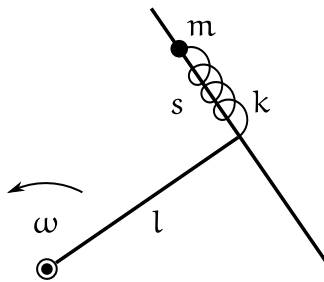


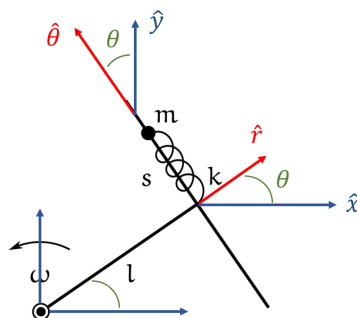
**Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2020**  
**Primer parcial resuelto**

■ **Problema 1.** Dos barras sin masa forman una T rígida. Un extremo de la primera barra (de largo  $l$ ) está fijo al origen y todo el conjunto rota con velocidad angular  $\omega$  constante en el plano de la figura. Una masa  $m$  se desliza a lo largo de la segunda barra. La masa está unida al punto de intersección de las barras mediante un resorte de constante  $k$  y longitud natural cero.

- (a) Encontrar y resolver la ecuación de Euler-Lagrange para  $s(t)$ , donde la  $s$  se mide sobre la segunda barra a partir del punto de intersección.
- (b) ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la función  $h(s, \dot{s})$ ?
- (c) Existe un valor especial de  $\omega$ ; ¿cuál es y por qué es especial?



**Solución.** *a)* Lo primero es elegir coordenadas para el sistema. El Lagrangiano debe describirse desde un sistema inercial, así que el origen debe estar en un punto fijo, por ejemplo el círculo marcado en la figura de abajo. Estaría mal tomar como origen el punto de intersección de la T, debido a que rota. Tenemos una masa puntual que tiene 3 grados de libertad, pero hay dos vínculos. Uno es que  $z = 0$ . El otro es que la velocidad angular de las barras es constante. Queda un único grado de libertad para el problema,  $s$ . Las coordenadas más apropiadas para describir estos vínculos son polares, como en la figura de abajo.



Siguiendo la figura tenemos que

$$\vec{r}(s, \theta) = l \hat{r}(\theta) + s \hat{\theta}(\theta) \quad \text{ó} \quad \vec{r}(s, \theta) = l \hat{l} + s \hat{s}. \quad (1)$$

Aquí todavía no impuse el vínculo  $\dot{\theta} = \omega$  que implica  $\theta = \omega t + \theta_0$ , pero podría. La mayoría escribió lo segundo, pero la verdad es que la identificación con los versores polares es inmediata. De aquí podríamos obtener fácilmente la velocidad si recordásemos de memoria (tenemos práctica desde F1) que  $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta}$  y que  $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r}$ . Si no lo recordamos no pasa nada, los descomponemos en  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  y lo verificamos. Luego

$$\vec{v}(s, \theta) = l\dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{s} \hat{\theta} - s\dot{\theta} \hat{r} = (l\dot{\theta} + \dot{s}) \hat{\theta} - s\dot{\theta} \hat{r}. \quad (2)$$

Para hallar la energía cinética elevamos la velocidad al cuadrado. Esto es fácil porque los versores son ortonormales:  $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ ,  $\hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 1$  y  $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$  (no es necesario demostrarlo). Otra opción era descomponer la velocidad en cartesianas, pero la cuenta se empieza a hacer larga. La energía cinética será entonces

$$T = \frac{m}{2} \left[ (l\dot{\theta} + \dot{s})^2 + s^2 \dot{\theta}^2 \right]. \quad (3)$$

Para el potencial necesitamos la distancia entre la masa y el origen del resorte. El extremo del resorte está fijo en la intersección de las barras, no en el origen, así que esta distancia viene dada simplemente por la variable  $s$ . En el enunciado nos dicen que la longitud natural es cero para facilitar las cosas. Así queda

$$T - V = \frac{m}{2} \left[ (l\dot{\theta} + \dot{s})^2 + s^2 \dot{\theta}^2 \right] - \frac{k}{2} \left( s - \underbrace{l_0}_{=0} \right)^2. \quad (4)$$

Un detalle muy importante acá. Los vínculos se imponen antes de escribir  $\mathcal{L}$ . La idea del formalismo es evitarnos la aparición de las fuerzas de vínculo (que no realicen trabajo virtual), y la forma de incorporar sus efectos es imponiendo los vínculos antes de escribir  $\mathcal{L}$ . Aquí el vínculo es que  $\theta = \omega t + \theta_0$ , y entonces  $\dot{\theta} = \omega$ . Luego el Lagrangiano depende únicamente de una variable, como analizamos al principio

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}) = \frac{m}{2} (l^2 \omega^2 + 2l\omega \dot{s} + \dot{s}^2 + s^2 \omega^2) - \frac{ks^2}{2}. \quad (5)$$

Si no imponemos este vínculo, tendremos una ecuación de E-L para  $\theta$  también. En ese caso estaríamos describiendo otro sistema, donde la barra no está obligada a girar con velocidad angular constante. Y si imponemos el vínculo recién en la ecuación de E-L, llegaríamos a una respuesta incorrecta para  $s(t)$ .

Una sutileza: fíjense que al escribir  $\mathcal{L}$  fui explícito tanto en su dependencia como en imponer el vínculo escribiendo explícitamente  $\omega$  en vez de  $\dot{\theta}$  en  $\mathcal{L}$ . Podríamos omitir una

de las dos, porque se seguiría entendiendo, pero no las dos. Uno debe intentar ser claro cuando explica un problema. Si escribimos

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[ (l\dot{\theta} + \dot{s})^2 + s^2\dot{\theta}^2 \right] - \frac{ks^2}{2}, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad (6)$$

entonces no queda claro si se sabe que NO hay otra ecuación de E-L para  $\theta$ . El enunciado no ayuda a aclarar el panorama porque solo pide la ecuación para  $s$ .

Otro detalle es que se nos pide hallar la solución  $s(t)$ , pero a nivel Lagrangiano tomamos a las coordenadas y velocidades como variables, independientemente del tiempo. Si escribiésemos  $s(t)$  en  $\mathcal{L}$  entonces todos los Lagrangianos dependerían única y explícitamente del tiempo.

Si uno quisiera podría olvidarse en la ec. (5) a partir de aquí del término constante  $ml^2\omega^2/2$  y del término lineal  $ml\omega\dot{s}$ , que en el fondo es una derivada total:  $ml\omega\dot{s} = d(ml\omega s)/dt$ ; no cambian las ecuaciones ni la física de lo que sigue. Vamos a retenerlos solo para mostrarlo. La ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Rightarrow \frac{d}{dt} (ml\omega + m\dot{s}) = m\omega^2 s - ks \\ \ddot{s} &= \left( \omega^2 - \frac{k}{m} \right) s = - \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right) s. \end{aligned} \quad (7)$$

A esta altura uno puede chequear unidades por las dudas: lo que aparezca en el paréntesis debe tener unidades de frecuencia al cuadrado ó  $s^{-2}$ . Otra cosa importante es que tenemos un resorte, así que era esperable que aparezca su frecuencia natural  $\omega_0^2 = k/m$ .

En el ejercicio pedían encontrar *y resolver* la ecuación de E-L. Ahora, la resolución depende mucho de como uno escriba las cosas. Si miramos la primera igualdad en la ec. (7) diremos que tenemos exponenciales, mientras que si miramos la última pensaremos que tenemos un oscilador. La respuesta es que el ejercicio no aclara en qué caso estamos, así que debemos tener en cuenta todas las opciones posibles. Una forma de hacer esto es proponer como solución una exponencial y ver que

$$\text{Propongo } s(t) = De^{\Omega t} \Rightarrow \Omega^2 s = \left( \omega^2 - \frac{k}{m} \right) s. \quad (8)$$

- $\omega^2 > k/m$ : En este caso el paréntesis es positivo y podemos tomar la raíz, obteniendo dos valores

$$\Omega_{\pm} = \pm \Omega = \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}} \Rightarrow s(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}. \quad (9)$$

Extra: podríamos analizarlo físicamente. En este caso, la componente tangencial de la fuerza centrífuga,  $F_{\theta}^{cf} = m\omega^2 s$ , supera la fuerza de restitución elástica  $F_{\theta}^{el} = -ks$ , y la

masa se aleja indefinidamente.

- $k/m > \omega^2$ : En este caso el paréntesis es negativo y tenemos un número complejo

$$\Omega_{\pm} = \pm i\Omega = \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \Rightarrow s(t) = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t} = C \cos(\Omega t + \delta). \quad (10)$$

En este caso la fuerza de restitución elástica es más fuerte y la masa oscila.

Notar que la definición de  $\Omega$  es distinta en cada caso, pero en ambos está definida como la raíz de una cantidad positiva.

c) Si uno logra diferenciar entre estos dos casos, no es difícil ver que existe un caso particular. El valor  $\omega^2 = k/m$  es especial porque marca la separación entre estos dos regímenes. Únicamente para este valor tenemos que

$$\ddot{s} = 0 \Rightarrow s(t) = s_0 + v_0 t. \quad (11)$$

En este caso las fuerzas se igualan y, al estar libre de fuerzas, la masa describe un MRU en el sistema rotante.

Se puede apreciar que en cada caso la solución es diferente, y para hallarla hay que volver a la ecuación diferencial. No podemos simplemente reemplazar  $\Omega = 0$  en los primeros casos para llegar a un MRU.

b) Por último nos preguntan por la conservación de  $h$  y  $E$ . La de  $h$  es fácil: vimos en la cursada que si  $\mathcal{L}$  no depende *explícitamente* del tiempo,  $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ , entonces  $h$  se conserva ( $h$ , no  $E$ ). Ojo que esas son derivadas parciales, no totales. Y en nuestro caso  $\mathcal{L}$  depende de  $s$  y  $\dot{s}$ , como explicitamos en la ec. (5), pero la letra  $t$  no aparece, así que  **$h$  se conserva**.

No lo pedían pero podemos ver quién es  $h$

$$h = \dot{s} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} - \mathcal{L} = \frac{m\dot{s}^2}{2} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) \frac{ms^2}{2} - \frac{ml^2\omega^2}{2}. \quad (12)$$

Es más, podemos corroborar que es constante. Para eso calculamos su derivada *total*

$$\frac{dh}{dt} = m\dot{s}\ddot{s} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) ms\dot{s} = \left[\ddot{s} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)s\right] m\dot{s} = 0, \quad (13)$$

donde lo que está entre corchetes se anula porque es la ecuación de E-L (7).

Por otro lado nos preguntan si se conserva  $E$ . Que  $\mathcal{L}$  no dependa de  $t$  nos dice que  $h$  se conserva, pero no nos dice nada sobre  $E$ . Debemos buscar otro camino. Existen varios:

- La forma más simple sería ver si  $h = E$ . En la cursada vimos una demostración que decía que si la energía cinética es homogénea de grado dos en las velocidades y el potencial

no depende de las velocidades, entonces  $h = E$ . Aquí  $V = V(s)$ , así que la última parte se cumple, pero

$$T(s, \lambda \dot{s}) = \frac{m}{2} [(l^2 \omega^2 + 2l\omega(\lambda \dot{s}) + \lambda^2 \dot{s}^2 + s^2 \omega^2)] \neq \lambda^2 T(s, \dot{s}). \quad (14)$$

Por lo tanto,  $h \neq E$ .

- Otra forma de ver si  $h = E$  es comparar sus expresiones. Ya hallamos  $h$ . Por otro lado

$$E = T + V = \frac{m}{2} (l^2 \omega^2 + 2l\omega \dot{s} + \dot{s}^2 + s^2 \omega^2) + \frac{k s^2}{2}. \quad (15)$$

Comparando con la expresión de  $h$  en (12) vemos que son diferentes, por lo tanto  $h \neq E$ .

*Detalle Técnico:* Ver si  $h \neq E$  es el método más usual y tentador para ver si  $E$  se conserva. En principio está "bien" decir que si  $h$  es constante y  $h \neq E$  entonces  $E$  no se conserva porque es lo que sucede en la gran mayoría de los casos de interés (99%?). Sin embargo, técnicamente una cosa no implica la otra (y por eso no hemos hecho tal afirmación en la cursada). Puede ser que existan en el vasto mundo de la mecánica algunos contra-ejemplos donde  $h$  no es  $E$  pero ambos se conservan.

En ese sentido, sería un poco más seguro continuar por alguno de los siguientes caminos:

- Así como chequeamos que  $h$  se conserva calculando su derivada *total* y viendo que se anulaba, podemos hacer lo mismo con la expresión (15) de la energía

$$\frac{dE}{dt} = ml\omega\ddot{s} + m\dot{s}\ddot{s} + \left(\frac{k}{m} + \omega^2\right) ms\dot{s} \neq 0. \quad (16)$$

Formalmente, habría que reemplazar las soluciones halladas en el inciso *a)* para ver que esto no se anula. Pero podemos decir que en un parcial con esto alcanza para decir que  **$E$  no se conserva**. Si toda esa expresión se anulara para cualquier valor de  $t$ , probablemente a esta altura hubiésemos encontrado algún tipo de ecuación o conservación que nos permita verificarlo, como sucedió para  $h$  que apareció la ecuación de E-L.

- Otra forma era recurrir a argumentos de Física 1 (la carrera es constructiva!). Sabemos que la energía se conserva si no hay fuerzas no-conservativas que hagan trabajo. Un error común es pensar que aquí no hay ninguna de esas fuerzas. Pero eso es falso; alguien tiene que hacer rotar a la barra con  $\omega = \text{cte}$ . En este caso hay un motor (o algo) que hace girar a la barra, y la barra ejerce una fuerza normal sobre la masa para mantenerla sobre ella. Esta fuerza es perpendicular a la barra,  $\vec{N} = -N\hat{r}$ . El próximo error consiste en una trampa muy sutil. Como la masa solo puede moverse en  $\hat{\theta}$ , entonces uno concluye rápidamente que  $W_{\text{FNC}} = \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$

y por lo tanto la barra no hace trabajo porque  $\hat{r} \perp \hat{\theta}$ . Pero eso no es cierto. La trampa está en que  $\hat{\theta}$  es un versor *móvil*, y por lo tanto su desplazamiento tendrá una componente en  $\hat{r}$  (si no, se quedaría en un eje fijo y no rotaría).

Por lo tanto  $W_{\text{FNC}} = \vec{N} \cdot d\vec{r} \neq 0$  y **E no se conserva**. La física de fondo es que cuesta trabajo mantener a un objeto rotando con  $\omega = \text{cte}$ . Si sólo le damos un impulso inicial, la masa empezará girando pero después se irá en línea recta en ausencia de fuerzas, aumentando  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$ . El asunto está en los versores móviles. En cambio, si por ejemplo empujamos una masa por una pista de hielo recta, allí la Normal es perpendicular al desplazamiento y no hay trabajo.

*Acá va un extra:* una demostración sobre el hecho de que  $d\vec{r}$  no es perpendicular a  $\vec{N}$ . Para calcular el diferencial de una función (o un vector en este caso), derivamos (parcialmente) respecto de cada variable de la que depende. En nuestro caso,  $\theta = \omega t$  aparece en los versores, por lo que

$$\vec{r}(s, t) = l\hat{r}(\omega t) + s\hat{\theta}(\omega t) \quad \Rightarrow \quad d\vec{r}(s, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} ds + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt \quad (17)$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{r}(s, t) = \hat{\theta} ds + (l\omega \hat{\theta} - s\omega \hat{r}) dt = (l\omega dt + ds)\hat{\theta} - s\omega dt \hat{r}. \quad (18)$$

Y aparece la componente prometida en  $\hat{r}$ , que vino de derivar los versores debido al hecho de que son *móviles*. Notar que si dividimos por  $dt$  recuperamos la velocidad que calculamos en la ec. (2).

■ **Problema 2.** Considere una partícula de masa  $m$  que se mueve bajo la acción del potencial

$$V(r) = -\frac{k}{r} - \frac{c}{r^3} \quad (k, c > 0). \quad (19)$$

Suponga que el segundo término es una perturbación al potencial Kepleriano. Por simplicidad, defina la cantidad  $\alpha \equiv l^2/2m$ , siendo  $l$  el momento angular de la partícula.

- Estudie el problema unidimensional equivalente, grafique el potencial efectivo y discuta cualitativamente las trayectorias posibles.
- ¿En qué casos es posible la existencia de órbitas no acotadas? Justifique su respuesta.
- ¿Bajo qué condiciones existen órbitas circulares? Analice su estabilidad. Determine el radio  $r_c$  de la órbita circular estable en función de los datos del problema.
- Halle la frecuencia de oscilación radial para pequeños apartamientos del radio  $r_c$  asumiendo que  $\alpha^2 = 4ck$ . Analice si la órbita resultante será abierta o cerrada.

**Solución.** El potencial efectivo será

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{k}{r} - \frac{c}{r^3}, \quad (20)$$

donde

$$\alpha = \frac{l^2}{2m}, \quad (21)$$

Para radios suficientemente grandes, el término que domina en el potencial es  $-k/r$ . Esto implica que siempre puede haber órbitas no acotadas con energía mayor que cero. Para radios suficientemente chicos, predomina el término  $-c/r^3$ . Los puntos estacionarios de la función  $V_{\text{ef}}$  satisfacen la ecuación

$$-2\alpha r + kr^2 + 3c = 0. \quad (22)$$

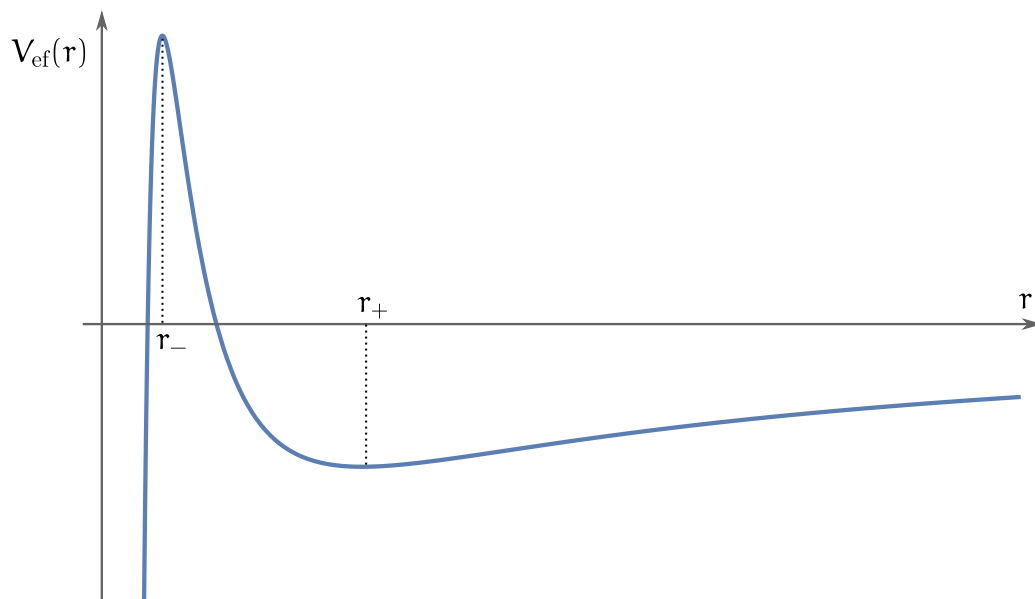
Las soluciones de esta cuadrática son

$$r_{\pm} = \frac{\alpha}{k} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3ck}{\alpha^2}} \right). \quad (23)$$

• Si

$$\alpha^2 > 3ck, \quad (24)$$

entonces las dos raíces corresponden a la región física  $r \geq 0$ . Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico para  $r \rightarrow \infty$  y  $r \rightarrow 0$ , la única posibilidad que existe es que  $r_-$  sea un máximo local y  $r_+$  un mínimo. El potencial tiene que tener el siguiente aspecto:



Que existan órbitas acotadas implica que la coordenada radial se encuentre limitada entre dos valores. En consecuencia, para que existan órbitas **no acotadas** es necesario que la energía  $E$  de la partícula sea tal que  $0 < E < V_{\text{ef}}(r_-)$ , para movimientos admisibles físicamente ( $E \geq V_{\text{ef}}$ ) que cumplan  $r > r_-$ . De esa forma, la partícula tendrá un punto de retorno cuando  $E = V_{\text{ef}}$ , pudiendo escapar luego al infinito una vez alcanzado aquél. Si la energía de la partícula está entre los valores citados pero  $r < r_-$ , entonces la misma terminará cayendo a  $r = 0$ , con lo cual su movimiento, en ese caso, será acotado.

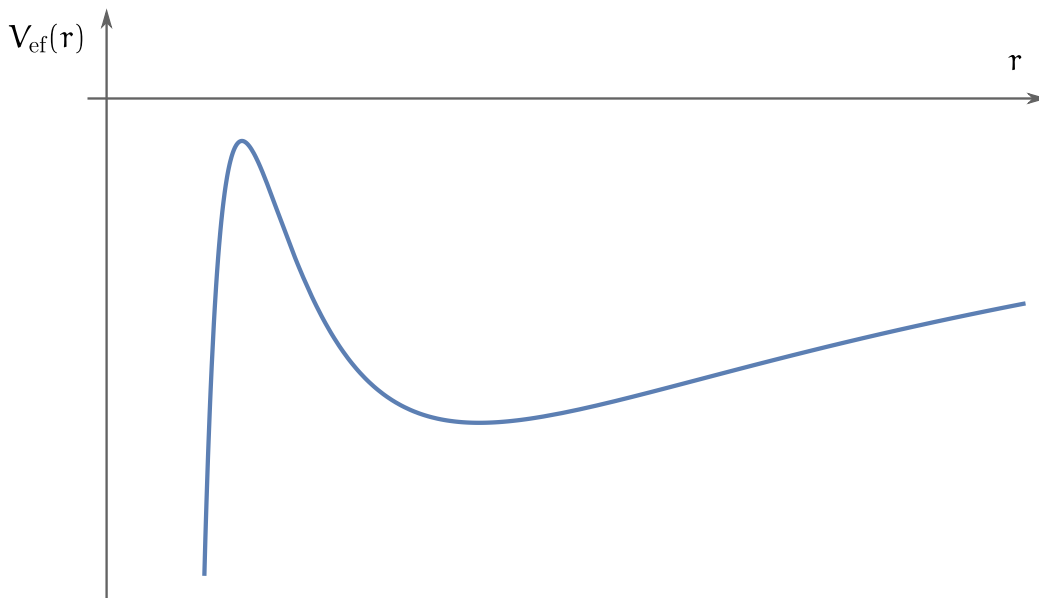
En la figura anterior hemos elegido dibujar el máximo del potencial por encima de cero, lo que debe ser cierto para valores lo suficientemente pequeños de  $c$ , ya que el gráfico debe aproximarse al del potencial efectivo para el problema de Kepler. Nada dice que eso debe ser siempre así. El valor máximo del potencial efectivo es

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{r_-^3} (\alpha r_- - k r_-^2 - c). \quad (25)$$

Puesto que  $r_-$  satisface la ec. (22), el término  $k r_-^2$  dentro del paréntesis puede escribirse en función del propio  $r_-$ , con lo que resulta

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{r_-^3} (-\alpha r_- + 2c) = -\frac{\alpha^2}{k r_-^3} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{3ck}{\alpha^2} - \frac{2ck}{\alpha^2}} \right). \quad (26)$$

Es fácil verificar que  $U_{\text{max}}$  es mayor que cero si  $\alpha^2 > 4ck$ . Caso contrario, el valor máximo del potencial efectivo es negativo y su gráfico sería, en realidad, el siguiente:

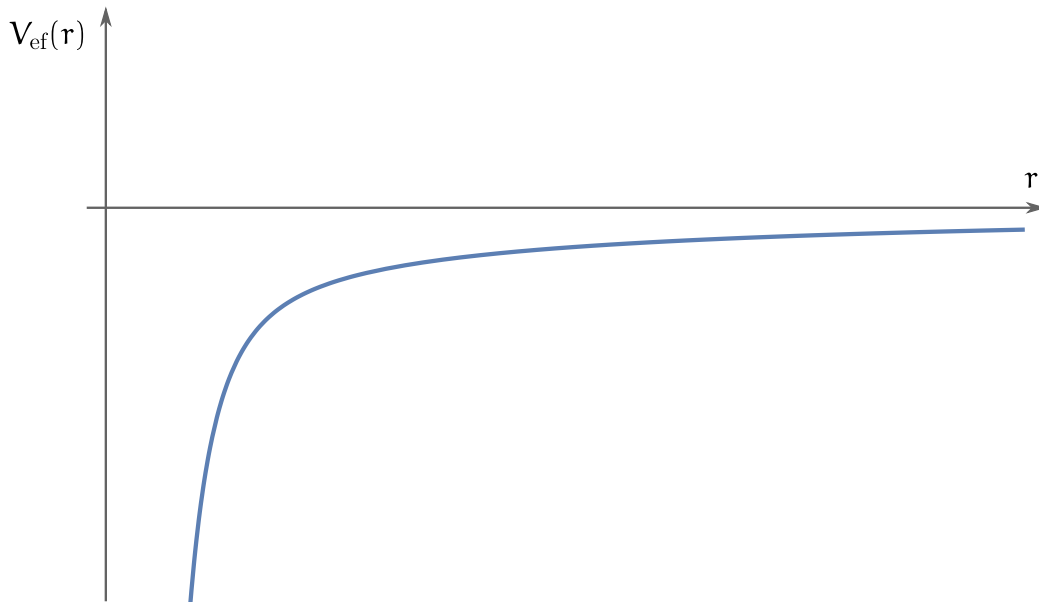


• Por otro lado, si

$$\alpha^2 < 3ck, \quad (27)$$



el potencial efectivo no tiene ningún punto estacionario:



Sólo cuando  $\alpha^2 > 3ck$  puede haber órbitas circulares, con radios  $r_-$  y  $r_+$ , inestable la primera y estable la segunda. En tal caso es  $r_c = r_+$ .

Si  $r = r_c + \epsilon$ , con  $\epsilon \ll r_c$ , la ecuación de conservación de la energía se lee como

$$\frac{1}{2}m\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}V''_{\text{ef}}(r_c)\epsilon^2 = \mathcal{E} - V_{\text{ef}}(r_c), \quad (28)$$

que es la ecuación de conservación para un oscilador lineal. La frecuencia de las oscilaciones está dada por

$$\omega^2 = \frac{V''_{\text{ef}}(r_c)}{m}. \quad (29)$$

Tenemos

$$V''_{\text{ef}}(r) = \frac{2}{r^5} (3\alpha^2 r - kr^2 - 6c). \quad (30)$$

Usando la ec. (22), podemos escribir

$$kr_c^2 = 2\alpha r_c - 3c. \quad (31)$$

Luego,

$$V''_{\text{ef}}(r_c) = \frac{2}{r_c^5} (\alpha r_c - 3c). \quad (32)$$

Si  $\alpha^2 = 4ck$  resulta

$$r_c = 3\sqrt{\frac{c}{k}}, \quad \text{y} \quad V''_{\text{ef}}(r_c) = \frac{6c}{r_c^5}. \quad (33)$$

Finalmente,

$$\omega^2 = \frac{6c}{mr_c^5}. \quad (34)$$

Por otro lado, la frecuencia de revolución angular para la órbita circular está dada por

$$\omega_\varphi = \frac{l}{mr_c^2}. \quad (35)$$

Nos será más cómodo escribirla según

$$\omega_\varphi^2 = \frac{l^2}{m^2 r_c^4} = \frac{2\alpha}{mr_c^4}. \quad (36)$$

Si  $\alpha^2 = 4ck$ , resulta

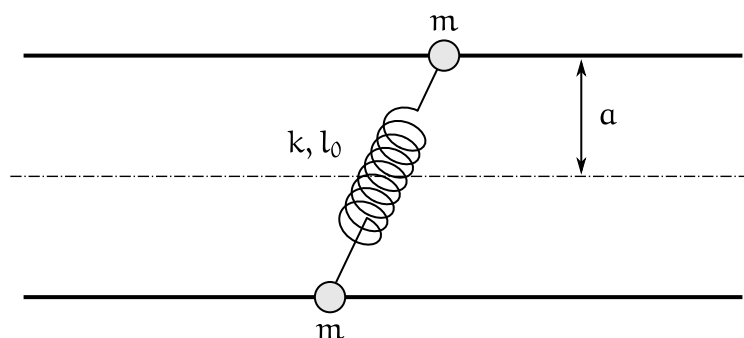
$$\omega_\varphi^2 = \frac{4\sqrt{ck}}{mr_c^4} = r_c \frac{4\sqrt{ck}}{mr_c^5} = \frac{12c}{mr_c^5}. \quad (37)$$

La órbita perturbada será cerrada si la relación  $\omega_\varphi/\omega$  es racional. Pero

$$\frac{\omega_\varphi}{\omega} = \sqrt{2}. \quad (38)$$

Entonces la órbita es abierta.

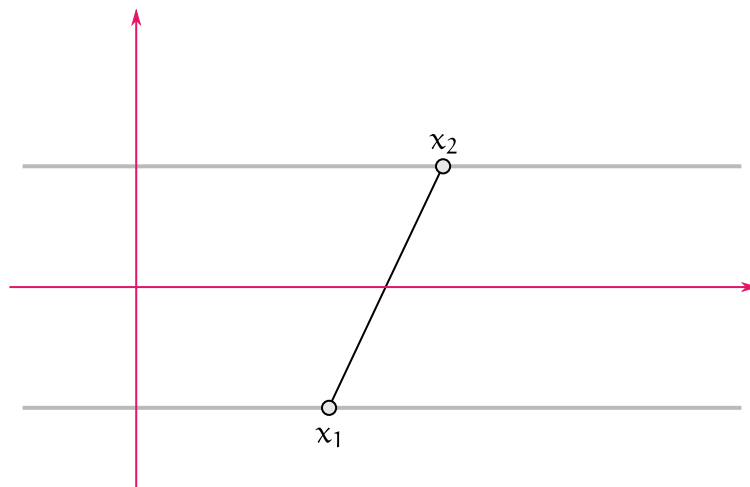
■ **Problema 3.** Dos bolitas de masa  $m$  están enhebradas en sendos rieles separados por una distancia  $2a$  y se encuentran unidas por un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ , tal como indica la figura.



- (a) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange y encuentre la o las posiciones de equilibrio del sistema. ¿Cuándo es estable?
- (b) Escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones para los puntos de equilibrio hallados en el ítem anterior asumiendo que: i)  $l_0 > 2a$  y ii)  $l_0 < 2a$ .
- (c) Encuentre los modos normales de oscilación del problema y las frecuencias correspondientes. Discuta físicamente el resultado obtenido. ¿Qué puede decir sobre las coordenadas normales?

**Solución.** Por simetría, la configuración en la que las dos masas están sobre la misma línea vertical es de equilibrio. Es más o menos intuitivo que si la separación entre los dos rieles es menor que  $l_0$ , esta configuración será de equilibrio inestable: una pequeña perturbación le da la oportunidad al sistema de relajarse hacia la posición de equilibrio en la que la distancia entre las dos masas es  $l_0$ . Esto no es posible si  $l_0 < 2a$ . Ahí la configuración con las dos masas en la misma línea vertical ha de ser estable. Aunque difícilmente se necesiten mayores argumentos que estos, veamos con detalle cómo es la forma del potencial de interacción.

Las posiciones de las dos partículas quedan definidas por las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ . La energía potencial es función de la separación horizontal entre las dos masas.



$$V(x_1, x_2) = U(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}k \left[ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 4a^2} - l_0 \right]^2. \quad (39)$$

Es suficiente considerar la función de una variable  $U(x)$ . Su derivada primera es

$$U'(x) = k \left( \sqrt{x^2 + 4a^2} - l_0 \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4a^2}}. \quad (40)$$

Esta función se anula en  $x = 0$ , tal como preveíamos, y también se anula cuando

$$\sqrt{x^2 + 4a^2} = l_0 \Rightarrow x^2 = l_0^2 - 4a^2. \quad (41)$$

Esto sólo es posible si  $l_0$  es mayor que  $2a$ . Entonces, si  $l_0 > 2a$  la derivada de  $U(x)$  se anula en  $x = 0$  y en  $x = \pm x_0$ , con

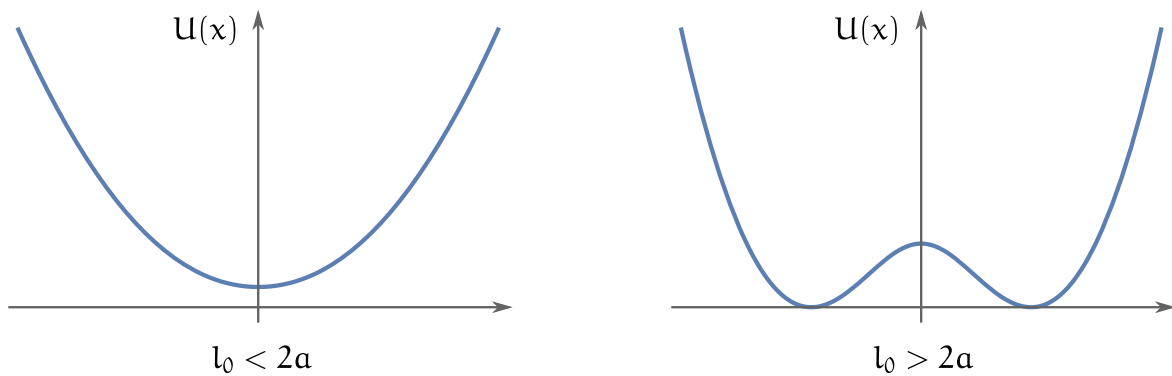
$$x_0 = \sqrt{l_0^2 - 4a^2}. \quad (42)$$

Si  $l_0 < 2a$ ,  $U'(x)$  sólo se anula en  $x = 0$ . Para determinar la naturaleza de estos puntos estacionarios podríamos calcular la derivada segunda, pero no es necesario. Un argumento gráfico es suficiente.

La función  $U(x)$  para  $x \gg a, l_0$  se comporta como

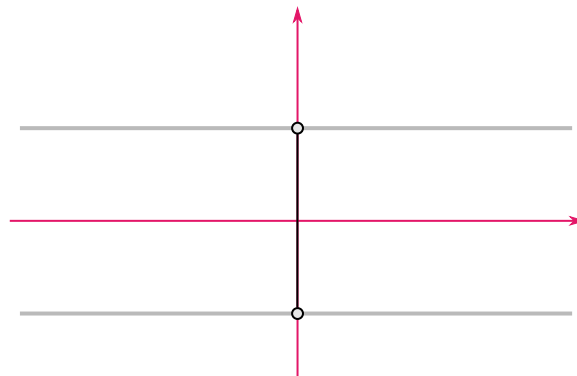
$$U(x) \approx \frac{1}{2}kx^2. \quad (43)$$

Si sólo hay un punto estacionario en  $x = 0$ , ese punto no puede ser otra cosa que un mínimo. Del mismo modo, si existen tres puntos estacionarios, en  $x = \pm x_0$  y  $x = 0$ , este último no puede ser otra cosa que un máximo local y aquéllos, mínimos locales.



Analicemos primero el caso  $l_0 < 2a$ . Tomemos como configuración de referencia

$$x_{10} = x_{20} = 0. \quad (44)$$



Las coordenadas de pequeñas oscilaciones serán  $x_1$  y  $x_2$ . Expandamos el potencial hasta

términos de orden cuadrático en  $x$ ,

$$U(x) \approx \frac{1}{2}k \left( 2a + \frac{x^2}{4a} - l_0 \right)^2 \approx \frac{1}{2}k(2a - l_0)^2 + \frac{k}{4a}(2a - l_0)x^2. \quad (45)$$

Al escribir el lagrangiano de pequeñas oscilaciones podemos omitir el término constante:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{4a}(2a - l_0)(x_2 - x_1)^2. \quad (46)$$

Para reducir el número de parámetros dimensionales, dividamos  $\mathcal{L}$  por  $ma^2$  y redefinamos  $x_i/a \rightarrow x_i$ , con lo que resulta

$$\frac{1}{ma^2}\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x_2 - x_1)^2, \quad (47)$$

donde

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \left( 1 - \frac{l_0}{2a} \right). \quad (48)$$

Las matrices  $\mathbb{M}$  y  $\mathbb{V}$  son

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Buscamos soluciones con frecuencia  $\omega$ . Definiendo  $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$ , la ecuación característica es

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (50)$$

Luego,

$$\lambda(\lambda - 2) = 0. \quad (51)$$

Las soluciones son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 2$ . Es decir, las frecuencias normales son  $\omega_1 = 0$  y  $\omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$ . Esta última frecuencia puede verificarse de manera directa: cuando el resorte está orientado verticalmente ejerce una fuerza igual a  $-k(2a - l_0)$ . Si las partículas se apartan horizontalmente una distancia  $x \ll a$ , habrá una componente horizontal de la fuerza igual a

$$F_x = -\frac{x}{2a}k(2a - l_0) = -xk \left( 1 - \frac{l_0}{2a} \right). \quad (52)$$

La evolución de la coordenada relativa  $x$  está asociada a esta fuerza y a la masa reducida  $\mu = m^2/2m = m/2$ . Luego, la frecuencia es

$$\omega^2 = \frac{k}{m/2} \left(1 - \frac{l_0}{2a}\right), \quad (53)$$

tal como indica el problema de autovalores y autovectores.

Los autovectores son

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

La solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (C_1 + C_1' t) \mathbf{A}_1 + (C_2 \cos \omega_2 t + C_2' \sin \omega_2 t) \mathbf{A}_2. \quad (55)$$

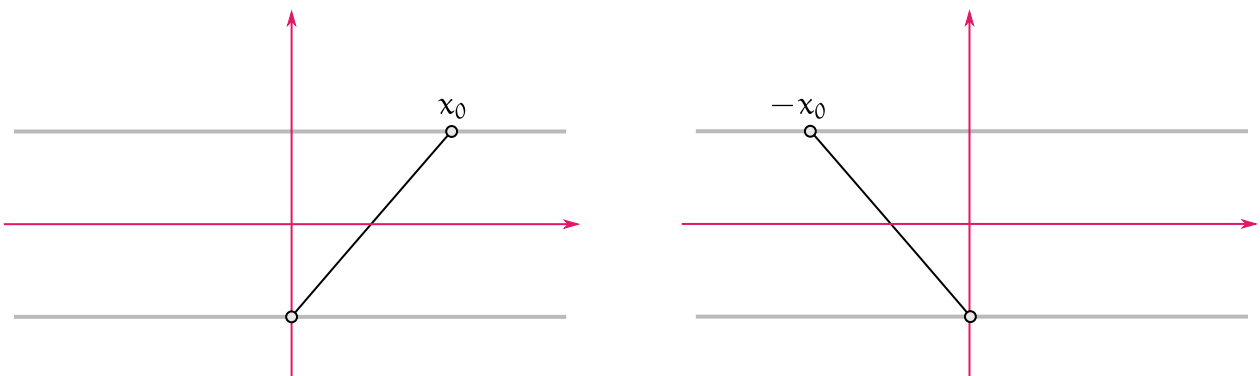
El primer modo normal corresponde a una traslación rígida,

$$\eta_1 = \frac{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_1}} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}; \quad (56)$$

el segundo, a un movimiento de oscilación con las partículas en contrafase,

$$\eta_2 = \frac{\mathbf{A}_2 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{A}_2 \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}_2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}. \quad (57)$$

Analicemos ahora las oscilaciones alrededor de la configuración de equilibrio estable para el caso  $l_0 > 2a$ . Es cierto que hay dos configuraciones de equilibrio estable, pero a todos los fines prácticos son equivalentes.



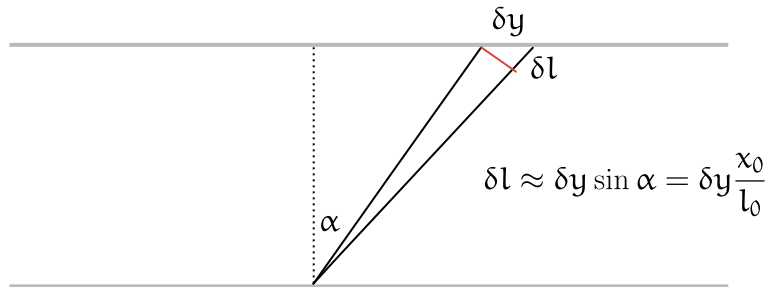
Tomemos como configuración de referencia  $x_{10} = 0$  y  $x_{20} = x_0 = \sqrt{l_0^2 - 4a^2}$ . Como coordenadas de pequeñas oscilaciones definamos  $y_1 = x_1$  e  $y_2 = x_2 - x_0$ . Esto es,

$$\mathbf{x} = x_2 - x_1 = x_0 + y_2 - y_1 = x_0 + \mathbf{y}. \quad (58)$$

Expandiendo el potencial  $U(x)$  alrededor de  $x = x_0$ , conservando términos de hasta orden  $y^2$  resulta

$$U(x) = \frac{1}{2}k \left[ \sqrt{4a^2 + (x_0 + y)^2} - l_0 \right]^2 \approx \frac{1}{2}k \left[ l_0 \left( 1 + \frac{x_0 y}{l_0^2} \right) - l_0 \right]^2 = \frac{1}{2}k \left( \frac{x_0}{l_0} \right)^2 y^2. \quad (59)$$

El resultado puede entenderse gráficamente:



En definitiva, el lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{1}{2}k \left( \frac{x_0}{l_0} \right)^2 (y_2 - y_1)^2. \quad (60)$$

Dividiendo de nuevo por  $ma^2$  y redefiniendo  $y_i/a \rightarrow y_i$ , queda

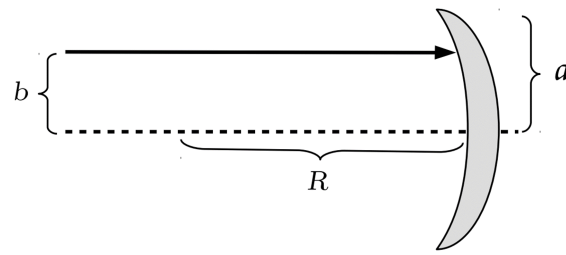
$$\frac{1}{ma^2} \mathcal{L}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{1}{2}\tilde{\omega}_0^2 (y_2 - y_1)^2, \quad (61)$$

donde ahora

$$\tilde{\omega}_0^2 = \frac{k}{m} \left( \frac{x_0}{l_0} \right)^2. \quad (62)$$

Se trata otra vez del lagrangiano (47). No es necesario hacer ninguna cuenta más. Las autofrecuencias van a ser 0 y  $\sqrt{2}\tilde{\omega}_0$ ; los autovectores y modos normales van a ser los mismos de antes, cambiando  $x_i$  por  $y_i$ .

■ **Problema 4.** Calcule la sección eficaz diferencial de un haz de partículas idénticas que inciden sobre un casquete esférico de radio  $R$  y altura  $a$ , tal como se indica en la figura de la página siguiente. Suponga que  $a \ll R$ , de forma tal que las partículas sean reflejadas una sola vez. A partir del resultado obtenido, encuentre también la sección eficaz total.

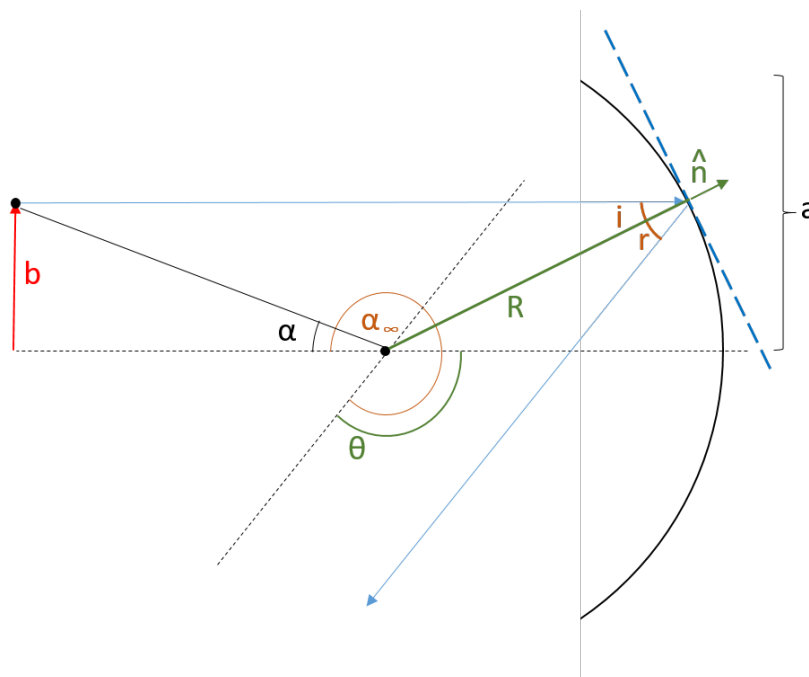


Esquema del problema.

**Solución.** La resolución de este problema es análoga a encontrar la sección eficaz de una haz de partículas que inciden sobre un casquete esférico como el de la figura anterior pero sobre su lado convexo (es el ejercicio 6 de la [Guía 4](#) y colgamos un PDF en el campus y la página con la [resolución de dicho ejercicio](#), en la clase del Jueves 14/05).

Para empezar, lo primero que hay que tener en cuenta, incluso antes de plantear en el dibujo el ángulo de scattering, es de qué forma salen dispersadas las partículas al incidir con un parámetro de impacto  $b$  sobre una **superficie rígida**. Con argumentos de F1 (y se supone que uno ve esta misma cuenta en esa materia) pueden demostrar que el ángulo con el que se desvían las partículas con respecto a la normal a la superficie en el punto de choque es igual al ángulo de incidencia. **No hacía falta** demostrar esto en el parcial, con decirlo bastaba.

Planteemos el problema. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de un planteo correcto del ejercicio.



Planteo del problema.

Acá usé la misma convención de ángulos que dio Juan en [su clase](#), donde  $\alpha$  mide la posición de la partícula desde la posición inicial y  $\alpha_\infty$  da la dirección de la partícula cuando  $t \rightarrow \infty$ .



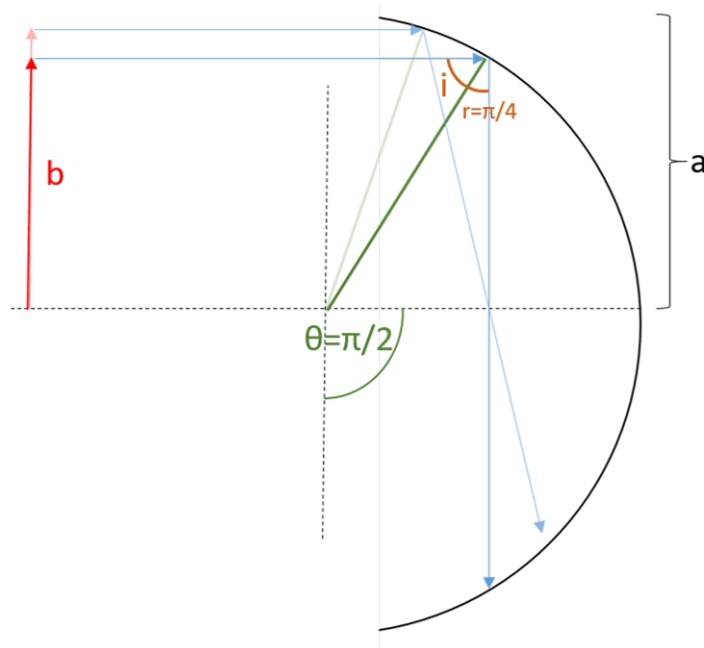
Además, se encuentra el ángulo de scattering  $\theta$  que **por definición** debe ser positivo:

$$\theta = |\pi - \alpha_\infty|. \quad (63)$$

Este ángulo, al igual que  $\alpha_\infty$ , definen la dirección en la que se dispersa la partícula (y esto es **muy** importante). Muchos en sus parciales utilizaron otra convención de ángulos (particularmente  $\theta' = 2\pi - \alpha_\infty$ ), y en varios casos estaba bien, siempre y cuando hubiesen sido consistentes con el planteo de un problema de scattering.

Por último, notamos los ángulos  $i$  y  $r$  de incidencia y reflexión, respectivamente. Es una propiedad geométrica de una esfera que la dirección radial sea perpendicular a su superficie, por lo que el ángulo de incidencia será igual al ángulo de reflexión, si ambos son medidos con respecto a esta dirección.

Si nos avivamos de la aclaración que se nos hace en el parcial:  $a \ll R$  de forma tal que **no haya reflexiones internas**. La idea con este hint no era que realizaran ningún tipo de aproximación, simplemente saber que el problema no sugería que plantearan la posibilidad de que las partículas chocaran dos veces contra la cáscara, como se muestra en la siguiente figura. Se puede demostrar que existe un parámetro  $b_c$  para el cual  $i = r = \frac{\pi}{4}$  y por lo tanto  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Para todo  $b > b_c$  (siempre que  $b < a$ ), la partícula rebotará dos veces. Si  $a < b_c$ , esto nunca ocurre.



Reflexiones internas

Una vez planteado el problema de esta forma se puede proceder a calcular la sección eficaz total. Si recordamos la formulita

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin(\theta)} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|. \quad (64)$$

Básicamente, lo único que hay que encontrar es la dependencia del parámetro de impacto con  $\theta$  y el problema está resuelto (o casi todo). Si miran con cuidado la primera figura, se darán cuenta que podemos expresar a  $b$  de la siguiente forma:

$$b = R \cdot \sin(r). \quad (65)$$

O sea que basta ver de qué forma se relacionan  $r$  y  $\theta$ . Nuevamente, observando en la primera figura se ve que:

$$r + i = 2r = 2\pi - \alpha_\infty = \pi - \theta. \quad (66)$$

Ergo, el parámetro de impacto en función de  $\theta$  queda expresado como

$$b(\theta) = R \cdot \sin(\pi/2 - \theta/2) = R \cdot \cos(\theta/2). \quad (67)$$

Usando la propiedad trigonométrica

$$\sin(\theta) = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \quad (68)$$

llegan a que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}. \quad (69)$$

Como a muchos les comenté en sus parciales, la sección eficaz diferencial que obtienen es la misma que la de una esfera rígida de radio  $R$ .

Vamos entonces a calcular la sección eficaz total. Una vez que llegan a la ec. (69), lo único que tienen que hacer es integrar la expresión en el ángulo sólido, pero **ojo acá: La sección eficaz que encontraron sólo está bien definida para  $\theta \in [\theta_{\min}, \pi]$** . Esto se debe a que  $b$  está restringido a  $[0, a]$  (para valores mayores a  $a$ , las partículas no chocan, así que no tiene sentido considerarlo), y por lo tanto, si  $b = 0$ , entonces  $\theta = \pi$  es máximo, y si  $b = a$  entonces  $\theta_{\min} = 2 \cdot \arccos(a/R) > \pi/2$ . Por otra parte, ¿por qué no considero valores de  $b$  menores a 0? El problema tiene simetría de revolución, así que lo que hicimos hasta ahora fue resolver la mitad en la que  $b \in [0, a]$ , y por simetría, la sección eficaz diferencial es igual en  $[0, -a]$ . Al calcular la sección eficaz total, tenemos que integrar en el ángulo sólido, que es la expresión para un diferencial de superficie de una esfera unitaria (y al hacer esto, ya incluimos a la otra mitad que "dejamos de lado"). Por lo tanto

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{R^2}{4} \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (70)$$

Haciendo la integral, llegan a que

$$\sigma = \frac{R^2\pi}{2} \left[ -\cos(\theta) \Big|_{\theta_{\min}}^{\pi} \right]. \quad (71)$$

Es importante que la sección eficaz les de positiva ya que les habla del flujo de partículas por unidad de tiempo, normalizada por el flujo de partículas incidentes (relean la sección 1.1 del [PDF de Juan](#)).

Por último, como también a muchos les comenté, y es solo un detalle, usando la relación

$$1 + \cos(\theta_{\min}) = 2 \cos^2(\theta_{\min}/2) = 2 \left( \frac{a}{R} \right)^2, \quad (72)$$

pueden llegar a una expresión más amena:

$$\sigma = \pi a^2. \quad (73)$$