

Clase práctica del jueves 23/4. Problemas 6 y 10 de la Guía 1.\*

1	El problema mecánico según Física 1 . . . . .	1
1.1	El péndulo doble según Física 1 . . . . .	2
2	El formalismo de Euler-Lagrange . . . . .	10
2.1	El péndulo doble según Mecánica Clásica . . . . .	11
3	Problema 6 . . . . .	15
3.1	El Problema 6 según Física 1 . . . . .	16
3.2	El Problema 6 según Mecánica Clásica . . . . .	20
3.3	Coordenadas generalizadas $\rho$ y $\varphi$ . . . . .	22
3.4	Constantes de movimiento . . . . .	27
3.5	El problema unidimensional equivalente . . . . .	30
3.6	La tensión de la cuerda . . . . .	38
3.7	Adimensionalización del problema . . . . .	39
3.8	El caso en que $m_2$ se puede mover sobre un plano vertical . . . . .	43
3.9	A modo de ejercicio: coordenadas generalizadas $x$ e $y$ . . . . .	46
4	Sobre la conservación de $h$ . . . . .	49
5	Acerca de los casos en los que $h = T + V$ . . . . .	50

## 1. El problema mecánico según Física 1

Dado un sistema de  $N$  partículas, el problema matemático de sus trayectorias queda definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$m_i \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_i, \tag{1}$$

con condiciones iniciales  $\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}$  y  $\dot{\mathbf{r}}_i(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_{i0}$ . Esto funciona muy bien si las fuerzas son todas conocidas, como en el movimiento planetario. Pero, por lo general, cada fuerza es la composición de dos clases de fuerzas: las aplicadas y las de vínculo,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(ap)} + \mathbf{F}_i^{(v)}. \tag{2}$$

Las fuerzas de vínculo,  $\mathbf{F}_i^{(v)}$ , son parte de las incógnitas del problema, aparecen para garantizar ciertas restricciones geométricas. Por ejemplo, consideremos estos dos sistemas:



\*zanellaj@df.uba.ar

En el primer caso, el bloque está obligado a moverse sin perder contacto con la superficie horizontal; su coordenada  $z$  es igual a cero. La fuerza normal  $\mathbf{N}$ , que puede tener tanto un sentido como el opuesto, contrarresta el efecto de cualquier fuerza aplicada que tienda a despegar el bloque de la superficie. En el segundo caso, la distancia entre las dos partículas es igual a  $\ell$ , y se generan fuerzas de vínculo en la barra que las une. Las fuerzas de vínculo,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$  no son conocidas.

El problema mecánico debe incluir estas fuerzas entre sus incógnitas. Las restricciones geométricas también deben formar parte de sus ecuaciones:

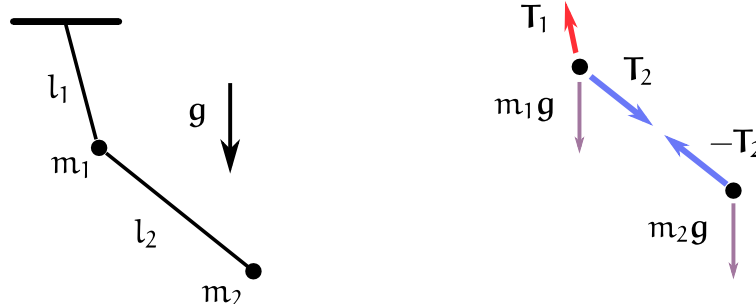
$$\text{sistema mecánico} \rightarrow \begin{cases} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{ap})} + \mathbf{F}_i^{(\text{v})}, \\ + \\ \text{ecuaciones auxiliares de vínculo.} \end{cases} \quad (3)$$

Las incógnitas son, querámoslo o no, las trayectorias  $\mathbf{r}_i(t)$  y las fuerzas de vínculo. El interés principal suele estar puesto en las trayectorias, no en las fuerzas de vínculo. Cuando se quieren resolver las ecuaciones de movimiento, las fuerzas de vínculo son un estorbo.

Y existe otro problema. Cuando incluimos a las fuerzas de vínculo como parte de nuestras incógnitas, ¿qué nos asegura que las ecuaciones de Newton junto con las ecuaciones de vínculo alcancen para despejar todas las incógnitas? El problema es real. Usualmente hace falta imponer condiciones extra. En tal situación, uno debería postular el mínimo número de hipótesis adicionales para que el problema matemático quede bien definido. Lo veremos en el siguiente ejemplo.

### 1.1. El péndulo doble según Física 1

Es el problema 10 de la Guía 1. En el péndulo doble de la figura, las barras que sujetan a las partículas son rígidas y no tienen masa. Hay dos fuerzas de vínculo,  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ . En la figura, casi sin pensarlo, ya hemos introducido hipótesis suplementarias. Hemos supuesto que las fuerzas de tensión vienen de a pares. Escribimos  $\mathbf{T}_2$  y  $-\mathbf{T}_2$ , y no una tercera tensión  $\mathbf{T}_3$  en lugar de  $-\mathbf{T}_2$ . Esto no tiene relación con el principio de acción y reacción, porque las dos partículas no interactúan entre sí. La justificación es otra: debido a que las barras no tienen masa, si hubiera una fuerza neta sobre ellas, su aceleración sería infinita.



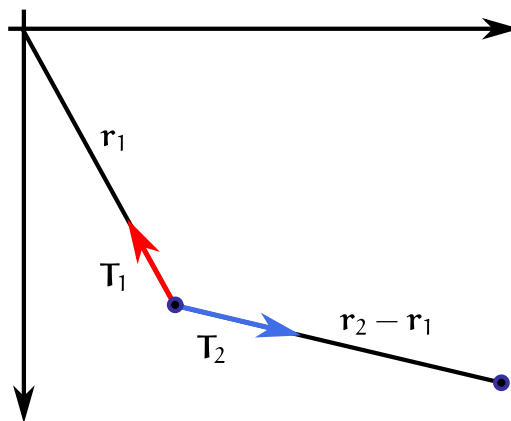
El problema mecánico consiste entonces en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m_1 \mathbf{g}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{T}_2 + m_2 \mathbf{g}, \\ |\mathbf{r}_1| = l_1, \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l_2. \end{cases} \quad (4)$$

¿Cuántas incógnitas tenemos? Si el movimiento ocurre en el plano de la figura, tenemos las cuatro componentes de las posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  y las cuatro componentes de las fuerzas  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ . Eso da un total de ocho incógnitas. ¿Cuántas ecuaciones tenemos? Las dos primeras ecuaciones son vectoriales, así que cuentan en realidad como cuatro ecuaciones; las dos ecuaciones de vínculo son escalares, de manera que son, en efecto, sólo dos ecuaciones. El total de ecuaciones suma seis; el de incógnitas, ocho. ¡Caramba!

seis ecuaciones < ocho incógnitas.

Seguramente han resuelto este problema en Física 1, sin haberse encontrado con una dificultad parecida. ¿Qué es lo que ahora no estamos viendo? Es algo que dimos por hecho en la figura pero que no expresamos aún de manera formal: las tensiones no están en cualquier dirección;  $\mathbf{T}_1$  es paralela a  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{T}_2$  es paralela a  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .



Esa información aún no ha sido incorporada al problema; forma parte de las hipótesis extra que mencionamos antes. Si las barras que unen a las partículas no tienen masa, se trata de hipótesis muy razonables, porque de otro modo tendríamos un torque neto sobre las barras y aceleraciones angulares infinitas. Entonces, al sistema de ecuaciones anterior hay que agregar estas otras dos:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 = -\lambda_1 \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{T}_2 = \lambda_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{cases} \quad (5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5) en el sistema (4), el nuevo sistema queda así

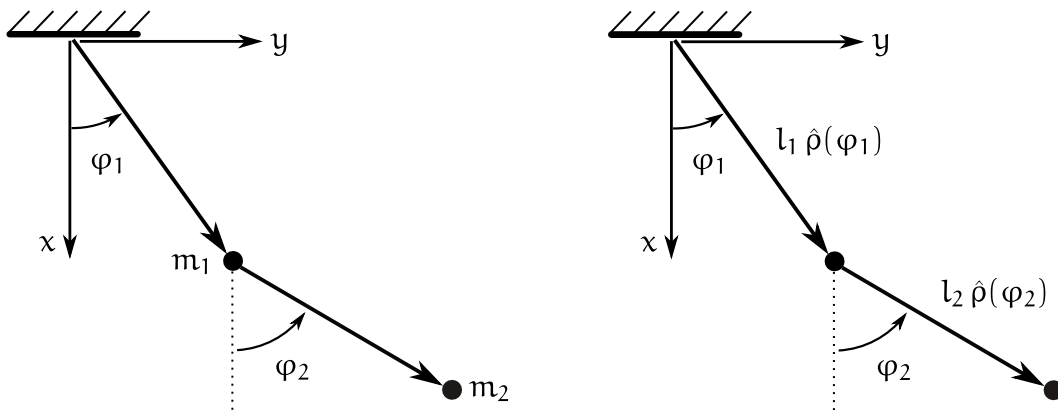
$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_1 \mathbf{g}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\lambda_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_2 \mathbf{g}, \\ |\mathbf{r}_1| = l_1, \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l_2. \end{cases} \quad (6)$$

Las incógnitas son las cuatro componentes de  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  y los dos escalares  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Total: seis incógnitas. También hay seis ecuaciones: las dos primeras ecuaciones vectoriales suman cuatro, y las condiciones geométricas o de vínculo aportan las otras dos.

seis ecuaciones = seis incógnitas.

Ahora sí podemos resolver el sistema, pero al costo de haber tenido que postular ciertas propiedades de las fuerzas de vínculo.

El sistema tiene ahora tantas ecuaciones como incógnitas. Pero hasta que no introduzcamos coordenadas para describir las posiciones de las partículas no podremos avanzar en su resolución. Lo más cómodo es definir las posiciones de las partículas de modo tal que las condiciones de vínculo queden satisfechas de manera automática. Los ángulo  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  sirven a tal propósito.



La posición de la primera partícula es

$$\mathbf{r}_1 = l_1 \hat{\rho}(\varphi_1), \quad (7)$$

lo que nos asegura que su distancia al origen es siempre  $l_1$ . De igual modo, la posición de la segunda partícula puede escribirse como

$$\mathbf{r}_2 = l_1 \hat{\rho}(\varphi_1) + l_2 \hat{\rho}(\varphi_2). \quad (8)$$

Evidentemente la distancia entre las dos partículas será siempre  $l_2$ ,

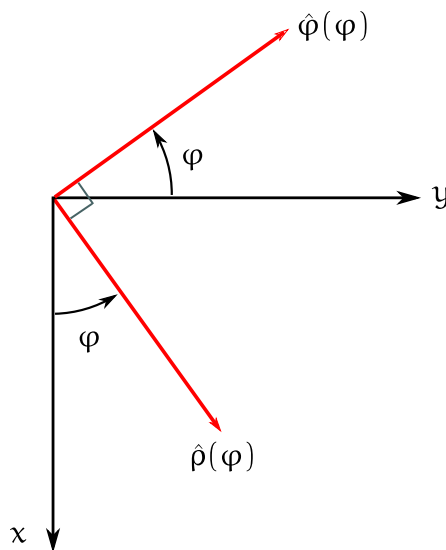
$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = l_2. \quad (9)$$

En lugar de dos coordenadas por cada partícula, ha sido suficiente introducir una sola coordenada por partícula. En esa reducción están contenidas las ecuaciones de vínculo. Eliminadas las ecuaciones de vínculo, queda por resolver las ecuaciones de movimiento propiamente dichas

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1(\varphi_1)}{dt^2} = -\lambda_1 \mathbf{r}_1(\varphi_1) + \lambda_2 [\mathbf{r}_2(\varphi_1, \varphi_2) - \mathbf{r}_1(\varphi_1)] + m_1 \mathbf{g}, \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2(\varphi_1, \varphi_2)}{dt^2} = -\lambda_2 [\mathbf{r}_2(\varphi_1, \varphi_2) - \mathbf{r}_1(\varphi_1)] + m_2 \mathbf{g}. \end{cases} \quad (10)$$

Tenemos cuatro incógnitas,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , y también tenemos cuatro ecuaciones, un par por cada ecuación de movimiento vectorial.

Si queremos seguir avanzando en el problema habrá que escribir las aceleraciones de las partículas. Recordemos la definición gráfica de los versores en coordenadas polares.



Para la primera partícula tenemos

$$\mathbf{r}_1 = l_1 \hat{\rho}(\varphi_1), \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\varphi}(\varphi_1), \quad (12)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = l_1 \left[ -\dot{\varphi}_1^2 \hat{\rho}(\varphi_1) + \ddot{\varphi}_1 \hat{\varphi}(\varphi_1) \right]. \quad (13)$$

Aquí hemos usado que

$$\frac{d\hat{\rho}(\varphi)}{d\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi), \quad (14)$$

$$\frac{d\hat{\varphi}(\varphi)}{d\varphi} = -\hat{\rho}(\varphi). \quad (15)$$

Esto puede verse descomponiendo los versores en sus componentes cartesianas y derivando explícitamente. En primer lugar

$$\hat{\rho}(\varphi) = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}, \quad (16)$$

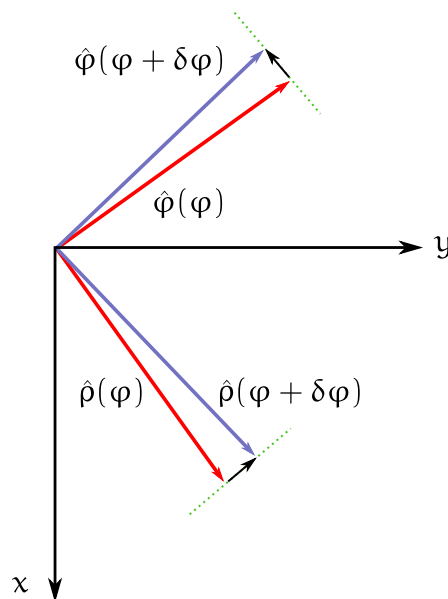
$$\hat{\varphi}(\varphi) = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}. \quad (17)$$

Derivando respecto de  $\varphi$ ,

$$\frac{d\hat{\rho}(\varphi)}{d\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} = \hat{\varphi}(\varphi), \quad (18)$$

$$\frac{d\hat{\varphi}(\varphi)}{d\varphi} = -\cos \varphi \hat{x} - \sin \varphi \hat{y} = -\hat{\rho}(\varphi). \quad (19)$$

Es fácil figurarse mentalmente estas relaciones rotando infinitesimalmente los versores  $\hat{\rho}$  y  $\hat{\varphi}$  y viendo en que dirección y sentido apuntan sus variaciones.



La variación de  $\hat{\rho}$  es paralela a  $\hat{\varphi}$ , y la de  $\hat{\varphi}$  es paralela a  $-\hat{\rho}$ .

Siguiendo con el cálculo de las aceleraciones. Del mismo modo, para la segunda partícula, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 &= l_1 \hat{\rho}(\varphi_1) + l_2 \hat{\rho}(\varphi_2), \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\phi}(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \hat{\phi}(\varphi_2), \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= l_1 \left[ -\dot{\varphi}_1^2 \hat{\rho}(\varphi_1) + \ddot{\varphi}_1 \hat{\phi}(\varphi_1) \right] + l_2 \left[ -\dot{\varphi}_2^2 \hat{\rho}(\varphi_2) + \ddot{\varphi}_2 \hat{\phi}(\varphi_2) \right].\end{aligned}\tag{20}$$

Del otro lado de las ecuaciones de movimiento, las fuerzas sobre la partícula 1 son

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= -\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m_1 \mathbf{g} \\ &= -\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_1 \mathbf{g} \\ &= -\lambda_1 l_1 \hat{\rho}(\varphi_1) + \lambda_2 l_2 \hat{\rho}(\varphi_2) + m_1 g \hat{x} \\ &\equiv -\tau_1 \hat{\rho}(\varphi_1) + \tau_2 \hat{\rho}(\varphi_2) + m_1 g \hat{x}.\end{aligned}\tag{21}$$

Hemos introducido los módulos de las fuerzas de tensión,  $\tau_i$ . A su vez, las fuerzas sobre la partícula 2 se descomponen como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= -\mathbf{T}_2 + m_2 \mathbf{g} \\ &= -\lambda_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_2 \mathbf{g} \\ &= -\lambda_2 l_2 \hat{\rho}(\varphi_2) + m_2 g \hat{x} \\ &= -\tau_2 \hat{\rho}(\varphi_2) + m_2 g \hat{x}.\end{aligned}\tag{22}$$

Cada una de las ecuaciones de movimiento es una ecuación vectorial. Como el movimiento ocurre en el plano deberemos separarlas en dos componentes. Esas componentes pueden estar en las direcciones de cualquier par de vectores linealmente independientes. Ni si quiera tiene que ser el mismo par para las dos partículas. Cada ecuación  $m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$  representa dos ecuaciones escalares. Una posibilidad es tomar sus componentes cartesianas, es decir, escribir el par de ecuaciones escalares para cada partícula como

$$\begin{cases} \hat{x} \cdot m\ddot{\mathbf{r}}_i &= \hat{x} \cdot \mathbf{F}_i, \\ \hat{y} \cdot m\ddot{\mathbf{r}}_i &= \hat{y} \cdot \mathbf{F}_i. \end{cases}\tag{23}$$

Este es el camino cartesiano del problema, o semi cartesiano, porque ya hemos escrito las posiciones en términos de las coordenadas polares. Uno puede sentirse seguro en la base

de los versores  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ , pero se paga el precio de usar una descomposición que no se adapta muy fielmente a la geometría del problema.

Nada nos ata a la base de versores cartesianos. De igual modo serviría proyectar las ecuaciones vectoriales  $m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$  sobre direcciones independientes cualesquiera,  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{u}_i$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{s}_i \cdot m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{F}_i, \\ \mathbf{u}_i \cdot m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i. \end{cases} \quad (24)$$

Los vectores  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{u}_i$  no tienen ni que ser ortogonales ni que tener módulo uno. Basta con que sean linealmente independientes. Pueden, además, depender de la propia posición  $\mathbf{r}_i$ . Conviene proyectar las ecuaciones de movimiento sobre direcciones que aislen a las fuerzas de vínculo. Muy naturalmente, para el péndulo doble esas direcciones son las de los versores  $\hat{\rho}(\varphi_i)$  y  $\hat{\phi}(\varphi_i)$ .

Según la forma en que hemos elegido escribir las aceleraciones y las fuerzas, lo más cómodo es descomponer la ecuación de movimiento para la masa  $m_1$  según los versores  $\hat{\rho}(\varphi_1)$  y  $\hat{\phi}(\varphi_1)$  y la ecuación para la masa  $m_2$  según los versores  $\hat{\rho}(\varphi_2)$  y  $\hat{\phi}(\varphi_2)$ . Estas ecuaciones serían

$$\begin{cases} \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \mathbf{F}_1, \\ \hat{\phi}(\varphi_1) \cdot m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \hat{\phi}(\varphi_1) \cdot \mathbf{F}_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\rho}(\varphi_2) \cdot m_1 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \hat{\rho}(\varphi_2) \cdot \mathbf{F}_2, \\ \hat{\phi}(\varphi_2) \cdot m_1 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \hat{\phi}(\varphi_2) \cdot \mathbf{F}_2. \end{cases} \quad (25)$$

Es por completo arbitrario que hayamos elegido proyectar una ecuación sobre las direcciones de los versores asociados a  $\varphi_1$  y la otra sobre los versores asociados a  $\varphi_2$ . Igualmente válido sería proyectar cada ecuación sobre cualquier par de vectores linealmente independientes. Lo que queremos lograr con nuestra elección es simplificar algunos términos, sobre todo aquellos relacionados con las fuerzas de tensión. Por ejemplo, al proyectar la aceleración de la partícula 1 sobre las direcciones  $\hat{\rho}(\varphi_1)$  y  $\hat{\phi}(\varphi_1)$  directamente encontramos

$$\hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 = \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot l_1 [\ddot{\phi}_1 \hat{\phi}(\varphi_1) - \dot{\phi}_1^2 \hat{\rho}(\varphi_1)] = -l_1 \dot{\phi}_1^2, \quad (26)$$

$$\hat{\phi}(\varphi_1) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 = \hat{\phi}(\varphi_1) \cdot l_1 [\ddot{\phi}_1 \hat{\phi}(\varphi_1) - \dot{\phi}_1^2 \hat{\rho}(\varphi_1)] = l_1 \ddot{\phi}_1. \quad (27)$$

De igual modo, proyectando la fuerza  $\mathbf{F}_1$  sobre  $\hat{\rho}(\varphi_1)$  resulta

$$\hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \mathbf{F}_1 = \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot [-\tau_1 \hat{\rho}(\varphi_1) + \tau_2 \hat{\rho}(\varphi_2) + m_2 g \hat{x}] \quad (28)$$

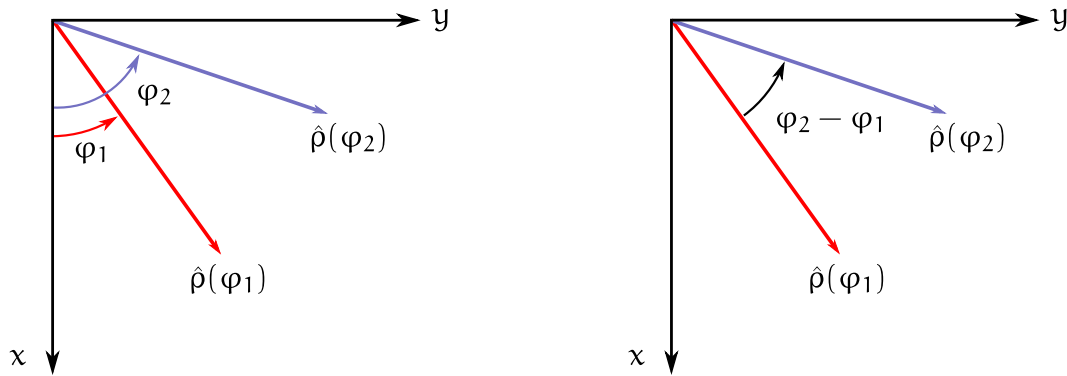
$$= -\tau_1 + \tau_2 \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \hat{\rho}(\varphi_2) + m_2 g \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \hat{x}. \quad (29)$$



Los dos últimos productos escalares son

$$\hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \hat{x} = \cos \varphi_1, \tag{30}$$

$$\hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \hat{\rho}(\varphi_2) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{31}$$



Asimismo, la proyección de  $\mathbf{F}_1$  sobre  $\hat{\rho}(\varphi_1)$  es

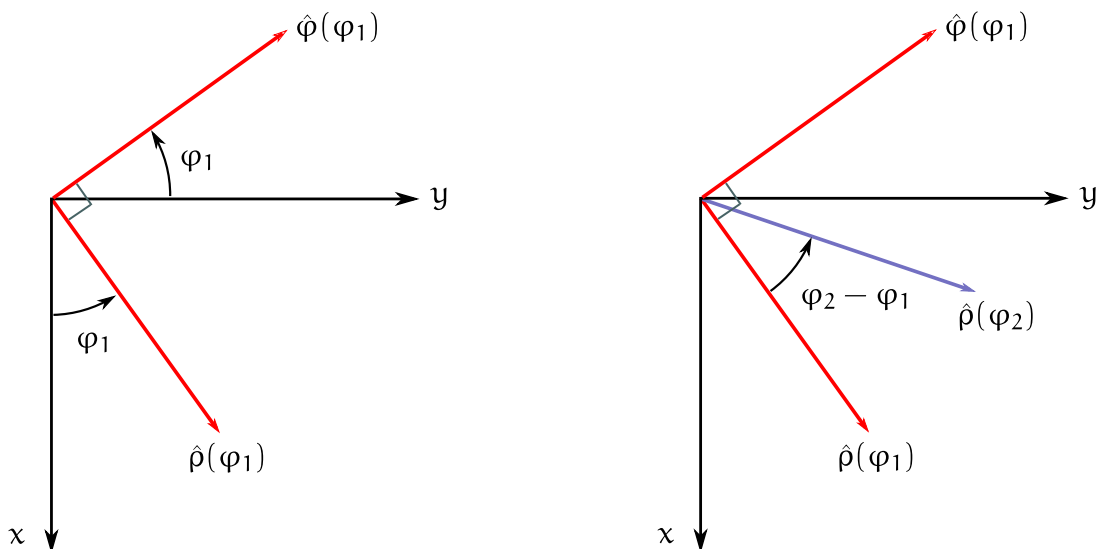
$$\hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \mathbf{F}_1 = \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot [-\tau_1 \hat{\rho}(\varphi_1) + \tau_2 \hat{\rho}(\varphi_2) + m_2 g \hat{x}] \tag{32}$$

$$= \tau_2 \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \hat{\rho}(\varphi_2) + m_1 g \hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \hat{x}, \tag{33}$$

y los dos últimos productos escalares son

$$\hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \hat{x} = -\sin \varphi_1, \tag{34}$$

$$\hat{\rho}(\varphi_1) \cdot \hat{\rho}(\varphi_2) = \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{35}$$



En definitiva, el par de ecuaciones que resulta de proyectar la ecuación de movimiento de la partícula 1 es

$$\begin{cases} -m_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 = -\tau_1 + \tau_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m_1 g \cos \varphi_1, \\ m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 = \tau_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - m_1 g \sin \varphi_1. \end{cases} \quad (36)$$

Análogamente, la ecuación de movimiento de la partícula 2 proyectada sobre  $\hat{\rho}(\varphi_2)$  y  $\hat{\varphi}(\varphi_2)$  arroja el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{cases} m_2 l_1 [\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 = -\tau_2 + m_2 g \cos \varphi_2, \\ m_2 l_1 [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)] + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 = -m_2 g \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (37)$$

El objetivo no es encontrar las tensiones sino las ecuaciones diferenciales para las coordenadas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . La última ecuación no involucra a las tensiones, de modo que es ya una de las ecuaciones buscadas. La penúltima permite eliminar  $\tau_2$ . Sustituyendo en la segunda ec. (36) damos con la segunda de las ecuaciones diferenciales. La primera ec. (36) no participa en la construcción de las ecuaciones de movimiento. Es una ecuación para  $\tau_1$ .

Finalmente, el par de ecuaciones diferenciales, eliminadas todas las fuerzas de vínculo y luego de algunos reemplazos triviales pero no del todo evidentes, resulta

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = -(m_1 + m_2) g \sin \varphi_1, \\ m_2 l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = -m_2 g \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (38)$$

Condiciones geométricas y fuerzas de vínculo hicieron que este método de solución tomara un camino muy indirecto. Ahora veremos lo que pasa con el formalismo de Euler-Lagrange.

## 2. El formalismo de Euler-Lagrange

Para resolver el problema del péndulo doble a partir de las ecuaciones de Newton fue necesario formular un cierto número de hipótesis respecto a las fuerzas de vínculo. Sus direcciones, su aparición en pares iguales y opuestos, etc. La observación capital contenida en el principio de D'Alembert, o principio de los trabajos virtuales, es que ese tipo de hipótesis pueden formularse muy concisamente diciendo que el trabajo de las fuerzas de vínculo es cero.

Esto es un postulado. Podríamos decir que los sistemas mecánicos de los que se encarga la Mecánica Clásica son aquellos en los que este postulado es cierto.

Habiendo elegido coordenadas generalizadas  $q_i$  y si las fuerzas aplicadas se obtienen de un potencial que no depende de las velocidades, las ecuaciones de Newton y el principio

de D'Alembert son equivalente a las siguientes ecuaciones

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \quad (39)$$

donde  $\mathcal{L} = T - V$ . No siempre las variaciones de las coordenadas generalizadas son independientes, por más que  $N$  sea el número mínimo de variables necesario para dar la configuración del sistema. Pero en el caso en que esas variaciones sean independientes, cada término de la suma anterior debe ser nulo. Entonces valen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (40)$$

Esta forma de las ecuaciones de movimiento también es válida para ciertos tipos de potenciales que dependen de las velocidades generalizadas. Eso se verá en otros ejercicios.

En esencia, tenemos que elegir un conjunto de coordenadas generalizadas

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N), \quad (41)$$

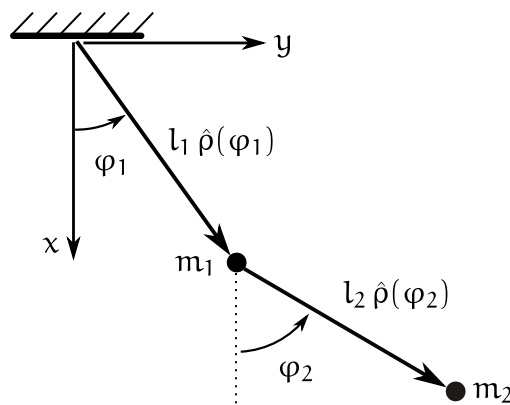
construir el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t), \quad (42)$$

y, bajo la condición de que los desplazamientos virtuales sean independientes, escribir a partir de aquí las ecuaciones de movimiento (40).

## 2.1. El péndulo doble según Mecánica Clásica

Tenemos un sistema de dos partículas como el de la figura y hemos elegido coordenadas generalizadas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .



La prueba de que este es un conjunto válido de coordenadas generalizadas es de tipo constructivo. Uno tiene que estar seguro de poder escribir las posiciones de las dos partículas en términos de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . En verdad es

$$\mathbf{r}_1(\varphi_1, \varphi_2) = l_1 \hat{\rho}(\varphi_1), \quad (43)$$

$$\mathbf{r}_2(\varphi_1, \varphi_2) = l_1 \hat{\rho}(\varphi_1) + l_2 \hat{\rho}(\varphi_2). \quad (44)$$

No hay más ciencia que esa. Notar que no es necesario escribir los versores polares en sus componentes cartesianas. Las coordenadas cartesianas no tienen ningún rol esencial. Si uno puede hacer todo el camino en coordenadas polares, entonces adelante.

Para escribir el lagrangiano necesitamos primero la energía cinética, y para escribir la energía cinética necesitamos calcular las velocidades:

$$\dot{\mathbf{r}}_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = l_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\phi}(\varphi_1), \quad (45)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = l_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\phi}(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \hat{\phi}(\varphi_2). \quad (46)$$

Para la primera partícula, tomando el módulo de la velocidad al cuadrado resulta

$$\dot{\mathbf{r}}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (47)$$

Para calcular el módulo al cuadrado de la velocidad de la segunda partícula uno podría estar tentado de descomponer todo en coordenadas cartesianas y sumar las componentes al cuadrado, es decir, hacer la siguiente cosa horrible:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -(l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) \hat{x} + (l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) \hat{y}, \quad (48)$$

luego

$$\dot{\mathbf{r}}_2^2 = (l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2)^2 + (l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)^2, \quad (49)$$

y que dios se apiade de nosotros.

Como dijimos antes, no hay porque hacer todo en coordenadas cartesianas. Aquí conviene seguir la siguiente regla práctica: dada una suma de vectores

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots, \quad (50)$$

el módulo al cuadrado es el producto escalar de esta suma consigo misma

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots) = A^2 + B^2 + C^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \dots \quad (51)$$

Así, en el caso de  $\dot{\mathbf{r}}_2$  tendremos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_2 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \hat{\varphi}(\varphi_1) + l_2 \dot{\varphi}_2 \hat{\varphi}(\varphi_2) \Rightarrow \\ \dot{\mathbf{r}}_2^2 &= l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \hat{\varphi}(\varphi_1) \cdot \hat{\varphi}(\varphi_2).\end{aligned}\quad (52)$$

El último producto escalar es muy sencillo, pues esos dos versores forman un ángulo igual a  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Por lo tanto

$$\hat{\varphi}(\varphi_1) \cdot \hat{\varphi}(\varphi_2) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1).\quad (53)$$

Finalmente,

$$\dot{\mathbf{r}}_2^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).\quad (54)$$

La energía cinética es entonces

$$\begin{aligned}T(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).\end{aligned}\quad (55)$$

Para escribir el lagrangiano nos falta calcular la energía potencial. La energía potencial de cada masa es

$$V_i = -m_i g x_i.\quad (56)$$

El signo aquí puede ser motivo de dudas. La energía potencial tiene que decrecer en el sentido en el que la fuerza tiende a acelerar la partícula. Aquí la fuerza de gravedad tiende a acelerar las partículas según la dirección  $x$  positiva (hacia abajo en las figuras), luego para que la energía potencial decrezca al aumentar  $x$  es necesario que en la ecuación anterior aparezca el signo menos. Otra manera de comprobarlo es calculando la fuerza. La fuerza gravitatoria sobre la partícula 1 es

$$\mathbf{f}_1 = m_1 g \hat{x}.\quad (57)$$

El gradiente del potencial con signo menos debería ser igual a esta fuerza. Entonces vemos la necesidad del signo menos en la ec. (56).

En términos de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  resulta

$$\begin{aligned}V(\varphi_1, \varphi_2) &= -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2.\end{aligned}\quad (58)$$

Aquí sí usamos la descomposición en de  $\mathbf{r}_i$  en coordenadas cartesianas, a través del hecho de que

$$\hat{\rho}(\varphi_i) = \cos \varphi_i \hat{x} + \sin \varphi_i \hat{y}. \quad (59)$$

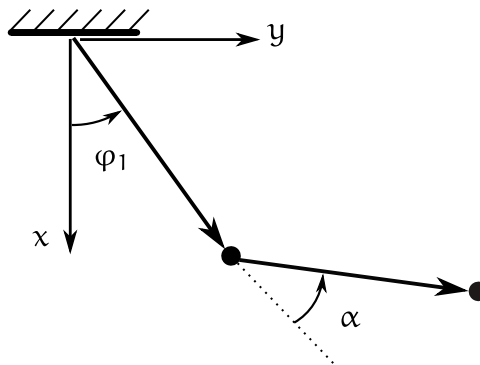
Con todo esto ya podemos escribir el lagrangiano,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = & \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 + m_2gl_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (60)$$

**Ejercicio para ustedes.** Deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange y compararlas con las obtenidas a partir de las ecuaciones de Newton.

**Una recomendación.** Cuando resuelvan los últimos *items* del ejercicio 10 asuman que  $m_1 = m_2$  y que  $l_1 = l_2$ , porque de otra forma quedan expresiones desmesuradas.

**Una sugerencia.** Consideren hacer como ejercicio el mismo problema del péndulo doble pero tomando este otro conjunto de coordenadas generalizadas:



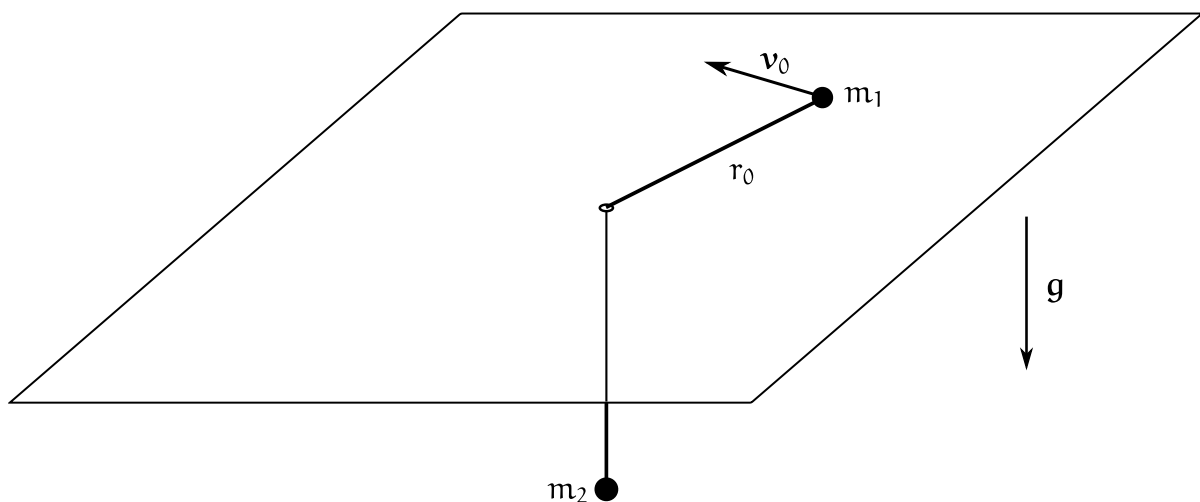
*Continúa en la página siguiente...*

### 3. Problema 6

■ El enunciado del problema (con leves modificaciones):

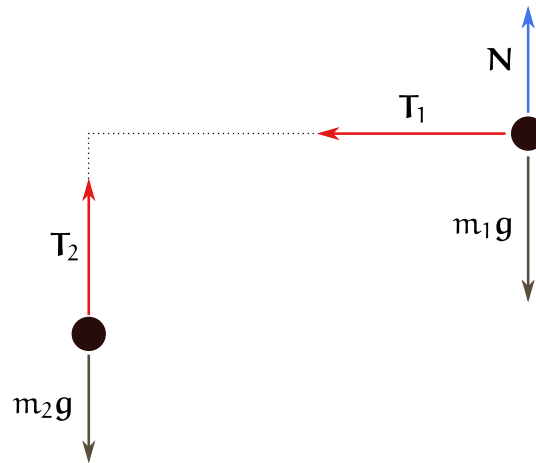
Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por un hilo de longitud  $L$ , como indica la figura. La masa  $m_1$  se mueve en el plano de la mesa y  $m_2$  sólo verticalmente. En  $t = 0$ ,  $m_1$  se encuentra a una distancia  $r_0 < L$  del orificio y se le aplica una velocidad  $v_0$  perpendicular al hilo.

- Escriba las ecuaciones de Lagrange y halle sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.
- Halle la tensión del hilo.
- Repita (a) y (b) suponiendo que el movimiento de  $m_2$  es bidimensional.



### 3.1. El Problema 6 según Física 1

Cuando la masa  $m_2$  sólo se mueve verticalmente, los diagramas de cuerpo libre son los siguientes:

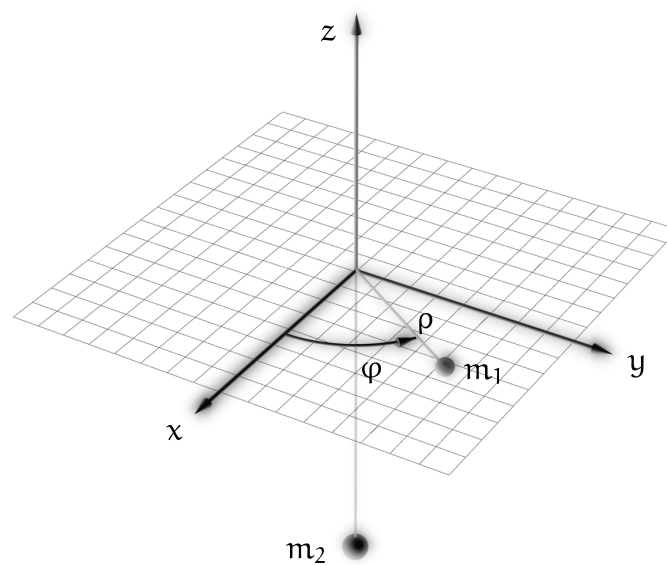


Las ecuaciones fundamentales son

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1, \quad (61)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2. \quad (62)$$

Enfoquémonos primero en los primeros miembros de estas ecuaciones. Para escribir la aceleración de  $m_1$  convendrá usar coordenadas cilíndricas.





En estas coordenadas su aceleración es

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho}(\varphi) + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi}(\varphi) + \ddot{z}_1\hat{z}_1. \quad (63)$$

Como el movimiento de  $m_2$  es unidimensional, será simplemente

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{z}_2\hat{z}_1. \quad (64)$$

Por otro lado las fuerzas sobre cada partícula son

$$\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}_1, \quad (65)$$

$$\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2. \quad (66)$$

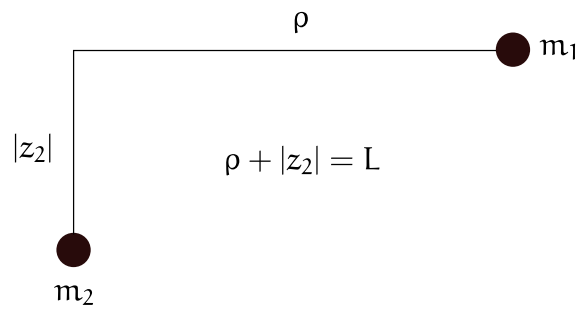
Puesto que ya hemos asumido direcciones particulares para las tensiones y la normal, hay seis funciones incógnitas: las coordenadas  $\rho$  y  $\varphi$  de la masa  $m_1$ , la coordenada  $z_2$  de la masa  $m_2$ , y las magnitudes de la tensión  $\mathbf{T}_1$ , la tensión  $\mathbf{T}_2$  y de la normal  $\mathbf{N}$ .

Evidentemente las funciones  $\rho$  y  $z_2$  no son independientes, puesto que debe ser

$$\rho + |z_2| = L. \quad (67)$$

Asumiremos que  $\rho \leq L$  y que la segunda partícula se encuentra siempre en la región  $z_2 \leq 0$ , de modo que la ecuación anterior se leerá como

$$\rho - z_2 = L. \quad (68)$$



Tampoco son independientes las tensiones. Si escribimos

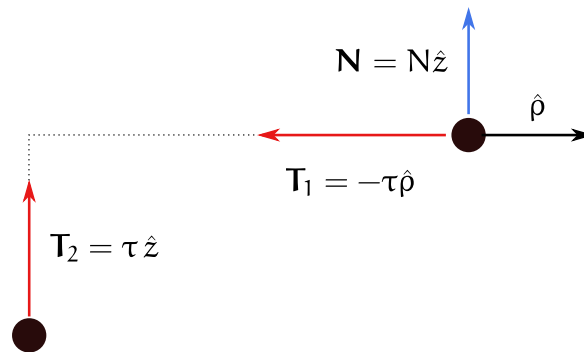
$$\mathbf{T}_1 = -T_1\hat{\rho}(\varphi), \quad (69)$$

$$\mathbf{T}_2 = T_2\hat{z}_1, \quad (70)$$

debe ser

$$T_1 = T_2 \equiv \tau. \quad (71)$$

Queda para ustedes justificar esta hipótesis. Otro hecho evidente es que  $\mathbf{N} = N \hat{z}$ .



En resumen, teniendo en cuenta el vínculo que mantiene a  $m_1$  sobre el plano  $xy$ , la ecuación de Newton vectorial para la primera masa queda cifrada en tres ecuaciones

$$\begin{cases} m_1(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -\tau, \\ m_1(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = 0, \\ 0 = N - m_1g. \end{cases} \quad (72)$$

Análogamente, para la segunda masa es

$$m_2\ddot{z}_2 = \tau - m_2g. \quad (73)$$

Según dijimos  $\rho - z_2 = L$ , de modo que  $\ddot{z}_2 = \ddot{\rho}$ . Si hacemos este reemplazo y agrupamos todas las ecuaciones, resulta el sistema

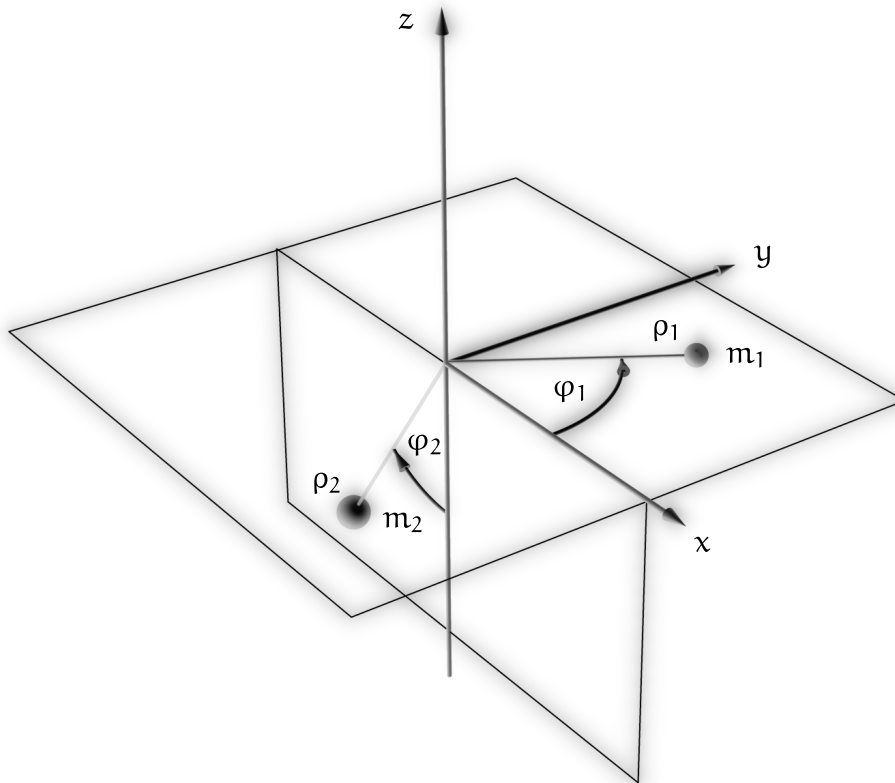
$$\begin{cases} m_1(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -\tau, \\ m_1(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = 0, \\ 0 = N - m_1g, \\ m_2\ddot{\rho} = \tau - m_2g. \end{cases} \quad (74)$$

Las funciones incógnitas se han reducido a cuatro. Además, la tercera ecuación no es en realidad una ecuación de movimiento, sino una ecuación para la normal. Es la ecuación menos interesante de todas. Podemos eliminar  $\tau$  mediante la última ecuación. Así arribamos a un sistema de dos ecuaciones diferenciales para dos funciones incógnitas, las

coordenadas de la primera masa,  $\rho$  y  $\varphi$ ,

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{\rho} - m_1\rho\dot{\varphi}^2 = -m_2g, \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (75)$$

Si el movimiento de  $m_2$  no está restringido al eje  $z$  sino a un plano vertical, podemos introducir dos pares de coordenadas polares, uno para cada masa.



Las ecuaciones de Newton para la primera masa no necesitan modificación,

$$\begin{cases} m_1(\ddot{\rho}_1 - \rho_1\dot{\varphi}_1^2) = -\tau, \\ m_1(\rho_1\ddot{\varphi}_1 + 2\dot{\rho}_1\dot{\varphi}_1) = 0, \\ 0 = N - m_1g. \end{cases} \quad (76)$$

pero para la segunda ahora tenemos (demostrarlo)

$$\begin{cases} m_2(\ddot{\rho}_2 - \rho_2\dot{\varphi}_2^2) = -\tau + m_2g \cos \varphi_2, \\ m_2(\rho_2\ddot{\varphi}_2 + 2\dot{\rho}_2\dot{\varphi}_2) = -m_2g \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (77)$$

La longitud invariable de la cuerda relaciona  $\rho_1$  con  $\rho_2$ ,

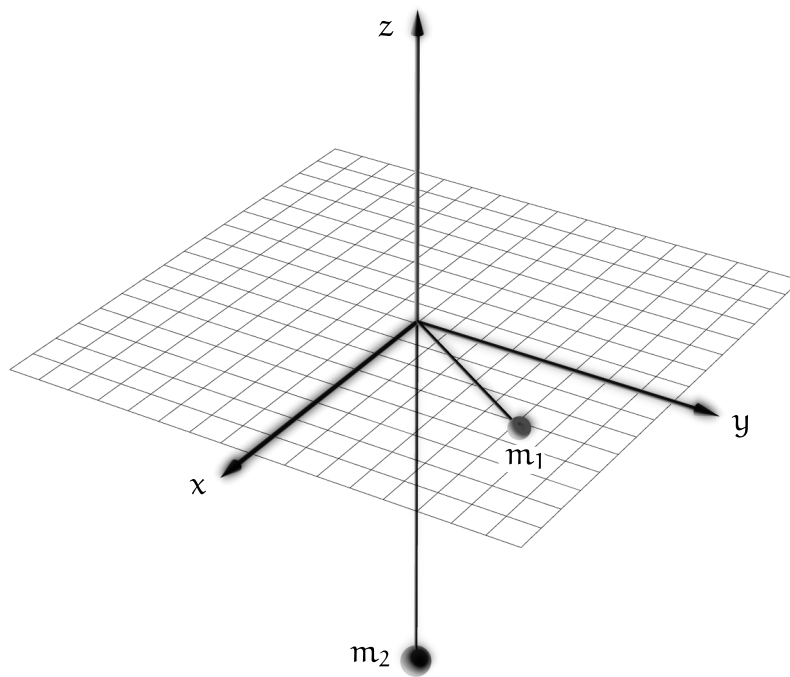
$$\rho_1 + \rho_2 = L, \quad (78)$$

de modo que es inmediato eliminar, por ejemplo,  $\rho_2$ . Procediendo como antes eliminamos  $\tau$  y  $N$ . Ahora tenemos una función incógnita adicional, el ángulo  $\varphi_2$ . Hechas estas eliminaciones, el sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{\rho}_1 - m_1\rho_1\dot{\varphi}_1^2 + m_2(L - \rho_1)\dot{\varphi}_2^2 = -m_2g \cos \varphi_2, \\ \rho_1\ddot{\varphi}_1 + 2\dot{\rho}_1\dot{\varphi}_1 = 0, \\ (L - \rho_1)\ddot{\varphi}_2 - 2\dot{\rho}_1\dot{\varphi}_2 = -g \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (79)$$

### 3.2. El Problema 6 según Mecánica Clásica

El sistema es el que muestra la figura.



Hasta nuevo aviso consideraremos el caso en el que la masa  $m_2$  se mueve sólo verticalmente. Tenemos que elegir un conjunto de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ , construir el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t), \quad (80)$$

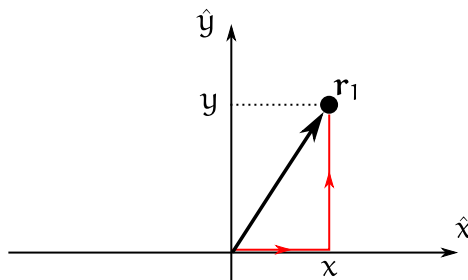
y escribir a partir de aquí las ecuaciones de movimiento,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (81)$$

Mediante el método de Euler-Lagrange todos los problemas comienzan siempre definiendo un conjunto de coordenadas generalizadas, esto es, un número mínimo de funciones que es necesario conocer para especificar la configuración del sistema. Tratándose de partículas sueltas, debemos proponernos como objetivo dar la configuración general del sistema como un conjunto de instrucciones que permitan a un viajero llegar desde el origen hasta cualquiera de las partículas: camine tal distancia en tal dirección, luego esta otra distancia en tal otra dirección, etc. Hay muchas maneras de codificar la misma información, dependiendo del conjunto de coordenadas que se elijan.

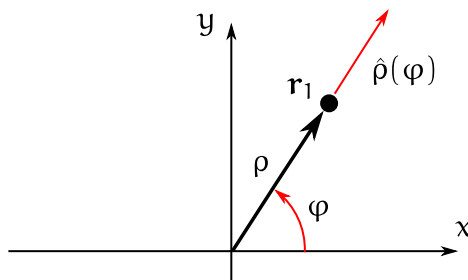
Dar la posición de  $m_1$  puede lograrse, por ejemplo, diciendo:

- Sobre el plano  $xy$ , camine una distancia  $x$  en la dirección  $\hat{x}$  y luego una distancia  $y$  en la dirección de  $\hat{y}$ .



Una alternativa más breve y más afín a la geometría del problema es usar las coordenadas polares, y decir:

- Camine una distancia  $\rho$  en la dirección del vector  $\hat{\rho}(\varphi)$ .



Para dar la posición de  $m_2$  basta con decir: camine una distancia  $-z$  en la dirección del vector  $-\hat{z}$ . (Recordar que estamos asumiendo que la masa  $m_2$  está siempre en la región  $z \leq 0$ ).

Ahora bien, las dos partículas están ligadas, de modo que la distancia que hay que caminar hasta  $m_2$  no es independiente de la posición de  $m_1$ . Si la cuerda tiene una longitud  $L$ , con la primera elección de coordenadas resulta  $-z = L - \sqrt{x^2 + y^2}$ , y con la segunda,  $-z = L - \rho$ . De modo que es necesario informar únicamente los valores de  $x$  e  $y$ , en el primer caso, y de  $\rho$  y  $\varphi$ , en el segundo, para describir completamente al sistema. El sistema se describe en cualquier caso mediante **dos** coordenadas generalizadas.

No hay una receta universal para definir las coordenadas generalizadas, y a veces no es obvio cuál es su número. La regla que hay que seguir es de tipo constructivo. Elegido tentativamente un conjunto de coordenadas  $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ , uno tiene que estar seguro de poder escribir las fórmulas explícitas

$$\mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = \mathbf{g}_1(q_1, q_2, \dots, q_N, t), \quad (82)$$

$$\mathbf{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = \mathbf{g}_2(q_1, q_2, \dots, q_N, t), \quad (83)$$

$$\text{etc.} \quad (84)$$

De este modo, las dos alternativas que contemplamos antes se expresan como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1(x, y) = x \hat{x} + y \hat{y}, \\ \mathbf{r}_2(x, y) = -(L - \sqrt{x^2 + y^2}) \hat{z}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1(\rho, \varphi) = \rho \hat{\rho}(\varphi), \\ \mathbf{r}_2(\rho, \varphi) = -(L - \rho) \hat{z}. \end{array} \right. \quad (85)$$

Es un asunto de gran importancia práctica saber dónde detenerse cuando uno escribe las posiciones en términos de coordenadas que no son las cartesianas. En estos casos no es necesario que las ecuaciones queden escritas en términos de los versores cartesianos. Así, en la ecuación anterior hemos dejado el versor  $\hat{\rho}(\varphi)$  sin descomponerlo en  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Es más sencillo operar con los versores del sistema curvilíneo de coordenadas polares que reducirlos a sus expresiones en términos de los versores cartesianos. Esto no significa que no sea necesario saber cómo descomponer  $\hat{\rho}(\varphi)$  en las direcciones  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ . Lo que queremos resaltar que tal paso puede, en general, omitirse. Lo veremos cuando avancemos con el ejercicio.

### 3.3. Coordenadas generalizadas $\rho$ y $\varphi$

Para comparar directamente con el resultado obtenido a partir de las ecuaciones de Newton, usaremos como primer ejemplo las coordenadas generalizadas  $\rho$  y  $\varphi$ .

Si queremos escribir el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) = T(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, t) - V(\rho, \varphi, t), \quad (86)$$

necesitamos primero calcular la energía cinética. Tratándose de dos partículas eso implica calcular

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2. \quad (87)$$

En términos de las coordenadas generalizadas  $\rho$  y  $\varphi$  y de sus velocidades, a partir de las

definiciones

$$\mathbf{r}_1(\rho, \varphi) = \rho \hat{\rho}(\varphi), \quad (88)$$

$$\mathbf{r}_2(\rho, \varphi) = -(L - \rho) \hat{z}, \quad (89)$$

resulta

$$\dot{\mathbf{r}}_1(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \dot{\rho} \hat{\rho}(\varphi) + \rho \dot{\varphi} \hat{\phi}(\varphi), \quad (90)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \dot{\rho} \hat{z}. \quad (91)$$

Calcular el módulo al cuadrado de  $\dot{\mathbf{r}}_1$  es muy sencillo, ya que los versores son ortonormales,

$$\dot{\mathbf{r}}_1^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2. \quad (92)$$

La energía cinética de las dos partículas es entonces

$$\begin{aligned} T(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\rho}^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m_1 \rho^2 \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (93)$$

Debido a que no hay una dependencia temporal explícita, hemos suprimido el lugar reservado a  $t$  dentro de las variables de la función  $T$ . Podríamos haber hecho lo propio con  $\varphi$ , que tampoco aparece en el miembro de la derecha, pero lo dejamos presente para acentuar más ese hecho.

Por otro lado, la energía potencial viene dada por la energía potencial de la masa  $m_2$

$$V(\rho, \varphi, t) = m_2 g z_2(\rho, \varphi) = -m_2 g (L - \rho). \quad (94)$$

Es verdad que  $V$  no depende explícitamente del tiempo ni tampoco depende de  $\varphi$ , pero conservamos sus lugares dentro de la definición de la función  $V$  para que esa ausencia sea más ostensible.

Un comentario sobre el signo en la ec. (94). Suele ser un dilema común elegir el signo correcto en este tipo de potenciales. La energía potencial tiene que disminuir si la partícula se mueve en el mismo sentido de la fuerza. Como la fuerza apunta hacia abajo, la energía potencial tiene que disminuir a medida que disminuye  $z$ . De ahí se deduce el signo positivo en la primera igualdad. En general, en un potencial gravitatorio con aceleración uniforme  $g$  la energía de una partícula es

$$V(\mathbf{r}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}. \quad (95)$$

Para comprobar la verdad de esta afirmación calculemos la fuerza:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}. \quad (96)$$

Finalmente, el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m_1\rho^2\dot{\varphi}^2 + m_2g(L - \rho). \quad (97)$$

Aquí el término constante  $m_2gL$  es irrelevante para escribir las ecuaciones de movimiento, debido a que en esas ecuaciones sólo se usan las derivadas de  $\mathcal{L}$ . La ecuación de movimiento asociada a  $\rho$  es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = 0, \quad (98)$$

y se lee como

$$(m_1 + m_2)\ddot{\rho} = m_1\dot{\varphi}^2\rho - m_2g. \quad (99)$$

Ahora bien, al construir la ecuación de Euler-Lagrange asociada a  $\varphi$  nos encontramos con que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0, \quad (100)$$

de modo que la ecuación de Euler-Lagrange sería

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 0. \quad (101)$$

Este tipo de ecuaciones son muy importantes porque nos dicen que el término entre paréntesis es una constante de movimiento.

Cuando una coordenada no aparece en el lagrangiano se dice que es una coordenada cíclica. (Obviamente su velocidad sí debe aparecer en el lagrangiano). Supongamos que  $q_1$  es cíclica, de modo que

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t). \quad (102)$$

Coordenadas cíclicas llevan a ecuaciones de movimiento de la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1}\right) = 0. \quad (103)$$

En estos casos (salvo circunstancias especiales) no es necesario calcular explícitamente la



derivada total respecto del tiempo. Basta con escribir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}(q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) = C, \quad (104)$$

donde  $C$  es una constante que depende de las condiciones iniciales. Se dice entonces que la función

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}(q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) \quad (105)$$

es una **constante de movimiento** o una **integral de movimiento** o una **integral primera** o una **cantidad conservada**. Una de las ventajas de las ecuaciones de la forma (104) es que son ecuaciones diferenciales en derivadas primeras. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son por lo general ecuaciones de segundo grado.

Un comentario al margen. En general se definen los momentos conjugados de las coordenadas como

$$p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (106)$$

Si la coordenada  $q_j$  es cíclica entonces lo que se conserva es precisamente su momento conjugado,

$$\dot{p}_j = 0. \quad (107)$$

Volviendo al problema de la guía, la ecuación asociada a  $\varphi$  será del tipo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0, \quad (108)$$

y no nos molestamos, por el momento, en calcular la derivada total respecto del tiempo, sino que escribimos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \ell, \quad (109)$$

donde  $\ell$  es una constante. Explícitamente,

$$m_1 \rho^2 \dot{\varphi} = \ell. \quad (110)$$

Es fácil verificar que  $\ell$  es la componente  $z$  del momento angular de la partícula  $m_1$ . Su conservación no debería sorprendernos, puesto que no actúan torques sobre  $m_1$ . (La fuerza normal cancela exactamente al peso y la tensión sólo ejerce fuerza en la dirección radial). Notemos que las otras dos componentes del momento angular son nulas debido a que el movimiento ocurre en el plano  $xy$ .

Si, por mera costumbre, uno escribe por extenso la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} + \rho^2 \ddot{\phi}) m_1 = 0, \quad (111)$$

se corre el riesgo de que después la ecuación equivalente de primer grado, ec. (110), sea pasada por alto. Por ejemplo, cuando resolvimos el problema usando las ecuaciones de Newton llegamos casi precisamente a la ecuación anterior [segunda ec. (75)]

$$\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi} = 0,$$

y no se nos ocurrió pensar que podía reducirse a una ecuación más simple. *Deberíamos* haber notado que multiplicándola por  $\rho$  se formaba una derivada total.

En resumen, las dos ecuaciones de movimiento son

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{\rho} - m_1 \dot{\phi}^2 \rho = -m_2 g, \\ m_1 \rho^2 \dot{\phi} = \ell. \end{cases} \quad (112)$$

## Verificaciones

- Un caso especial que ofrece una verificación del resultado anterior consiste en tomar inicialmente  $\dot{\phi} = 0$ . En tal situación, la segunda ecuación dice que  $\dot{\phi}$  es cero siempre. Por otro lado la ecuación de movimiento para  $\rho$  es

$$(m_1 + m_2) \ddot{\rho} = -m_2 g, \quad (113)$$

lo que evidentemente tiene mucho sentido. Es como un movimiento unidimensional de una masa  $m_1 + m_2$  sometida a una fuerza constante de módulo  $m_2 g$ . Las dos masas tienen la misma aceleración pero la única fuerza que actúa es el peso de  $m_2$

- Otro caso sencillo ocurre cuando la velocidad de giro de la primera partícula produce una fuerza centrífuga que cancela exactamente el peso de la masa  $m_2$ . Estamos conjeturando así que una solución posible debería ser  $\rho$  y  $\dot{\phi}$  constantes y tales que

$$\rho \dot{\phi}^2 m_1 = m_2 g, \quad (114)$$

lo que, según las ecuaciones de movimiento, como pueden comprobar, resulta cierto.

- Una tercera verificación la da el caso  $m_1 = 0$ , que resulta en la ecuación  $\ddot{\rho} = -g$ , es decir, en la caída libre de la masa  $m_2$ .

### 3.4. Constantes de movimiento

El carácter cíclico de la coordenada  $\varphi$  (es decir, el hecho de que  $\mathcal{L}$  no dependiera explícitamente de  $\varphi$ ) permitió encontrar una de las constantes o integrales de movimiento,

$$m_1 \rho \dot{\varphi}^2 = \ell. \quad (115)$$

Tal vez en Física 1 esta conservación se les hubiera escapado, pero seguramente no habrían dejado de advertir que la energía mecánica en este problema es también una constante de movimiento. Basándose en que no actúan fuerzas disipativas y en la naturaleza conservativa de la fuerza gravitatoria hubieran escrito

$$T + V = \mathcal{E} = \text{constante}. \quad (116)$$

En Mecánica Clásica existe un resultado más general que dice que si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces las soluciones de las ecuaciones de movimiento son tales que se conserva la cantidad

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (117)$$

La demostración está al final de las notas. El ejemplo más sencillo es el de una partícula en una dimensión

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x). \quad (118)$$

Tenemos

$$h(x, \dot{x}) = \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) - \mathcal{L}(x, \dot{x}) = m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x). \quad (119)$$

Es decir, la conservación de  $h$  es equivalente en este caso a la conservación de la energía mecánica. El hecho de que se conserve se puede verificar directamente,

$$\frac{d}{dt} h(x, \dot{x}) = m \dot{x} \ddot{x} + V'(x) \dot{x} = \dot{x} [m \ddot{x} + V'(x)]. \quad (120)$$

Puesto que estamos evaluando sobre soluciones de la ecuación de movimiento, es

$$m \ddot{x} = -V'(x), \quad (121)$$

luego

$$\frac{d}{dt} h(x, \dot{x}) = 0. \quad (122)$$

Otro resultado importante es que si  $T$  es una función homogénea de segundo grado en las velocidades generalizadas y  $V$  no depende de ellas, entonces  $h$  es la energía mecánica,

$$h = T + V, \quad (123)$$

con independencia de que se conserve o no. (La demostración está al final de las notas).

Lo condición de homogeneidad significa que

$$T(\mathbf{q}, \lambda \dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda^2 T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (124)$$

Esta es una propiedad muy frecuente, debido a que  $T$  suele ser cuadrática en las velocidades generalizadas. Una función estrictamente cuadrática es, en efecto, homogénea de grado dos; por ejemplo, consideremos

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2. \quad (125)$$

Luego,

$$f(\lambda x, \lambda y) = a(\lambda x)^2 + b(\lambda x)(\lambda y) + c(\lambda y)^2 = \lambda^2 f(x, y). \quad (126)$$

Así, en el problema de la guía,

$$T(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m_1\rho^2\dot{\varphi}^2 \quad (127)$$

es cuadrática en  $\dot{\rho}$  y  $\dot{\varphi}$ . Hasta podría contener términos de la forma

$$f(\rho, \varphi)\dot{\rho}\dot{\varphi} \quad (128)$$

y seguiría valiendo esa propiedad.

Los dos hechos notorios que debemos apuntar son:

- Si  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente del tiempo, entonces  $h$  no depende explícitamente del tiempo y además se conserva.
- Si  $T$  es función homogénea de grado dos en las velocidades y  $V$  no depende de ellas, entonces  $h$  es la energía mecánica.

(Notar que el último inciso no depende de la conservación de  $h$ .) En el problema de la guía ocurren las dos cosas,  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente del tiempo,  $T$  es cuadrática en las velocidades y  $V$  es función sólo de  $\rho$ . Entonces  $h$  se conserva y además  $h = T + V$ ,

$$h = T + V \equiv \mathcal{E} = \text{constante}. \quad (129)$$

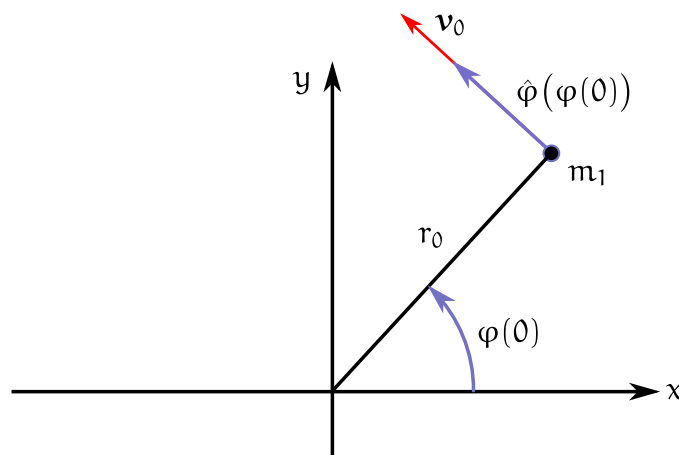
(En otros problemas,  $h$  se conserva pero no es la energía, o  $h$  es la energía pero no se conserva). Esta ley de conservación puede reemplazar a una de las ecuaciones de Euler-Lagrange, con la ventaja de que ahora es una ecuación en derivadas primeras,

$$h(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m_1\rho^2\dot{\varphi}^2 - m_2g(L - \rho) = \mathcal{E}. \quad (130)$$

En resumen, en este problema tenemos de manera inmediata dos integrales de movimiento,  $\ell$  y  $\mathcal{E}$ , y las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser reemplazadas por el par de ecuaciones de conservación

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m_1\rho^2\dot{\varphi}^2 - m_2g(L - \rho) = \mathcal{E}, \\ m_1\rho^2\dot{\varphi} = \ell. \end{cases} \quad (131)$$

En el enunciado dan como ejemplo una condición inicial determinada.



La partícula  $m_1$  está a una distancia  $r_0$  del origen y tiene una velocidad perpendicular a la cuerda

$$\rho(0) = r_0, \quad (132)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1(0) = v_0 \hat{\varphi}(\varphi(0)). \quad (133)$$

Pero como en general es

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\rho} \hat{\rho}(\varphi) + \rho \dot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi), \quad (134)$$

la condición inicial implica

$$\dot{\rho}(0) = 0, \quad (135)$$

$$r_0 \dot{\phi}(0) = v_0 \Rightarrow \dot{\phi}(0) = \frac{v_0}{r_0}. \quad (136)$$

Las constantes de movimiento serán

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - m_2 (L - r_0), \quad (137)$$

$$\ell = m_1 r_0 v_0. \quad (138)$$

### 3.5. El problema unidimensional equivalente

Si existe un número suficiente de integrales de movimiento, el problema puede reducirse a un problema unidimensional: basta con resolver es una ecuación diferencial en una variable. Esto es típico de los problemas de fuerzas centrales, pero no es patrimonio exclusivo de estos problemas. En el problema que estamos viendo esa reducción es posible. La ecuación de conservación para  $\ell$ ,

$$m_1 \rho^2 \dot{\phi} = \ell, \quad (139)$$

permite eliminar  $\dot{\phi}$  en términos de  $\rho$ ,

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{m_1 \rho^2}. \quad (140)$$

Reemplazando en la ecuación de conservación de la energía resulta

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\rho}^2 + \frac{\ell^2}{2m_1 \rho^2} - m_2 g (L - \rho) = \mathcal{E}. \quad (141)$$

El término constante  $m_2 g L$  puede absorberse en el segundo miembro, redefiniendo la constante  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} + m_2 g L \rightarrow \mathcal{E}. \quad (142)$$

En definitiva el problema unidimensional equivalente está regido por la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\rho}^2 + \frac{\ell^2}{2m_1 \rho^2} + m_2 g \rho = \mathcal{E}. \quad (143)$$

Esta es nuestra ecuación diferencial en una variable. Si encontramos  $\rho(t)$ , podemos calcular  $\varphi(t)$  integrando la ecuación (140),

$$\varphi = \int dt \frac{\ell}{m_1 \rho^2(t)}. \quad (144)$$

Recuerden que una ley de conservación del tipo de la ec. (143) puede ponerse en la forma de una ecuación de Newton: derivándola respecto del tiempo se obtiene

$$(m_1 + m_2)\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{\ell^2}{m_1\rho^3}\dot{\rho} + m_2g\dot{\rho} = 0. \quad (145)$$

Cancelando el factor común  $\dot{\rho}$ ,

$$(m_1 + m_2)\ddot{\rho} - \frac{\ell^2}{m_1\rho^3} - m_2g = 0. \quad (146)$$

Esta ecuación tiene la forma

$$M\ddot{\rho} = F_{\text{ef}}(\rho). \quad (147)$$

Al mismo resultado puede llegarse directamente a través de las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{\rho} - m_1\dot{\varphi}^2\rho = -m_2g, \\ m_1\rho^2\dot{\varphi} = \ell. \end{cases} \quad (148)$$

Usando la segunda ecuación para despejar  $\dot{\varphi}$  y reemplazando en la primera se recupera la ec. (146).

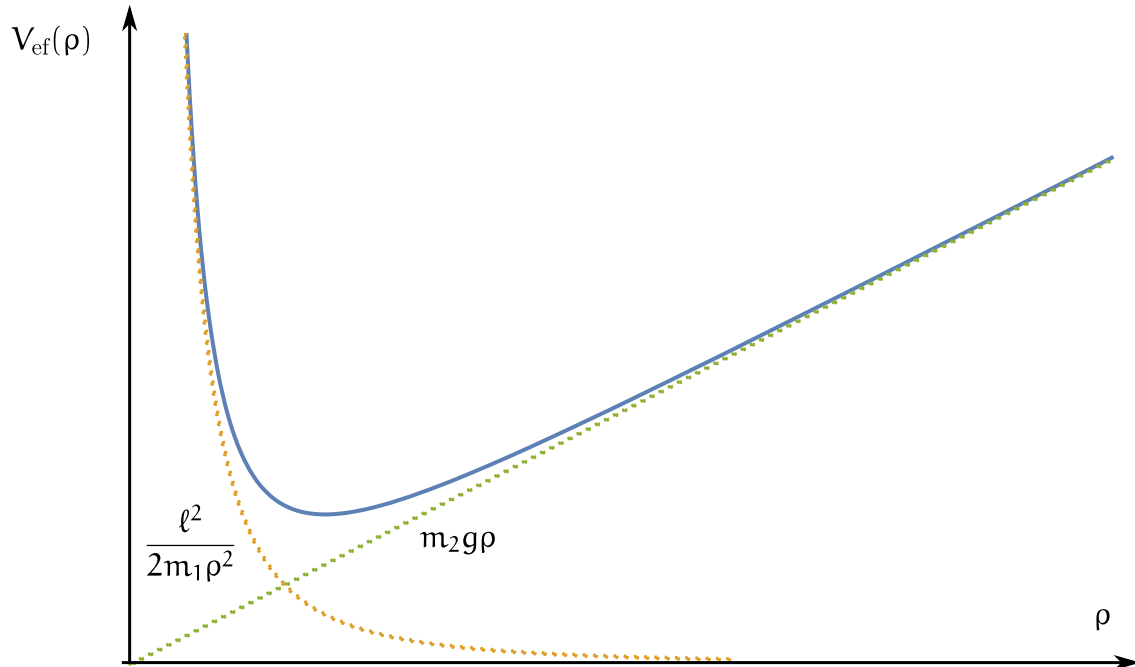
La importancia del problema unidimensional equivalente es que permite estudiar propiedades generales del movimiento sin necesidad de resolver necesariamente la ecuación diferencial. Es usual que el problema unidimensional equivalente sea expresable como la conservación de la energía de una partícula que se mueve en una dimensión bajo cierto potencial efectivo. En verdad, la ecuación (143) tiene la forma de una ecuación de conservación para una partícula de masa  $m = m_1 + m_2$  que se mueve sobre el eje  $\rho$  sometida a un potencial efectivo; es decir,

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{ef}}(\rho) = \mathcal{E}, \quad (149)$$

donde

$$V_{\text{ef}}(\rho) = \frac{\ell^2}{2m_1\rho^2} + m_2g\rho. \quad (150)$$

La forma del potencial dice mucho acerca de los movimientos posibles. Si  $\ell$  no es cero, el potencial tiene el aspecto que muestra la figura.



Las condiciones iniciales fijan el valor de  $\mathcal{E}$  y regulan la rapidez con la que el potencial diverge cuando  $\rho \rightarrow 0$ . Cuanto mayor es  $\ell$ , más pronunciada es esa divergencia.

La ecuación de conservación de la energía puede reescribirse en la forma

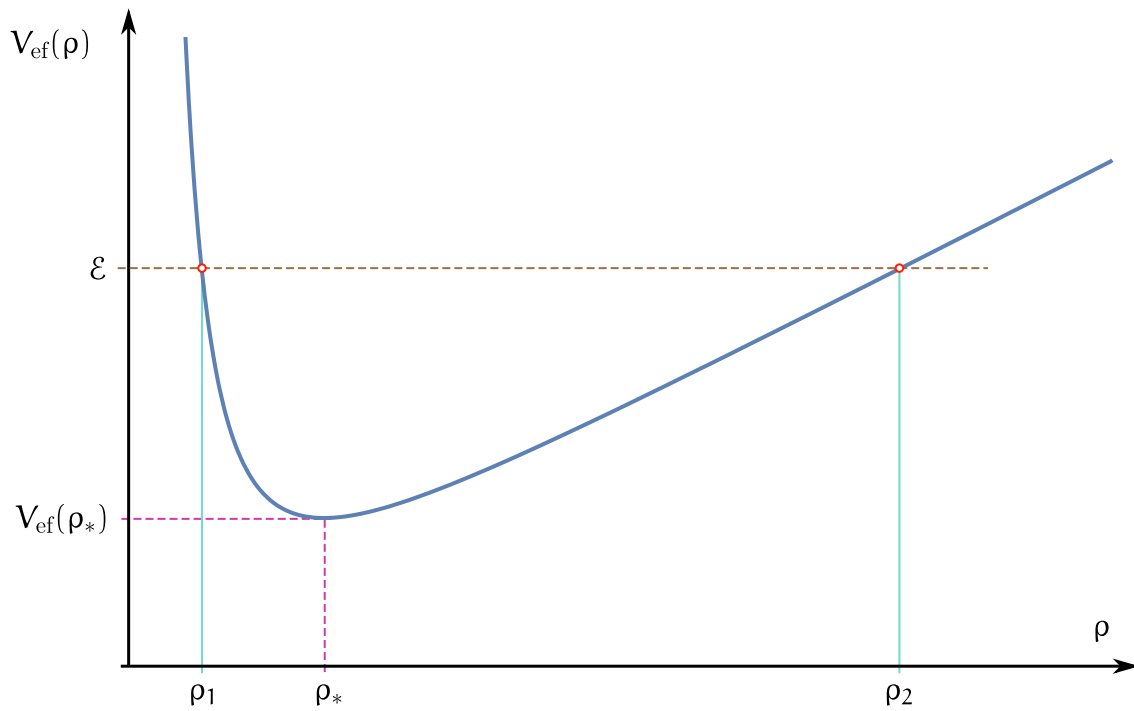
$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = \mathcal{E} - V_{\text{ef}}(\rho). \quad (151)$$

Puesto que el primer miembro es mayor o igual a cero, fijado el valor de  $\mathcal{E}$ , el movimiento ocurre en la región en la que

$$V_{\text{ef}}(\rho) \leq \mathcal{E}, \quad (152)$$

esto es, en el intervalo  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ , como muestra la figura siguiente.





Una característica interesante es que  $\rho$  no puede hacerse cero. Siempre se choca con la barrera de potencial impuesta por el momento angular. La partícula  $m_1$  nunca puede alcanzar el centro de la mesa, aún cuando el peso de  $m_2$  se arbitrariamente grande. En el otro sentido, podríamos tener una situación en la que  $\rho$  sea igual a  $L$ , pero esa situación requiere un análisis especial, porque se produciría un freno repentino. Asumiremos entonces que  $\rho \leq L$ .

Un punto que fija escalas características de energía y longitud es el mínimo del potencial. Para encontrarlo planteamos la ecuación

$$V'_{\text{ef}}(\rho) = 0, \quad (153)$$

que implica

$$-\frac{\ell^2}{m_1 \rho^3} + m_2 g = 0. \quad (154)$$

La solución es

$$\rho_* = \left( \frac{\ell^2}{m_1 m_2 g} \right)^{1/3}, \quad (155)$$

y corresponde a una energía

$$V_{\text{ef}}(\rho_*) = \frac{3}{2} \left( \frac{\ell^2 m_2^2 g^2}{m_1} \right)^{1/3}. \quad (156)$$

Dado un valor de  $\varepsilon$  mayor al valor mínimo del potencial, la recta  $\varepsilon$  intersecta a la

gráfica del potencial en dos puntos. El movimiento en  $\rho$  tiene lugar entre esos dos valores extremos. Esos puntos se llaman puntos de retorno y la condición que los define es que en ellos  $\dot{\rho} = 0$ , lo que implica, como es obvio en la figura, que

$$V_{\text{ef}}(\rho) = \mathcal{E}. \quad (157)$$

En este problema en particular los puntos de retorno satisfacen la ecuación

$$\frac{\ell^2}{2m_1\rho^2} + m_2g\rho = \mathcal{E}. \quad (158)$$

Esta es una ecuación cúbica en  $\rho$ ,

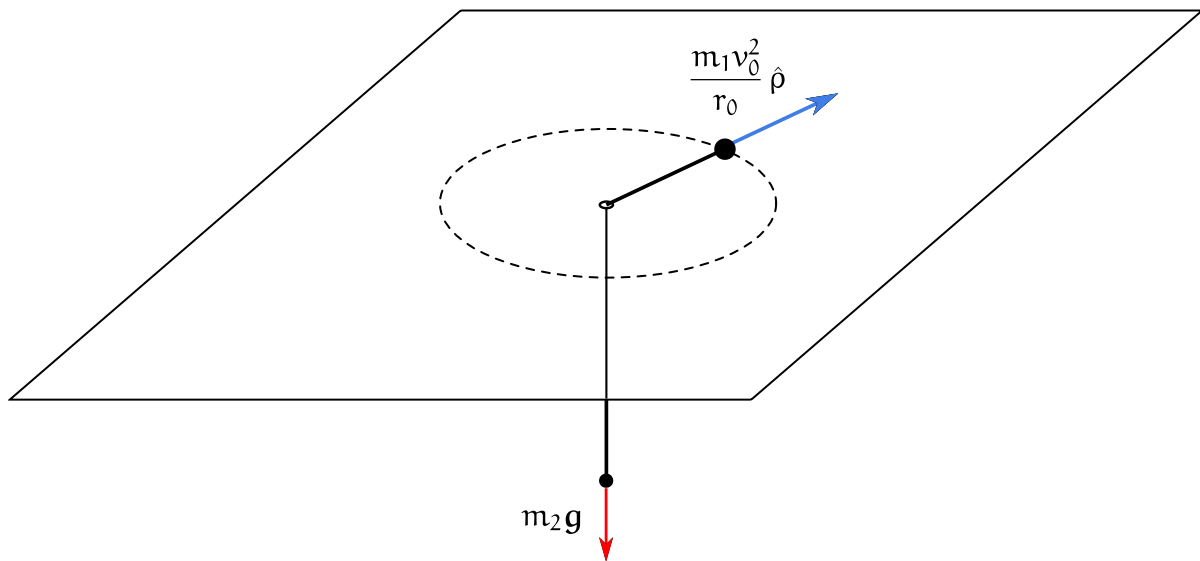
$$\rho^3 - a\rho^2 + b = 0, \quad (159)$$

donde

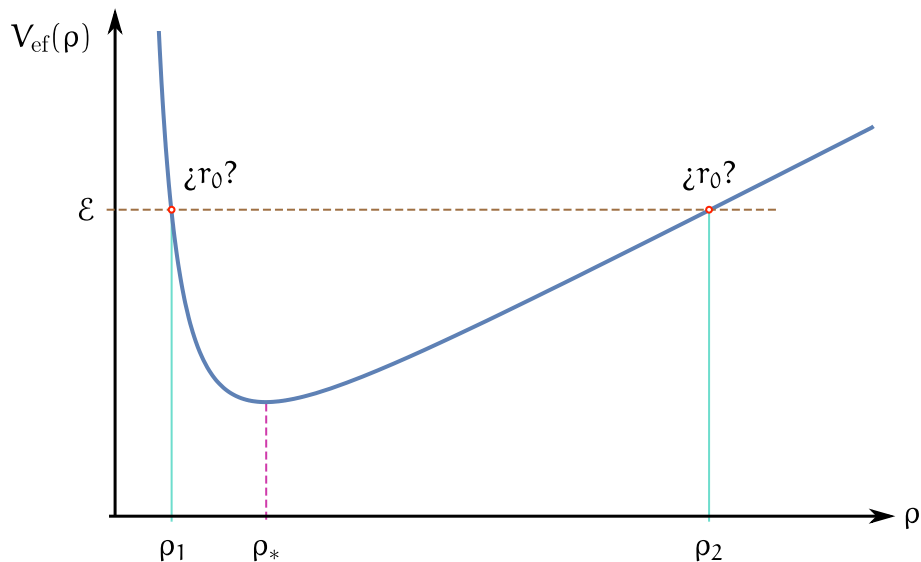
$$a = \frac{\mathcal{E}}{m_2g}, \quad b = \frac{\ell^2}{2m_1m_2g} = \frac{1}{2}\rho_*^3. \quad (160)$$

Para condiciones iniciales arbitrarias, las soluciones físicas  $\rho_1$  y  $\rho_2$  tendrán en general expresiones muy complicadas, pero con condiciones como las del enunciado es posible encontrar los puntos de retorno con relativa facilidad.

Si inicialmente  $\rho = r_0$  y  $\dot{\rho} = 0$ , tal como en las condiciones del enunciado, entonces uno de los puntos de retorno ya es conocido; es  $\rho_{\text{ret}} = r_0$ . Aún no sabemos si este punto es el mínimo o el máximo. Es más o menos intuitivo pensar que será un máximo si el peso de  $m_2$  es mayor que la fuerza centrífuga, y viceversa.



En términos de la gráfica del potencial efectivo, lo que hay que analizar es si la derivada de  $V_{\text{ef}}$  en  $r_0$  es positiva o negativa. Si es positiva,  $r_0$  será el máximo valor de  $\rho$ , y viceversa.



Escrito en términos de  $b$  el potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(\rho) = \left( \frac{b}{\rho^2} + \rho \right) m_2 g. \quad (161)$$

Su derivada en  $r_0$  es

$$V'_{\text{ef}}(r_0) = \left( -\frac{2b}{r_0^3} + 1 \right) m_2 g. \quad (162)$$

Esta cantidad es positiva si

$$2b < r_0^3. \quad (163)$$

Notemos que, de acuerdo a la ec. (160),  $2b = \rho_*^3$ , de modo que la ecuación anterior es simplemente un criterio que dice que el punto de retorno  $r_0$  es  $\rho_2$  si  $r_0$  está a la derecha del mínimo del potencial, y es  $\rho_1$  si está a la izquierda. Leído así, es un resultado trivial asociado a la forma particularmente simple del potencial.

Para escribir la condición anterior en términos de los datos del problema, recordemos que

$$b = \frac{\ell^2}{2m_1 m_2 g} = \frac{m_1^2 v_0^2 r_0^2}{2m_1 m_2 g} = \frac{m_1 v_0^2 r_0^2}{2m_2 g}. \quad (164)$$

Luego, en función de las condiciones iniciales la condición (163) se lee como

$$\frac{m_1 v_0^2}{r_0} < m_2 g. \quad (165)$$

Tal como habíamos anticipado, si la fuerza centrífuga es menor que el peso de  $m_2$ , entonces  $r_0$  es el punto de retorno que corresponde al máximo de  $\rho$ , es decir,  $\rho_2$ .

Queda el problema de encontrar el otro punto de retorno. Puesto que se trata de las raíces de una ecuación cúbica, a simple vista la cuestión no parece llevar demasiado lejos, a menos que se usen las complicadas fórmulas de los ceros de los polinomios de tercer grado. Sin embargo, cuando se conoce una de las raíces de un polinomio, es posible reducir en uno el grado de la ecuación. Tratándose de una cúbica, esta reducción vuelve fácilmente resoluble el problema de encontrar las otras raíces. Debido a que  $r_0$  es una raíz, la ec. (159) que determina los puntos de retorno debe poder escribirse como

$$\rho^3 - a\rho^2 + b = (\rho - r_0)(\rho^2 + A\rho + B), \quad (166)$$

lo que implica

$$r_0 - A = a, \quad (167)$$

$$r_0A - B = 0, \quad (168)$$

$$r_0B = -b. \quad (169)$$

En estas ecuaciones está implícito que  $r_0^3 - ar_0^2 + b = 0$ . Si despejamos A y B encontramos

$$A = r_0 - a, \quad (170)$$

$$B = r_0(r_0 - a), \quad (171)$$

$$B = -\frac{b}{r_0}. \quad (172)$$

Este sistema de tres ecuaciones para dos parámetros es compatible sólo si  $r_0$  es raíz de la ecuación cúbica original. Lo más cómodo para escribir la ecuación cuadrática

$$\rho^2 + A\rho + B = 0 \quad (173)$$

es valerse de la ec. (171) para expresar A en términos de B, es decir,  $A = B/r_0$ . Entonces

$$\rho^2 - \frac{b}{r_0^2}\rho - \frac{b}{r_0} = 0. \quad (174)$$

Las raíces son

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{r_0^2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{r_0^4} + \frac{4b}{r_0}} \right). \quad (175)$$

La raíz física es la de signo positivo, puesto que la otra da un valor negativo de  $\rho$ .

Finalmente, el otro punto de retorno está en

$$\rho_+ = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{r_0^2} + \sqrt{\frac{b^2}{r_0^4} + \frac{4b}{r_0}} \right). \quad (176)$$

Queda como ejercicio verificar que  $\rho_+$  es menor que  $r_0$  cuando se cumple (165),

$$\frac{m_1 v_0^2}{r_0} < m_2 g, \quad (177)$$

lo que recupera el criterio que obtuvimos antes para discriminar si  $r_0$  era el valor máximo o mínimo de  $\rho$ .

Para los que tienen fundados reparos respecto a las unidades en la ec. (176), dividamos por  $r_0$  y recordemos que  $b$  tiene unidades de longitud al cubo:

$$\frac{\rho_+}{r_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{r_0^3} + \sqrt{\left(\frac{b}{r_0^3}\right)^2 + \frac{4b}{r_0^3}} \right). \quad (178)$$

Ahora es evidente que al menos las unidades están bien.

## Órbita circular

Se da un caso especial cuando la energía  $\mathcal{E}$  es igual al mínimo del potencial. En esta situación el valor de  $\rho$  es constante. Los dos raíces de la ecuación  $V_{ef}(\rho) = \mathcal{E}$  coinciden. Cuando se da esta condición, el radio de giro de  $m_1$  es constante,  $m_2$  se mantiene a una altura fija y la velocidad de giro de  $m_1$  es tal que contrarresta exactamente el peso de  $m_2$ . A partir de la expresión de  $V'_{ef}(\rho)$ , igualándola a cero, es fácil comprobar que para una velocidad de giro  $\dot{\phi} = \omega$ , el radio de la órbita circular está dado por la relación

$$m_1 r_0 \omega^2 = m_2 g. \quad (179)$$

Al mismo resultado se llega si se plantea la igualdad de los dos puntos de retorno,  $r_0 = \rho_+$ . En efecto, debería ser

$$\frac{1}{2} \left( \frac{b}{r_0^2} + \sqrt{\frac{b^2}{r_0^4} + \frac{4b}{r_0}} \right) = r_0. \quad (180)$$

Pasando el primer término al segundo miembro y elevando al cuadrado resulta

$$r_0^2 = \frac{2b}{r_0} = \frac{m_1 \omega^2 r_0^3}{m_2 g}, \quad (181)$$

y de aquí se recupera la expresión (179).

### 3.6. La tensión de la cuerda

Si resolvemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, la tensión de la cuerda puede ser obtenida inmediatamente escribiendo las ecuaciones de Newton de cualquiera de las dos partículas. Lo más sencillo es escribir la ecuación para la segunda partícula

$$m_2 \ddot{z} = \tau - m_2 g. \quad (182)$$

Usando la condición de vínculo  $L - \rho = -z$ , queda

$$\tau = (\ddot{\rho} + g)m_2. \quad (183)$$

Ahora bien, el haber encontrado integrales primeras de movimiento permite en general reducir este tipo de fórmulas a expresiones que sólo involucren a las coordenadas. Es decir, obtener expresiones de la forma

$$\tau(\rho) = f(\rho). \quad (184)$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada a  $\rho$ ,

$$(m_1 + m_2)\ddot{\rho} - m_1 \rho \dot{\phi}^2 = -m_2 g, \quad (185)$$

permite encontrar  $\ddot{\rho}$  en términos de  $\rho$  y  $\dot{\phi}$ ,

$$\ddot{\rho} = \frac{-m_2 g + m_1 \rho \dot{\phi}^2}{m_1 + m_2}. \quad (186)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación del momento angular permite eliminar  $\dot{\phi}$  en términos de  $\rho$ ,

$$m_1 \rho^2 \dot{\phi} = \ell \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\ell}{m_1 \rho^2}. \quad (187)$$

Combinando ambos resultados queda

$$\ddot{\rho}(\rho) = \frac{1}{m_1 + m_2} \left( -m_2 g + \frac{\ell^2}{m_1 \rho^3} \right). \quad (188)$$

Finalmente, obtenemos la tensión como función únicamente de  $\rho$ ,

$$\tau(\rho) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( m_1 g + \frac{\ell^2}{m_1 \rho^3} \right). \quad (189)$$

Deberían poder razonar la compatibilidad de esta expresión en los casos  $\ell = 0$  y  $m_1$  mucho mayor o mucho menor que  $m_2$

### 3.7. Adimensionalización del problema

Hagamos una lista con los parámetros que aparece en el enunciado del problema:  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $r_0$ ,  $v_0$ ,  $g$  y  $L$ . En realidad hemos visto que si la masa  $m_2$  se mueve sólo en la dirección vertical, el valor de  $L$  no es importante. De lo único que debemos cuidarnos es de que  $\rho$  siempre sea menor o igual a  $L$ , para evitar el choque de la masa  $m_2$  con el centro de la mesa. Descontado  $L$ , tenemos todavía cinco parámetros; digamos,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $r_0$ ,  $v_0$  y  $g$ .

Si quisiéramos hacer una simulación numérica, deberíamos recorrer un espacio de cinco parámetros para explorar los movimientos posibles. Ocurre que esto es sólo aparente. El espacio de parámetros es mucho menor. Uno tiene la libertad de fijar las escalas de longitud, masa y tiempo de modo de hacer que tres de los parámetros tomen el valor unidad. Este procedimiento puede sonar antipático. Sin embargo, existe otra forma (equivalente) en la que pueden eliminarse parámetros, es mediante la adimensionalización de las ecuaciones.

El camino más inequívoco es trabajar con las ecuaciones de Euler-Lagrange, ecs. (112), que pueden llevarse a la forma

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{\rho} - m_1\rho\dot{\varphi}^2 = -m_2g, \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (190)$$

El problema completo incluye las condiciones iniciales,

$$\begin{cases} \rho(0) = r_0, \\ \dot{\rho}(0) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \\ \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{r_0}. \end{cases} \quad (191)$$

Sin pérdida de generalidad hemos tomado  $\varphi(0) = 0$ . Están a la vista los cinco parámetros de los que hablamos más arriba,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $g$ ,  $r_0$  y  $v_0$ . La idea es eliminarlos uno a uno. Dividiendo la primera ecuación de Euler-Lagrange por  $r_0$  se obtiene

$$(m_1 + m_2)\frac{\ddot{\rho}}{r_0} - m_1\frac{\rho_0}{r_0}\dot{\varphi}^2 = -m_2\frac{g}{r_0}. \quad (192)$$

Podemos formar la variable adimensional

$$u = \frac{\rho}{r_0}, \quad (193)$$

con lo que la ecuación se lee como

$$(m_1 + m_2)\ddot{u} - m_1 u \dot{\varphi}^2 = -m_2 \frac{g}{r_0}. \quad (194)$$

Esto adimensionaliza la coordenada radial. Notar además que  $u(0) = 1$ . Ahora bien,  $g/r_0$  tiene dimensiones de frecuencia al cuadrado, de manera que permite definir un tiempo característico  $t_0$  dado por

$$t_0^2 = \frac{r_0}{g}. \quad (195)$$

Si definimos la variable adimensional

$$\tau = \frac{t}{t_0} \quad (196)$$

tendremos, por ejemplo,

$$\dot{r} = \frac{1}{t_0} r', \quad \ddot{r} = \frac{1}{t_0^2} r'', \quad \text{etc.}, \quad (197)$$

donde

$$r' = \frac{df}{d\tau}, \quad \text{etc.} \quad (198)$$

Esto adimensionaliza la variable temporal. Así, la ec. (194) se reescribe como

$$(m_1 + m_2) \frac{1}{t_0^2} u'' - m_1 u \left( \frac{\varphi'}{t_0} \right)^2 = -\frac{m_2}{t_0^2}. \quad (199)$$

En todos los términos figura un factor  $1/t_0^2$ . Entonces,

$$(m_1 + m_2) u'' - m_1 u \varphi'^2 = -m_2. \quad (200)$$

Podemos ir más allá y definir el parámetro adimensional

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (201)$$

Dividiendo la ec. (200) por  $m_1 + m_2$  resulta

$$u'' - (1 - \mu) u \varphi'^2 = -\mu. \quad (202)$$

La otra ecuación de Euler-Lagrange se trata de manera análoga, y se llega a que

$$u \varphi'' + 2u' \varphi' = 0. \quad (203)$$



Las condiciones iniciales para  $u$  y  $\varphi$  en la nueva variable  $\tau$  son

$$\begin{cases} u(0) = 1, \\ u'(0) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = \alpha, \end{cases} \quad (204)$$

donde

$$\alpha = \frac{v_0}{r_0} t_0. \quad (205)$$

El sistema completo de ecuaciones y condiciones iniciales es entonces

$$\begin{cases} u'' - (1 - \mu)u\varphi'^2 = -\mu, \\ u\varphi'' + 2u'\varphi' = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0, \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = \alpha. \end{cases} \quad (206)$$

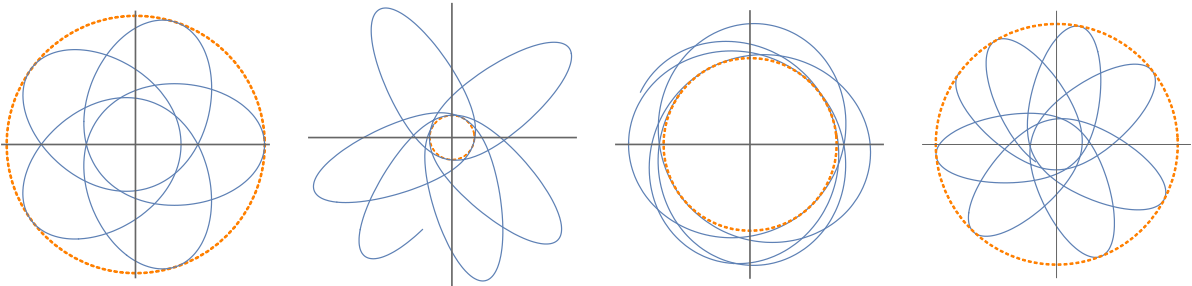
¿Qué es lo importante aquí? Lo esencial es que redujimos el número de parámetros de los que depende la solución del problema. En todo el problema ahora sólo aparecen dos parámetros,  $\mu$  y  $\alpha$ . Si queremos estudiar el comportamiento de las soluciones no necesitamos explorar el espacio de parámetros de cinco dimensiones. Lo anterior es muy cómodo para hacer simulaciones numéricas. No es necesario variar  $g$  y  $m_1$  y  $m_2$  y  $v_0$  y  $r_0$  para ver cómo cambian las órbitas. Los únicos valores que importan son los de  $\mu$  y  $\alpha$ . Dar  $\mu$  es equivalente a dar la relación entre las dos masas. El valor de  $\alpha$ , por otro lado, cuantifica la importancia relativa de los términos centrífugos y gravitatorios de la aceleración,

$$\alpha^2 = \frac{v_0^2}{r_0^2} t_0^2 = \frac{v_0^2/r_0}{g}. \quad (207)$$

La manera de adimensionalizar no es única, debido a la libertad que hay en la elección de las variables y de los parámetros adimensionales.

Queda propuesto como ejercicio que adimensionalicen el problema al nivel de las ecuaciones de conservación para el problema unidimensional equivalente. También pueden fijarse qué sucede si en lugar de  $r_0$  usan  $\rho_*$  como longitud característica, donde  $\rho_*$  es el valor de  $\rho$  donde el potencial efectivo alcanza su valor mínimo.

La figura muestra cuatro ejemplos de trayectorias para la partícula  $m_1$ .



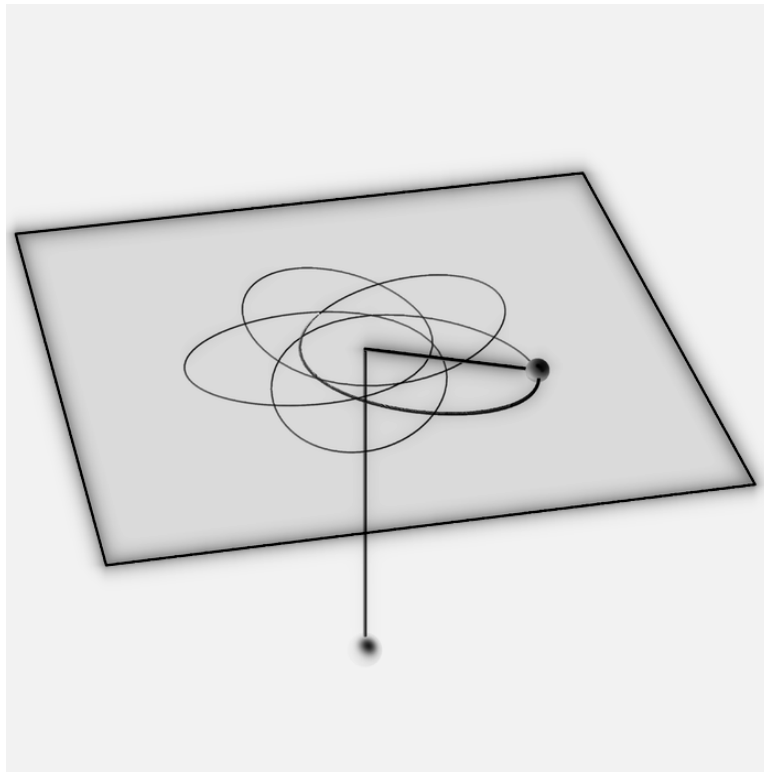
El círculo punteado indica el radio  $r_0$ . Las figuras fueron generadas integrando numéricamente las ecuaciones de Euler-Lagrange en el programa *Mathematica*. Pueden reproducirlas a partir del siguiente cuadro de comandos:

```
DynamicModule[{αpr, Tmax, μpr},
  Manipulate[

    Module[{u, t, φ},
      sol = NDSolve[
        {
          u''[t] - (1 - μpr) u[t] φ'[t]^2 + μpr == 0, u[t] φ''[t] + 2 u'[t] φ'[t] == 0,
          u[0] == 1,
          u'[0] == 0,
          φ[0] == 0,
          φ'[0] == αpr
        },
        {u, φ},
        {t, 0, tmax = 100}
      ];
    ];

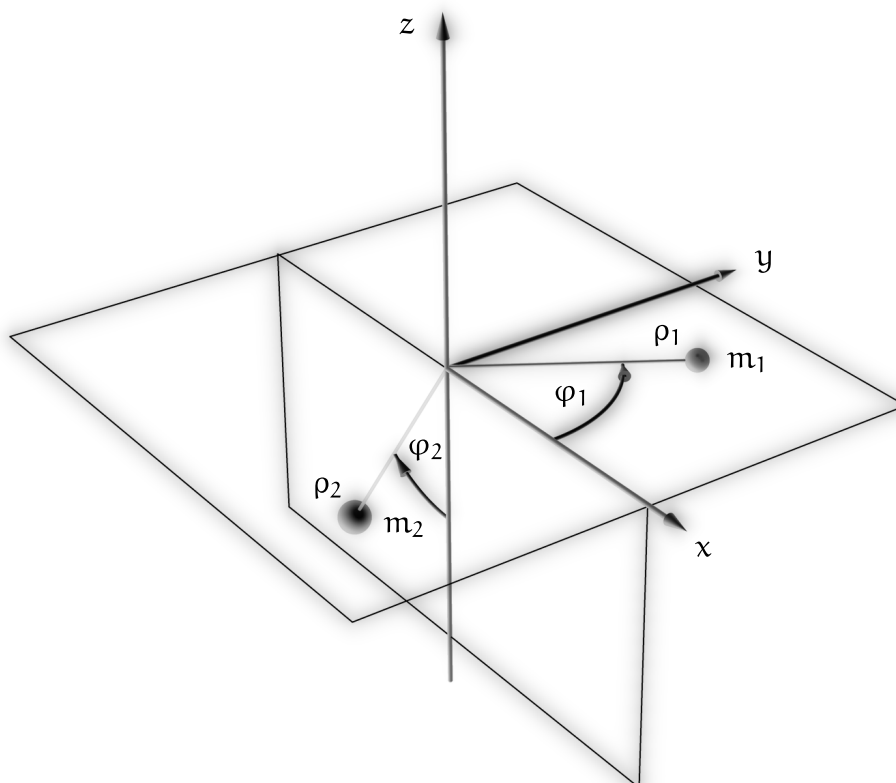
    usol = sol[[1]][[1]][[2]];
    φsol = sol[[1]][[2]][[2]];
    ParametricPlot[usol[t] {Cos[φsol[t]], Sin[φsol[t]]}, {t, 0, Tmax}],
    {{αpr, 0.429}, 0.001, 10, 0.001, Appearance → "Open"},
    {{Tmax, 21.511}, 0.001, tmax, 0.01, Appearance → "Open"},
    {{μpr, 0.5}, 0.001, 1, 0.001, Appearance → "Open"},
    TrackedSymbols => {αpr, Tmax, μpr}
  ]
]
```

Es posible que no puedan copiar directamente este código desde el pdf. Este código junto con otro material suplementario estará disponible en la página de la materia.

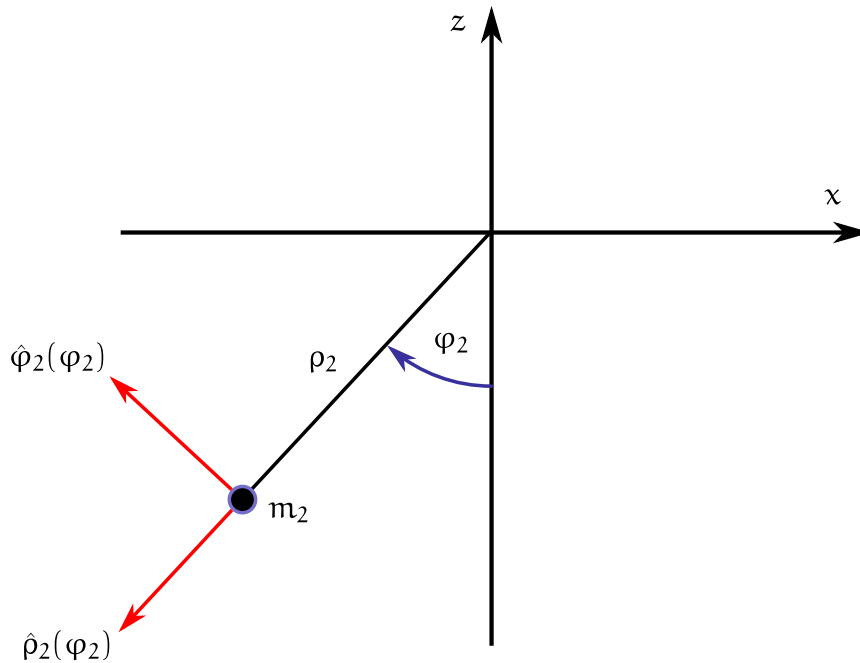


### 3.8. El caso en que $m_2$ se puede mover sobre un plano vertical

Si en lugar de obligar a  $m_2$  a moverse sobre el eje  $z$ , le permitimos desplazarse sobre un plano vertical, que puede ser por ejemplo el plano  $xz$ , el sistema gana un grado de libertad.



Para dar la posición de  $m_2$  necesitamos conocer el ángulo que forma con el eje  $z$ . Si definimos versores en el plano  $xz$  como muestra la figura,



la posición de  $m_2$  quedará definida como

$$\mathbf{r}_2 = \rho_2 \hat{\rho}_2(\varphi_2). \quad (208)$$

No debemos olvidar que las dos masas siguen unidas por la cuerda, de modo que

$$\rho_1 + \rho_2 = L, \quad (209)$$

donde ahora llamamos  $\rho_1$  y  $\varphi_1$  a las coordenadas polares de la masa  $m_1$  sobre el plano  $xy$ . La única coordenada extra que estamos introduciendo es el ángulo  $\varphi_2$ , medido como se muestra en la figura anterior. Las variables  $\rho_2$  y  $\varphi_2$  definen un sistema de coordenadas polares en el plano  $xz$ . Podemos aprovechar entonces los resultados usuales para la velocidad y su módulo al cuadrado. Tendremos

$$\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \dot{\rho}_2^2 + \rho_2^2 \dot{\varphi}_2^2. \quad (210)$$

Usando la condición de vínculo resulta

$$\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \dot{\rho}_1^2 + (L - \rho_1)^2 \dot{\varphi}_2^2. \quad (211)$$

La energía cinética es ahora

$$\begin{aligned} T(\rho_1, \varphi_1, \varphi_2) &= \frac{1}{2}m_1(\dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2\dot{\varphi}_1^2) + \frac{1}{2}m_2[\dot{\rho}_1^2 + (L - \rho_1)^2\dot{\varphi}_2^2] \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\rho_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(L - \rho_1)^2\dot{\varphi}_2^2. \end{aligned} \quad (212)$$

La energía potencial es

$$V(\rho_1) = -m_2g\rho_2 \cos \varphi_2 = -m_2g(L - \rho_1) \cos \varphi_2. \quad (213)$$

El lagrangiano,

$$\mathcal{L}(\rho_1, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\rho_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(L - \rho_1)^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2g(L - \rho_1) \cos \varphi_2. \quad (214)$$

La coordenada  $\varphi_1$  sigue siendo cíclica (es decir, no aparece explícitamente en  $\mathcal{L}$ ), pero la coordenada  $\varphi_2$  aparece a través del potencial. Las tres ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_1}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} = \ell, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_2}. \end{cases} \quad (215)$$

Explícitamente, luego de cancelar algunos factores comunes, las ecuaciones anteriores se leen como

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{\rho}_1 = m_1\rho_1\dot{\varphi}_1^2 - m_2(L - \rho_1)\dot{\varphi}_2^2 - m_2g \cos \varphi_2, \\ m_1\rho_1^2\dot{\varphi}_1 = \ell, \\ (L - \rho_1)\ddot{\varphi}_2 - 2\dot{\rho}_1\dot{\varphi}_2 = -g \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (216)$$

Estas expresiones coinciden con las obtenidas a partir de las ecuaciones de Newton, ecs. (79), con la única diferencia de que la segunda ecuación ahora está integrada una vez.

Siguen siendo válidas las conservaciones que ya habíamos encontrado originalmente, es decir, la conservación del momento angular de la partícula  $m_1$  y la conservación de la energía total, que ahora tiene una expresión un poco más complicada, debido a los nuevos términos en la energía cinética y a la modificación de la energía potencial. Pero hay una diferencia sustancial: antes teníamos dos coordenadas y dos integrales de movimiento. Ahora tenemos tres coordenadas, pero seguimos conociendo únicamente dos integrales de movimiento. No vamos a poder reducir el problema a un problema unidimensional equivalente. Las trayectorias posiblemente serán caóticas.

### 3.9. A modo de ejercicio: coordenadas generalizadas $x$ e $y$

■ Resuelvan el problema 6, en el caso en el que la masa  $m_2$  se mueve sólo verticalmente, usando como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas de la masa  $m_1$ . En particular intenten ver cómo aparece la conservación del momento angular a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. La solución figura más abajo. Traten de mirarla lo menos posible.

**Solución.** Consideremos ahora el sistema de coordenadas generalizadas  $(x, y)$ . Notar que  $x$  e  $y$  son las coordenadas cartesianas de la primera partícula. Aunque se trata de dos partículas, el espacio de configuración es un espacio de dos dimensiones.

Para escribir el lagrangiano,

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) - V(x, y) \quad (217)$$

necesitamos primero calcular la energía cinética. Tratándose de dos partículas eso implica calcular

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2. \quad (218)$$

En términos de las coordenadas generalizadas  $x$  e  $y$  y de sus velocidades, a partir de las definiciones

$$\mathbf{r}_1(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y}, \quad (219)$$

$$\mathbf{r}_2(x, y) = -\left(L - \sqrt{x^2 + y^2}\right)\hat{z}, \quad (220)$$

resultan

$$\dot{\mathbf{r}}_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}, \quad (221)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{z}. \quad (222)$$

Tomando los módulos al cuadrado y sumando queda

$$T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2}m_2\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2}m_2\right)\dot{y}^2 + \frac{xy}{x^2 + y^2}\dot{x}\dot{y}m_2. \quad (223)$$

Por otro lado, la energía potencial es igual a

$$V(x, y) = m_2gz(x, y) = -m_2g(L - \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (224)$$

Finalmente, el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} \left( m_1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} m_2 \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left( m_1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} m_2 \right) \dot{y}^2 + \frac{xy}{x^2 + y^2} \dot{x} \dot{y} m_2 + m_2 g (L - \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (225)$$

Notar que  $x$  e  $y$  aparecen de manera simétrica: intercambiar  $x$  con  $y$  deja invariante al lagrangiano.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta elección de coordenadas generalizadas son bastante complicadas. Alcanza con escribir la ecuación asociada a  $x$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0; \quad (226)$$

la ecuación asociada a  $y$  se obtiene intercambiando  $x$  con  $y$ . En primer lugar es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \left( m_1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \dot{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \dot{y} m_2. \quad (227)$$

Luego, simplificaciones mediante,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= \left( m_1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} m_2 \right) \ddot{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \ddot{y} m_2 \\ &+ \left[ 2 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \dot{x}^2 + \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \dot{y}^2 + \frac{y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \dot{x} \dot{y} \right] m_2. \end{aligned} \quad (228)$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left[ xy^2(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + (y^2 - x^2)y\dot{x}\dot{y} \right] m_2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} m_2 g. \quad (229)$$

Finalmente, la ecuación de Euler-Lagrange asociada a  $x$  es

$$\left( m_1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} m_2 \right) \ddot{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \ddot{y} m_2 + \frac{x(y\dot{x} - x\dot{y})^2}{(x^2 + y^2)^2} m_2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} m_2 g = 0. \quad (230)$$

La ecuación de Euler-Lagrange asociada a  $y$  se obtiene intercambiando  $x$  con  $y$  en la expresión anterior

$$\left( m_1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} m_2 \right) \ddot{y} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \ddot{x} m_2 + \frac{y(y\dot{x} - x\dot{y})^2}{(x^2 + y^2)^2} m_2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} m_2 g = 0. \quad (231)$$

Notemos que si multiplicamos a la segunda ecuación por  $x$  y a la primera por  $y$  y restamos ambos resultados, varios términos se cancelan, obteniéndose una tercera ecuación,

más simple, que puede usarse en lugar de cualquiera de las dos anteriores. En efecto, luego de hacer estas operaciones se obtiene la ecuación

$$\left(m_1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} m_2\right) x\ddot{y} - \left(m_1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} m_2\right) y\ddot{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} (x\ddot{x} - y\ddot{y}) m_2 = 0. \quad (232)$$

Simplificando términos y asumiendo que  $m_1 > 0$ , queda

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0. \quad (233)$$

Esta es una ecuación mucho más sencilla que cualquiera de las dos ecuaciones originales, y además tiene una interpretación muy simple. El truco es escribir  $x\ddot{y} - y\ddot{x}$  como una derivada total. Si sumamos y restamos  $\dot{y}\dot{x}$  obtenemos

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = (x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y}) - (y\ddot{x} + \dot{x}\dot{y}) = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (234)$$

Entonces nuestro resultado se lee como

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0. \quad (235)$$

Pero ahora podemos escribir una ecuación diferencial aún más sencilla, que sólo involucra derivadas primeras,

$$x\dot{y} - y\dot{x} = l, \quad (236)$$

donde  $l$  es una constante que se determina a partir de las condiciones iniciales. Esta constante es la componente  $z$  del momento angular de la partícula  $m_1$  dividido por su masa,  $l = \ell/m_1$ . Dicho sea de paso, el momento angular total es  $\mathbf{L} = \ell \hat{z}$ . La forma misma de la combinación  $x\dot{y} - y\dot{x}$  sugiere un producto vectorial. En verdad

$$\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 = (x \hat{x} + y \hat{y}) \times (\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y}) = (x\dot{y} - y\dot{x}) \hat{z}. \quad (237)$$

Con esta elección de las coordenadas generalizadas no fue para nada trivial ver que había una constante de movimiento  $l$ . En realidad el hecho de saber de antemano que el momento angular debía conservarse nos llevó a ensayar la combinación lineal de las ecuaciones de Euler-Lagrange que resultó en la ley de conservación que buscábamos. En otro caso mucha inspiración hubiera sido necesaria para escribir esa combinación lineal al primer intento.



## 4. Sobre la conservación de $h$

Dijimos que si  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente del tiempo entonces la función  $h$ , definida en general por

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (238)$$

no depende explícitamente del tiempo y además se conserva.

La demostración es sencilla. En general, si admitimos una dependencia explícita de  $\mathcal{L}$  con  $t$  encontramos que la derivada total de  $\mathcal{L}$  respecto del tiempo es

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^N \left[ \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (239)$$

Si  $\mathbf{q}(t)$  es solución de las ecuaciones de movimiento entonces podemos usar la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (240)$$

reescribiendo la ec. (239) como

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (241)$$

Cada término dentro de la suma es una derivada total,

$$\dot{q}_i \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \left[ \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right]. \quad (242)$$

Finalmente,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (243)$$

Agrupando en una misma derivada todas las derivadas totales resulta

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (244)$$

El término sobre el que actúa la derivada en el primer miembro recibe el nombre de función

$h$ , y depende en general de las coordenadas, las velocidades y el tiempo,

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (245)$$

El resultado al que arribamos es que las ecuaciones de Euler-Lagrange implican

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (246)$$

Luego, si  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente del tiempo  $h$  se conserva. Es más, por la forma en la que se ha construido,  $h$  tampoco es una función explícita del tiempo.

Es un paso fundamental en la demostración anterior el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Esas ecuaciones son únicamente válidas para soluciones de las ecuaciones de movimiento. La conservación de  $h$  no quiere decir que la función  $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  sea una constante. Quiere decir que cuando  $h$  se evalúa sobre funciones del tiempo que son soluciones de las ecuaciones de movimiento entonces es una constante. Asimismo, la ec. (246) sólo es válida cuando ambos miembros están evaluados sobre soluciones de las ecuaciones de movimiento.

El hecho de que la función  $h$  dependa de las coordenadas y las velocidades permite leer la ecuación de conservación

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C \quad (247)$$

como una ecuación de primer grado. Una de las ecuaciones de Euler-Lagrange (que son de segundo grado) puede reemplazarse por la ecuación anterior. Suele ser más sencillo trabajar con ecuaciones de primer grado que de segundo.

## 5. Acerca de los casos en los que $h = T + V$

Afirmamos que si  $T$  es una función homogénea de segundo grado en las velocidades generalizadas y  $V$  no depende de ellas, entonces  $h$  es la energía mecánica total. La condición de homogeneidad significa que

$$T(\mathbf{q}, \lambda \dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda^2 T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (248)$$

El teorema de las funciones homogéneas de Euler dice que si  $f(\mathbf{x})$  es homogénea de grado  $n$ , es decir, si

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^n f(\mathbf{x}), \quad (249)$$

entonces

$$\sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = n f(\mathbf{x}). \quad (250)$$

Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = x^2 e^{x/y} \quad (251)$$

es evidentemente homogénea de grado dos. Por otro lado tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} f + \frac{f}{y}, \quad (252)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f. \quad (253)$$

y se verifica el teorema de Euler:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f + x \frac{f}{y} - y \frac{x}{y^2} f = 2f. \quad (254)$$

Aplicado a un lagrangiano cuya energía cinética sea una función homogénea de grado dos en las velocidades y cuyo potencial no dependa de ellas este teorema implica

$$\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 2T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (255)$$

Luego,

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 2T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + V(\mathbf{q}, t) \equiv \mathcal{E}, \quad (256)$$

tal como queríamos demostrar. Observen que este resultado es independiente de la conservación o no de la función  $h$ .