Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2020

Clase práctica del jueves 7/5. Problema 8 de la Guía 2.*

Las dos caras del cálculo variacional

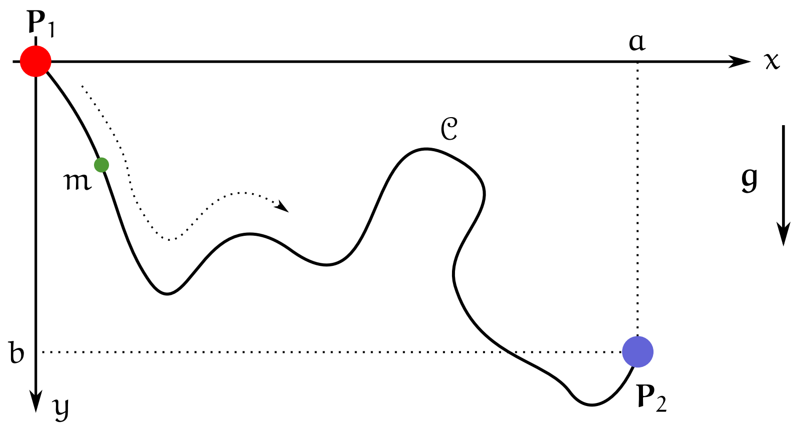
En Mecánica Clásica, los problemas de cálculo variacional son de dos clases. En los de la primera clase, se aplican las herramientas del cálculo variacional para resolver problemas de mecánica. En los de la otra clase, se aplican técnicas del formalismo lagrangiano para resolver problemas de cálculo variacional. Por ejemplo, encontrar la trayectoria de una partícula en tiro oblicuo minimizando la acción dentro de cierta clase de funciones es un problema que usa métodos de cálculo variacional para resolver un problema de mecánica. Es decir, pertenece a la primera clase de problemas. Por otro lado, encontrar la superficie de revolución de área mínima generada por una curva que pasa por dos puntos es un problema de cálculo variacional en donde pueden emplearse resultados del formalismo lagrangiano de la mecánica clásica.

El problema que veremos hoy pertenece a esa segunda clase. Resolveremos un problema de cálculo variacional usando algún resultado de los que ya hemos visto en el contexto de leyes de conservación para un sistema mecánico. Se trata de encontrar la curva que minimiza el tiempo de caída de una partícula entre dos puntos. No debe confundirlos que el problema variacional sea formulado a través de un sistema mecánico. Aquí no hay acciones que minimizar. Las ecuaciones de movimiento son conocidas. El problema no es mecánico sino de cálculo variacional. Sabemos en principio cómo encontrar $\mathbf{r}(t)$ para una partícula que se mueve sobre una curva en un campo gravitatorio uniforme. El problema no es ese. El problema es encontrar la curva que hace mínimo el tiempo de caída entre dos puntos dados. Tal curva recibe el nombre de braquistócrona.

El problema de la Braquistócrona

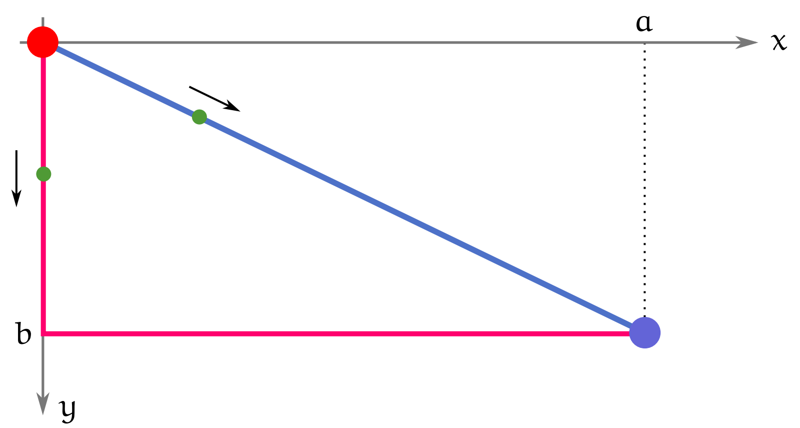
En un campo gravitatorio uniforme, una partícula se desplaza en un plano vertical sobre una curva que une dos puntos. Se trata de demostrar que la curva que hace mínimo el tiempo de viaje entre los dos puntos es una cicloide. Por simplicidad, asumiremos que inicialmente la partícula tiene velocidad nula, de modo que necesariamente el punto de llegada tiene que estar a una altura menor o igual a la del punto de partida. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que el punto de partida es el origen de coordenadas y que el punto de llegada tiene coordenadas (a, b), como muestra la figura.

*zanellaj@df.uba.ar



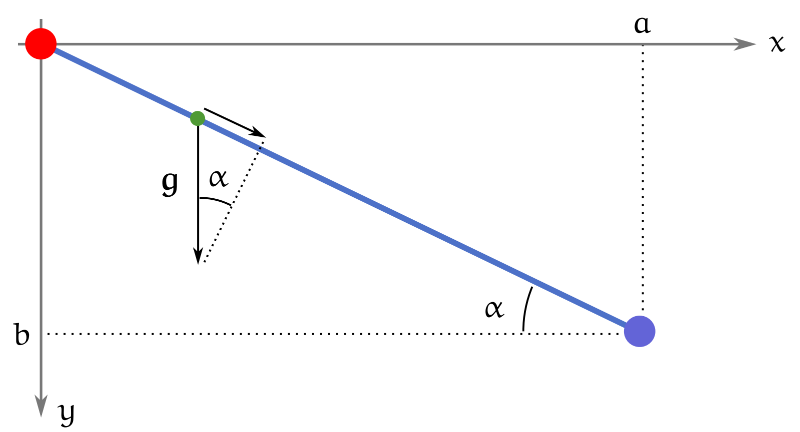
La curva nunca puede estar por encima de la altura $y = 0$. Antes de buscar la curva óptima, vamos a hacer unas comparaciones del tiempo de viaje a lo largo de dos curvas sencillas.

Es cierto que una línea recta entre los dos puntos minimiza la distancia, pero para ver que no necesariamente minimiza el tiempo comparemos el tiempo de caída a lo largo de la recta con el tiempo de caída a lo largo de la curva en forma de L que muestra la figura.



El movimiento sobre la recta que une los dos puntos, es equivalente al de una partícula en un plano inclinado. Debe recorrer una distancia

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1}$$



La aceleración en la dirección tangencial al plano es

$$g' = g \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, g. \tag{2}$$

Luego, a partir de la ecuación

$$d = \frac{g'}{2} t^2 \tag{3}$$

resulta

$$t_{\text{recta}} = \sqrt{\frac{2}{gb}} \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{4}$$

Para la curva en forma de L. El tramo vertical es recorrido en un tiempo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2b}{g}}, \tag{5}$$

llega al codo de la curva con velocidad

$$v_1 = \sqrt{2bg} \tag{6}$$

y recorre el tramo horizontal en un tiempo

$$t_2 = \frac{a}{v_1}. \tag{7}$$

El tiempo total es

$$t_L = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2b}{g}} + \frac{a}{\sqrt{2gb}}. \tag{8}$$

La comparación entre los dos tiempos es más fácil si los reescribimos como

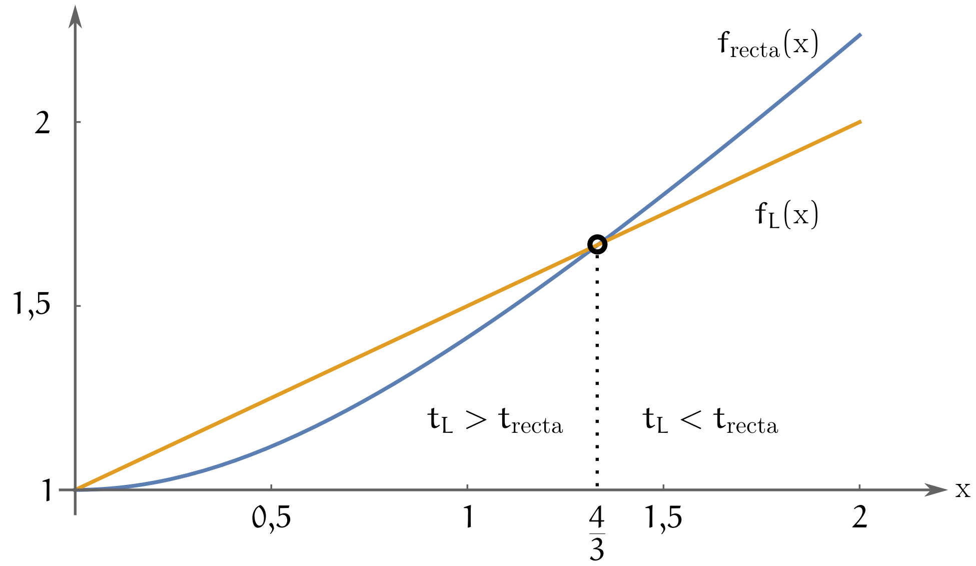
$$\sqrt{\frac{g}{2b}}\, t_{\text{recta}} = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}, \tag{9}$$

$$\sqrt{\frac{g}{2b}}\, t_L = 1 + \frac{1}{2}\frac{a}{b}. \tag{10}$$

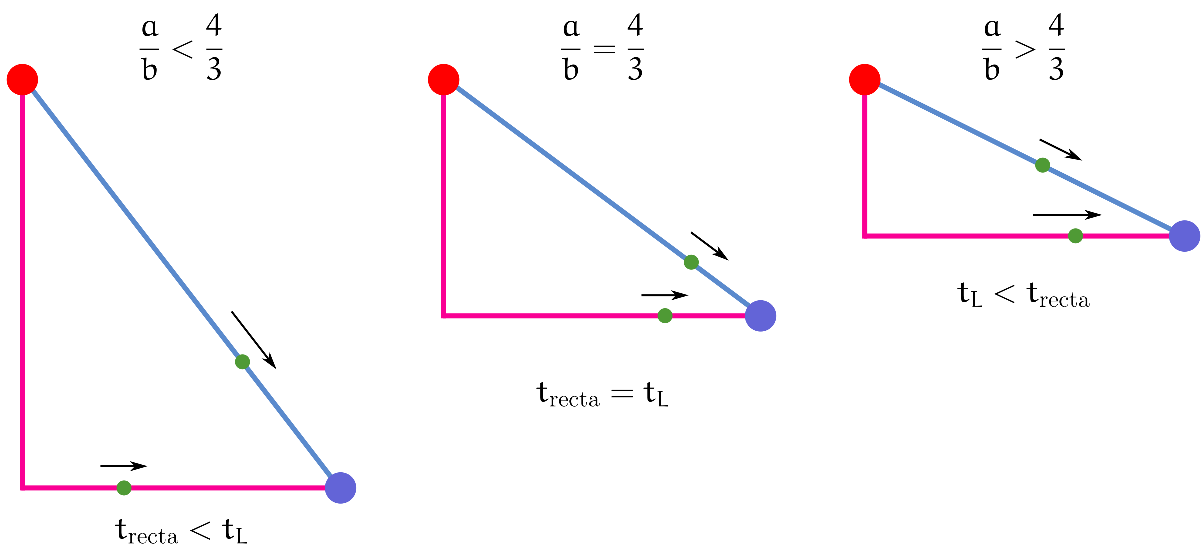
Necesitamos comparar las funciones

$$f_{\text{recta}}(x) = \sqrt{1 + x^2}, \qquad f_L(x) = 1 + \frac{x}{2}. \tag{11}$$

donde $x = a/b$. El gráfico de las dos funciones es como muestra la figura.



El cruce ocurre en $x = 4/3$. Esto quiere decir que para $a/b < 4/3$ la recta es la que da el menor tiempo de viaje, comparada con la curva en forma de L. Para $a/b > 4/3$, el menor tiempo de viaje lo da la curva en forma de L.



Volviendo al problema inicial. Para una curva arbitraria $\mathcal{C}$ el tiempo de viaje es

$$T[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{v}. \tag{12}$$

Por conservación de la energía,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - mgy = 0, \tag{13}$$

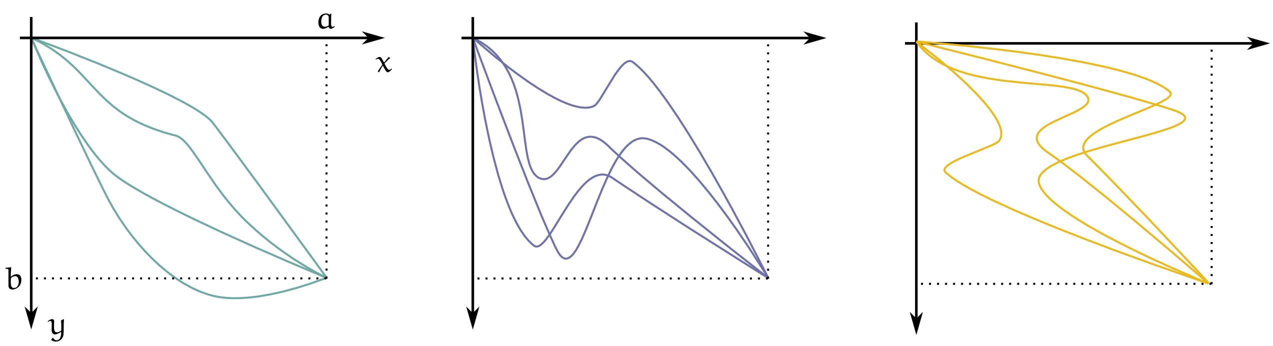
de modo que

$$v(y) = \sqrt{2gy}. \tag{14}$$

Tenemos que pensar cómo escribir ds en la expresión (12),

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}; \tag{15}$$

es decir, si conviene tomar x o y como variable independiente o si es necesario introducir un tercer parámetro. Es más o menos intuitivo que las curvas de descenso más rápido tienen que parecerse a alguna de las curvas de la figura de la izquierda, y no a las de la figura del centro, donde se pierde tiempo en subir y bajar un mismo trayecto vertical, y por similares razones tampoco esperaríamos curvas como las de la figura de la derecha. Las curvas de la figura de la izquierda admiten una representación de la forma $y = f(x)$.



De modo que plantearemos el problema tomando x como variable independiente y escribiremos

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{16}$$

Así, el tiempo de descenso es

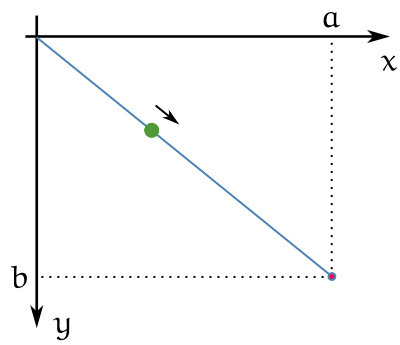
$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}. \tag{17}$$

El problema variacional consiste en encontrar la curva $y(x)$ que minimiza $T[y]$ sujeta a las condiciones auxiliares

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(a) = b. \end{cases} \tag{18}$$

Podemos verificar que la ec. (17) da el tiempo correcto cuando la curva que une los dos puntos es una línea recta; es decir, cuando

$$y(x) = \frac{b}{a}x. \tag{19}$$



En tal caso

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a dx \, \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}{\sqrt{\frac{b}{a}x}} = \sqrt{\frac{2}{gb}}\sqrt{a^2+b^2}, \tag{20}$$

como en la ec. (4).

Volviendo al problema variacional:

$$\bullet \text{ minimizar } \; T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a dx \, \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}, \quad \text{con las condiciones } \begin{cases} y(0) = 0, \\ y(a) = b. \end{cases} . \tag{21}$$

El problema aparentemente tiene tres parámetros independientes, a saber: g, a y b. En realidad es posible reducir en dos el número de parámetros. En esencia, podemos medir las distancias en unidades de a y los tiempos en unidades de $\sqrt{a/g}$. Mediante el cambio de variables

$$X = \frac{x}{a}, \tag{22}$$

$$Y(X) = \frac{1}{a}y(aX), \tag{23}$$

resulta

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left[aY(x/a)\right] = \frac{dY(X)}{dX}, \tag{24}$$

y, por lo tanto,

$$T[Y] = \sqrt{\frac{a}{2g}} \int_0^1 dX \, \sqrt{\frac{1+Y'^2}{Y}}, \qquad \text{con} \quad \begin{cases} Y(0) = 0, \\ Y(1) = \dfrac{b}{a} \equiv r. \end{cases} \tag{25}$$

El factor que multiplica la integral tiene unidades de tiempo y es independiente de la curva $Y(X)$. Si definimos

$$\tau[Y] = \sqrt{\frac{2g}{a}} \, T[Y], \tag{26}$$

el problema variacional se reduce a encontrar la curva $Y(X)$ que hace mínima la integral

$$\tau[Y] = \int_0^1 dX \, \sqrt{\frac{1+Y'^2}{Y}}, \qquad \text{con las condiciones} \begin{cases} Y(0) = 0, \\ Y(1) = r. \end{cases} \tag{27}$$

De esta forma eliminamos lo que es accesorio. El problema depende de un único parámetro, $r = b/a$. Esta reducción es importante. Pasamos de tener tres parámetros a tener uno sólo.

La funcional que buscamos minimizar tiene la misma forma que la integral del principio de Hamilton en mecánica; se trata de una integral de acción del tipo

$$\tau[Y] = \int_{X_1}^{X_2} dX \, \mathcal{L}(Y, Y', X), \tag{28}$$

donde

$$\mathcal{L}(Y, Y', X) = \sqrt{\frac{1+Y'^2}{Y}}. \tag{29}$$

Las trayectorias que extreman $\tau[Y]$ satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y'}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = 0. \tag{30}$$

Sin embargo, podemos usar lo que ya hemos aprendido de los sistemas lagrangianos para no tener que escribir esta ecuación explícitamente.

En mecánica siempre estamos atentos a la existencia de coordenadas cíclicas y a la dependencia explícita o no del lagrangiano con el tiempo (en este caso X). Sabemos que si ocurre cualquiera de estas dos cosas, podemos trabajar con ecuaciones más simples que las de Euler-Lagrange, pues conocemos integrales primeras del movimiento. En el caso del lagrangiano (29), la coordenada Y no es cíclica, pero $\mathcal{L}$ es independiente de X, de modo que se conserva la función h. En lugar de escribir la ecuación de Euler-Lagrange podemos trabajar con la ecuación de conservación

$$h(Y, Y') = \text{constante}. \tag{31}$$

Para $\mathcal{L}$ dado por la ec. (29), la función h es

$$h(Y, Y') = Y' \frac{\partial \mathcal{L}(Y, Y')}{\partial Y'} - \mathcal{L}(Y, Y') = \frac{Y'^2}{\sqrt{(1 + Y'^2)Y}} - \sqrt{\frac{1 + Y'^2}{Y}} = -\frac{1}{\sqrt{(1 + Y'^2)Y}}. \tag{32}$$

Teniendo en cuenta la forma de esta expresión, la ec. (31) puede escribirse como

$$h(Y, Y') = -\frac{1}{\sqrt{A}}, \tag{33}$$

de manera que

$$(1 + Y'^2)Y = A. \tag{34}$$

Despejando Y',

$$Y' = \sqrt{\frac{A - Y}{Y}}, \tag{35}$$

que es la ecuación diferencial de la trayectoria. Reescribimos esto como

$$\sqrt{\frac{Y}{A - Y}}\, dY = dX. \tag{36}$$

Integrando,

$$X = \int dY \sqrt{\frac{Y}{A - Y}} + B. \tag{37}$$

Fijando la condición $Y(0) = 0$,

$$X = \int_0^Y dY \sqrt{\frac{Y}{A - Y}}. \tag{38}$$

La integral puede hacerse mediante una cadena de sustituciones. Es claro que podríamos componer todas las sustituciones en una sola, sin embargo las haremos de una en una. En primer lugar sacamos factor común A dentro de la raíz y definimos

$$u = \frac{Y}{A}, \tag{39}$$

(análogamente $u = Y/A$) con lo cual

$$\frac{X}{A} = \int_0^u du\,\sqrt{\frac{u}{1-u}}. \tag{40}$$

Podemos llevar esto para el lado de las funciones trigonométrica definiendo primero

$$u = v^2, \tag{41}$$

de lo que resulta

$$\frac{X}{A} = 2\int_0^v dv\,\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{42}$$

Ahora hacemos el cambio de variables

$$v = \sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{43}$$

La razón de haber introducido un factor 1/2 se verá en un momento. Luego de hecha la sustitución anterior queda

$$\frac{X}{A} = \int_0^\theta d\vartheta\ \sin^2\frac{\vartheta}{2} = \int_0^\theta d\vartheta\,\frac{1-\cos\vartheta}{2} = \frac{\theta - \sin\theta}{2}. \tag{44}$$

Si se tratara del problema de resolver una integral, llegados a este punto desandaríamos toda la cadena de sustituciones para dejar escrito X en función de Y. Pero hemos visto que no hay razón para pensar que la trayectoria sea expresable en la forma de una función $X(Y)$. De modo que la utilidad de escribir una expresión para $X(Y)$ puede ser limitada. Más útil es aprovechar los cambios de variables intermedios para expresar X e Y de forma paramétrica. Es decir, ni X como función de Y ni Y como función de X.

La última ecuación nos da X como función de θ. Por otro lado, puesto que

$$v = \sqrt{u} = \sqrt{Y/A}, \tag{45}$$

la ec. (43) nos da

$$\sqrt{\frac{Y}{A}} = \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}. \tag{46}$$

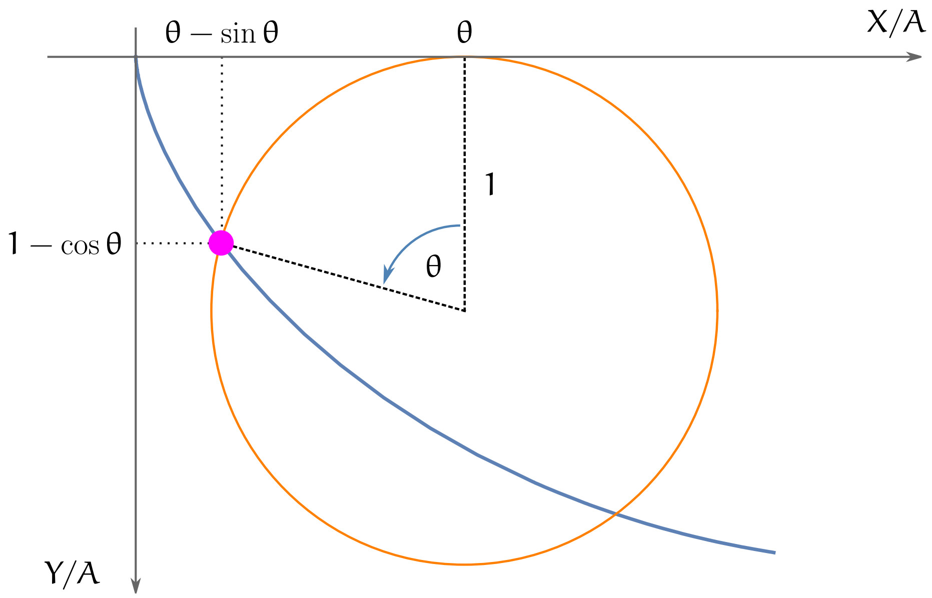
Luego,

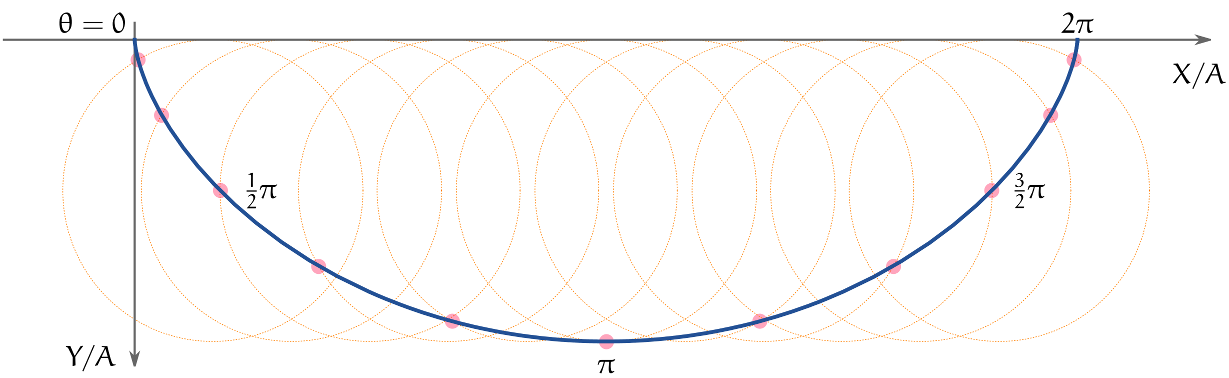
$$\frac{Y}{A} = \frac{1-\cos\theta}{2}. \tag{47}$$

Redefiniendo $A/2 \to A$, finalmente la ecuación de la curva que extrema el tiempo de viaje entre los dos puntos queda escrita de manera paramétrica como

$$\begin{cases} X(\theta) = A(\theta - \sin\theta), \\ \\ Y(\theta) = A(1 - \cos\theta). \end{cases} \tag{48}$$

Estas ecuaciones representan una cicloide, como muestra la figura.





La variable θ tiene la interpretación de un ángulo. Para $\theta = 0$, estamos en el punto de partida $(0, 0)$.

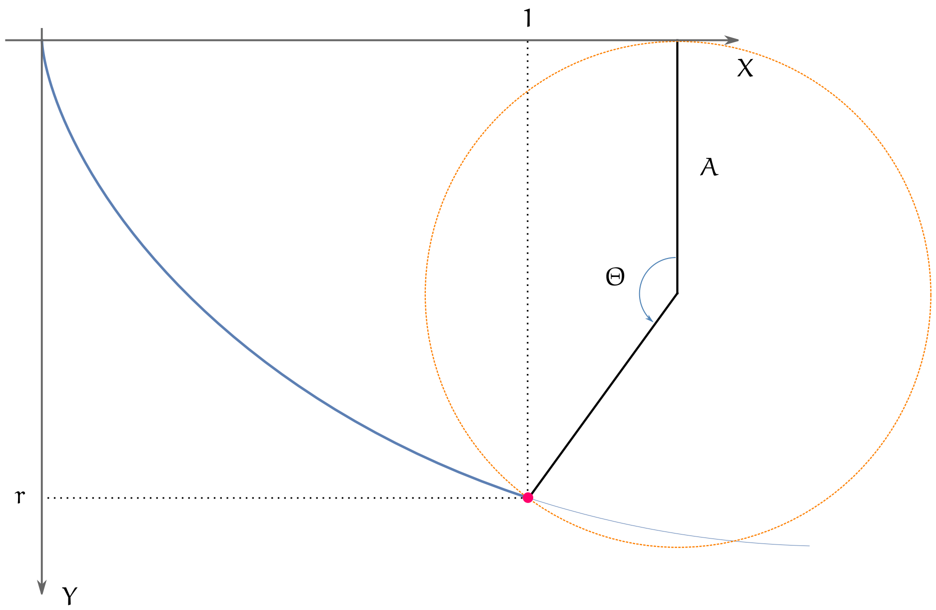
Sabemos que la curva extremal es una cicloide. Ahora debemos buscar la cicloide que conecta el origen con punto con el punto de llegada, que tiene coordenadas

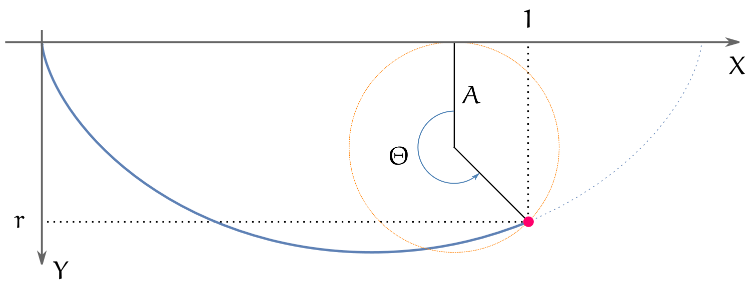
$$X = 1, \ Y = r, \qquad \text{con } r = \frac{b}{a}. \tag{49}$$

Deberíamos entonces ser capaces de encontrar A y Θ tales que

$$\begin{cases} X(\Theta) = A(\Theta - \sin\Theta) = 1, \\ \\ Y(\Theta) = A(1 - \cos\Theta) = r. \end{cases} \tag{50}$$

La figura muestra dos ejemplos de este ajuste de los parámetros para distintos valores de r: el primero de orden 1 y el segundo bastante menor que 1. Notar que las dos figuras están graficadas a la misma escala.

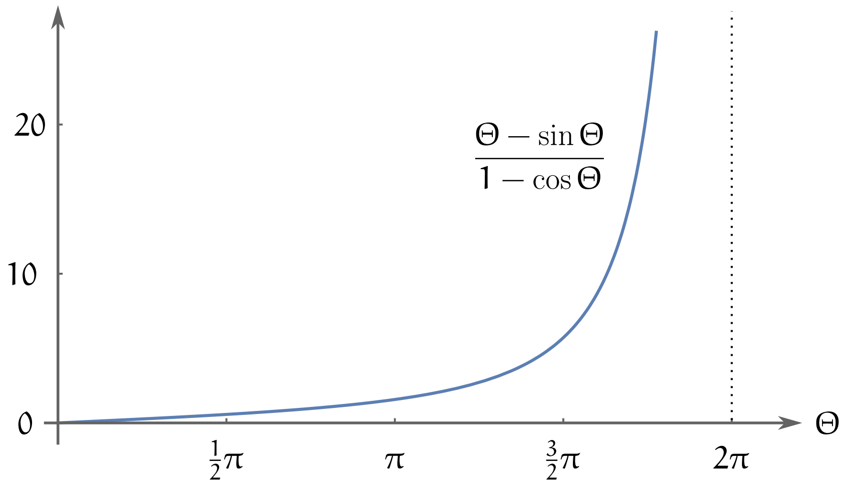




Con argumentos geométricos se puede demostrar que existe una y sólo una cicloide que cumple las condiciones del problema. Para verlo analíticamente, dividamos entre sí las dos ecuaciones anteriores, lo que implica

$$\frac{1}{r} = \frac{\Theta - \sin\Theta}{1 - \cos\Theta}. \tag{51}$$

Queda como ejercicio demostrar que la función del segundo miembro es estrictamente creciente y que varía entre 0 para $\Theta = 0$ e infinito para $\Theta \to 2\pi$.



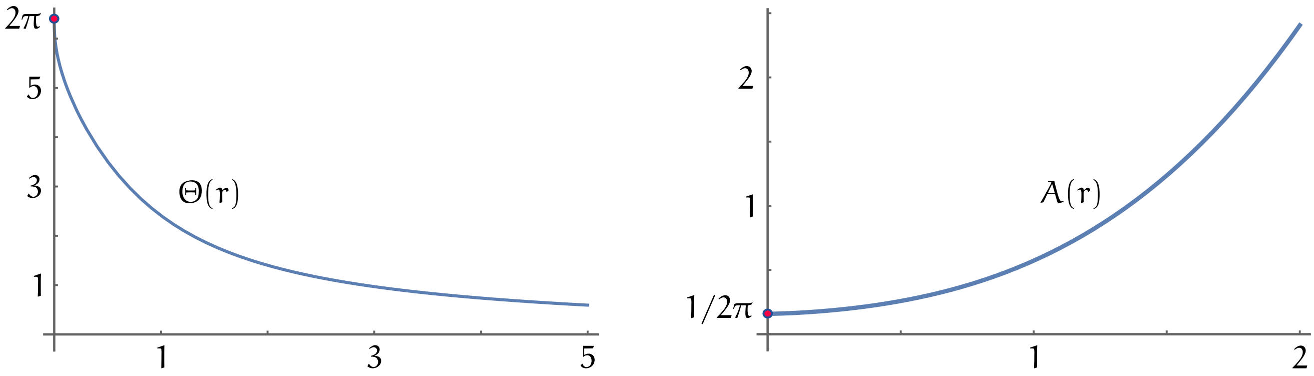
Así, la ecuación anterior siempre tiene una sola solución

$$\Theta = \Theta(r), \tag{52}$$

que en la práctica se calcula numéricamente. Una vez que tenemos Θ, el valor de A puede obtenerse, por ejemplo, a partir de la ec. (50),

$$A(r) = \frac{r}{1-\cos\Theta(r)}. \tag{53}$$

Las funciones $\Theta(r)$ y $A(r)$ se muestran en las siguientes figuras.



Encontrada la curva extremal, resta calcular el tiempo de viaje asociado a esa curva. Para el problema adimensionalizado, el tiempo de viaje era [ec. (27)]

$$\tau[Y] = \int_0^1 dX\, \sqrt{\frac{1+Y'^2}{Y}}. \tag{54}$$

Debido a que hemos encontrado la curva en forma paramétrica, lo más cómodo es transformar la integral anterior a una integral sobre θ. Cuando X varía entre 0 y 1, el ángulo θ

varía monótonamente entre 0 y Θ. Además

$$dX\,\sqrt{1+Y'^2} = d\theta\,\sqrt{\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2}. \tag{55}$$

Luego,

$$\tau[X,Y] = \int_0^{\Theta} \frac{d\theta}{\sqrt{Y}}\,\sqrt{\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2}. \tag{56}$$

A partir de las ecuaciones

$$\begin{cases} X(\theta) = A(\theta - \sin\theta), \\ \\ Y(\theta) = A(1-\cos\theta). \end{cases} \tag{57}$$

resulta

$$\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2 = 2A^2(1-\cos\theta) = 2AY. \tag{58}$$

El integrando en la ec. (56) queda particularmente sencillo,

$$\frac{1}{\sqrt{Y}}\,\sqrt{\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2A}. \tag{59}$$

Entonces, teniendo en cuenta que vamos a evaluar el tiempo de viaje sobre la cicloide calculada para el parámetro r, directamente escribimos todo como funciones de r,

$$\tau(r) = \sqrt{2A(r)}\int_0^{\Theta(r)} d\theta = \sqrt{2A(r)}\,\Theta(r). \tag{60}$$

Para evaluar esta expresión necesitamos calcular numéricamente los valores de A y de Θ según el dato $r = b/a$.

A modo de comparación, el tiempo de caída siguiendo la línea recta que une los dos puntos es, en términos de los parámetros originales del problema,

$$t_{\text{recta}} = \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{gb}}. \tag{61}$$

Para llevarlo a la forma adimensional lo reescribimos como

$$t_{\text{recta}} = 2\sqrt{\frac{a}{2g}}\,\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}. \tag{62}$$

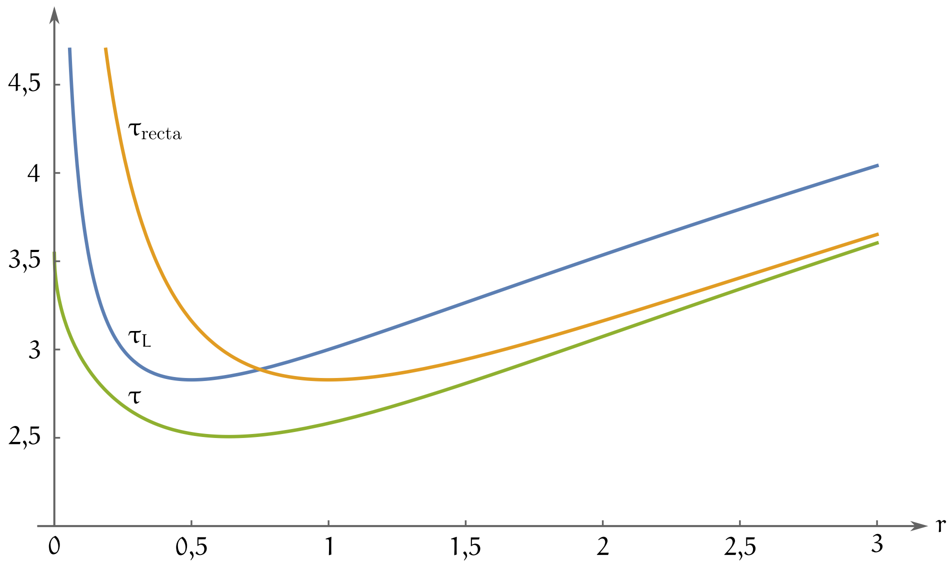
Como antes, medimos el tiempo en unidades de $\sqrt{a/2g}$ e introducimos la relación de aspecto $r = b/a$. Finalmente,

$$\tau_{\text{recta}}(r) = 2\sqrt{\frac{1}{r} + r}. \tag{63}$$

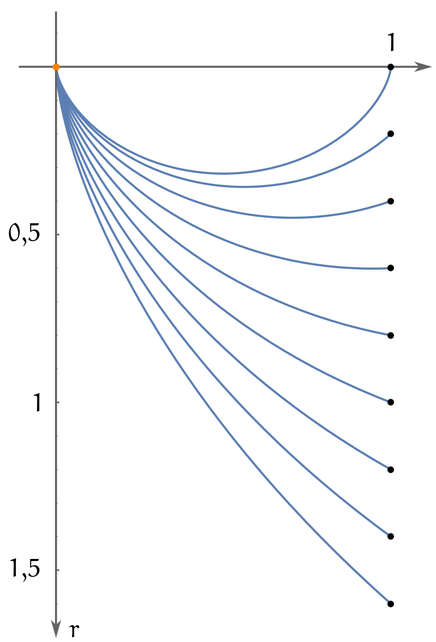
Para la curva en forma de L, un cálculo similar muestra que

$$\tau_L(r) = 2\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}. \tag{64}$$

Los tiempos de viaje en función de parámetro r para cada una de las curvas anteriores se muestran en la siguiente figura.



La siguiente figura muestra un conjunto de braquistócronas para valores crecientes de r, desde $r = 0$ hasta r igual a 1.6.



Para $r = 0$, la braquistócrona es un arco de cicloide completo. A medida que crece r, el ángulo $\Theta(r)$ disminuye y la curva se aproxima más y más al gráfico de la función $rx^{2/3}$.

■ **Un escrúpulo**: no demostramos que la cicloide fuera la curva de tiempo mínimo; demostramos que es una extremal. La demostración formal de que la cicloide es la verdadera braquistócrona puede consultarse, por ejemplo, en el libro de Bliss, *Calculus of Variations*.

■ **Algunos cálculos que pueden hacer**: 1. Calcular el tiempo de viaje cuando los dos puntos están a la misma altura. 2. Calcular el valor de r por debajo del cual el recorrido tiene un tramo que está por debajo del punto de llegada. 3. Calcular el valor de r para el cual $\tau(r)$ es mínimo, lo que da la braquistócrona de las braquistócronas.