** Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = (1/r)(1 + \dot{r}^2)$, donde $r$ es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados $p_r$ y $p_\theta$ y $H$. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva $H$?. ¿Es $H = E$?. Reduzca el problema para $r$ a una ecuación diferencial de primer orden.

**Problema 5:** Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$ en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, utilizando como potencial vector

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}.$$

**Problema 6:** Se tiene un sistema de dos masas puntuales $m_1$ y $m_2$ que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{cm} + H_{rel}$

$$H_{cm} = \frac{P_{cm}^2}{2M} \qquad H_{rel} = \frac{p_{rel}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

donde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, L es el momento angular total y $p_{rel}$ es el momento canónicamente conjugado de r.

**Problema 7:** Demuestre que la transformación siguiente es canónica

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\mathrm{sen}q_1 + p_2), \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\ \sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2), \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\mathrm{sen}q_1 + p_2),$$

donde $\omega = qB/mc$. Úsela para encontrar una solución alternativa del Problema 5.

**Problema 8:** Considere los siguientes puntos:
**a)** Pruebe que si se hace una transformación canónica de $(q, p)$ a $(Q, P)$ se tiene:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}; \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i};$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

**b)** Considere un oscilador unidimensional de hamiltoniano $H = p^2/2m + (k/2)q^2$. Muestre que la transformación

$$Q = \ln\left(\frac{\mathrm{sen}p}{q}\right), \qquad P = q\cot p$$

es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

**Problema 9:** Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y\mathrm{sen}\lambda}{m\omega} \qquad p_x = -m\omega Y\mathrm{sen}\lambda + P_x\cos\lambda$$

$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_x\mathrm{sen}\lambda}{m\omega} \qquad p_y = -m\omega X\mathrm{sen}\lambda + P_y\cos\lambda$$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en $t = 0$.

**Problema 10:** Demuestre la siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo $f, g, h$ funciones arbitrarias de $p_i$, $q_i$; $F(f)$ es una función de $f$ y $c$ es una constante.
**a)** $[f, c] = 0$; $[f, f] = 0$; $[f, g] + [g, f] = 0$; $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$; $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$; $\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$; $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$; $[f, F(f)] = 0$.
**b)** $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$; $[f, q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $[f, p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}$.
**c)** $[f, g^n] = ng^{n-1}[f, g]$; $[g, F(f)] = F'(f)[g, f]$.

**Problema 11:** Analizar los siguientes puntos:
**a)** ¿Bajo qué condiciones pueden ser $H$ y $L^2$ simultáneamente variables canónicas?. Ídem para $H$ y $L_z$.
**b)** ¿Pueden ser $L_x$ y $L_y$ simultáneamente variables canónicas?. Ídem para $L_x$ y $L^2$.
**c)** ¿Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?.

**Problema 12:** Considere los siguientes puntos:
**a)** Demuestre que $df/dt = [f, H] + \partial f/\partial t$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ ó $f = p_i$?. Si $f$ no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que $f$ sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.
**b)** Muestre que si una coordenada $q_i$ es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de $q_i$. Observe que si $f$ es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. ¿Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?.

**Problema 13:** Considere los siguientes puntos:
**a)** Muestre que si $f$ y $g$ son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.
**b)** Calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$.

**Problema 14:** Muestre que, para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje $z$, $L_z$ es una constante de movimiento y que, si el potencial es central, entonces $\mathbf{L}$ es constante.