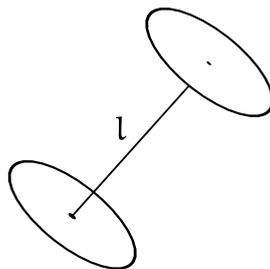


## Problema 9

■ Los centros de dos volantes de radio  $a$  y masa  $m$  se encuentran unidos por una barra de longitud  $l$ . El ángulo formado por la barra y el plano de cada volante es siempre de  $90^\circ$ . Cada volante gira libremente sobre sí mismo.

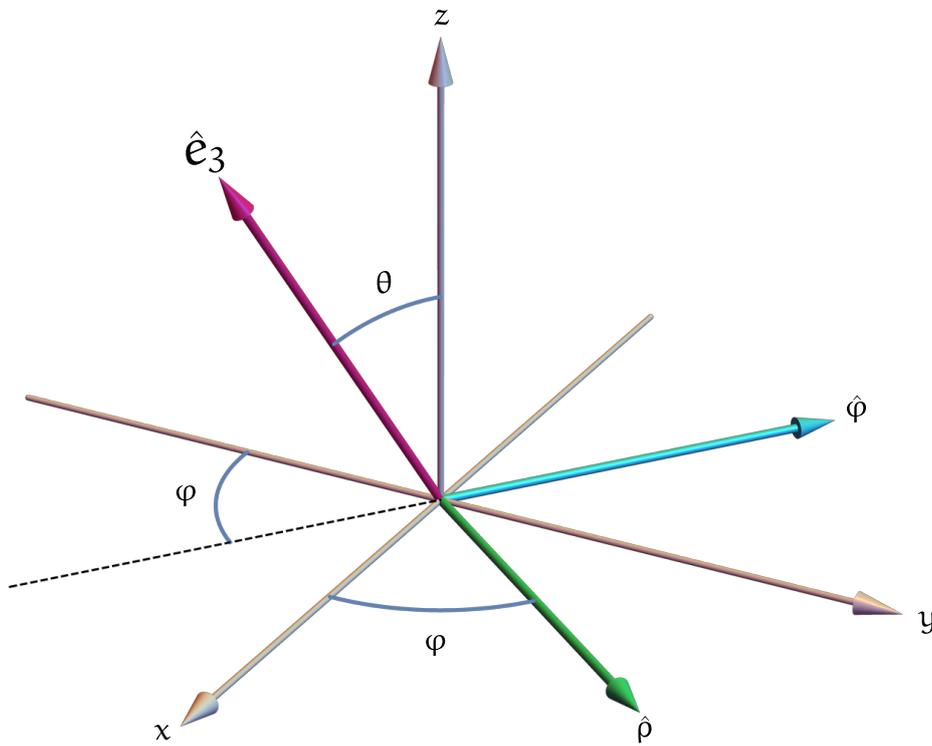
- ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?
- Escriba el lagrangiano y encuentre constantes de movimiento. ¿Es  $h = E$ ?
- Escriba las ecuaciones de movimiento.



---

\*zanellaj@df.uba.ar





Necesitaremos otros dos ángulos de Euler,  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , para determinar la orientación de cada disco. Además, para especificar completamente la configuración del sistema podemos dar la posición del centro de la barra,  $\mathbf{R}$ , mediante, por ejemplo, sus tres coordenadas cartesianas. En total tenemos siete grados de libertad: los dos ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ , los dos ángulos  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , y las tres coordenadas del centro de la barra  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ .

Para escribir la energía cinética de cada disco usaremos la descomposición

$$T_i = T_{i\text{CM}} + T_{i\text{Rot}}. \quad (2)$$

La parte rotacional corresponde a la de una peonza simétrica. Así, para el primer disco será

$$T_{1\text{Rot}} = \frac{1}{2}I_3 \left( \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2}I \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right), \quad (3)$$

y para el segundo,

$$T_{2\text{Rot}} = \frac{1}{2}I_3 \left( \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2}I \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right). \quad (4)$$

Para escribir la energía de traslación del centro de masa de cada disco necesitamos escribir primero su posición en términos de las coordenadas generalizadas. Para llegar al centro de masa del primer disco podemos primero ir hasta el centro de la barra y luego desplazarnos desde ahí una distancia  $l/2$  en la dirección del vector  $\hat{e}_3(\theta, \varphi)$ ,

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} + \frac{l}{2} \hat{e}_3(\theta, \varphi). \quad (5)$$

La velocidad del centro del primer disco será entonces

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{l}{2} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_3(\theta, \varphi). \quad (6)$$

Luego,

$$T_{1CM} = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{l^2}{4} \left[ \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_3(\theta, \varphi) \right]^2 + l \dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_3(\theta, \varphi) \right\}. \quad (7)$$

No nos apresuramos aquí a escribir todos los términos por extenso, previendo que cuando sumemos la contribución del segundo disco, debido a la simetría, algunos términos se cancelarán. En efecto, la posición del centro de masa del segundo disco es

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R} - \frac{l}{2} \hat{\mathbf{e}}_3(\theta, \varphi). \quad (8)$$

Luego, cuando derivemos y elevemos al cuadrado, el término cruzado tendrá el signo opuesto al que aparece en  $T_{1CM}$ . Así,

$$T_{1CM} + T_{2CM} = 2 \times \frac{1}{2} m \left\{ \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{l^2}{4} \left[ \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_3(\theta, \varphi) \right]^2 \right\}. \quad (9)$$

Ahora sí derivemos  $\hat{\mathbf{e}}_3$  respecto del tiempo. Para empezar,

$$\hat{\mathbf{e}}_3(\theta, \varphi) = \cos \theta \hat{\mathbf{z}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi). \quad (10)$$

Su derivada temporal es

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_3(\theta, \varphi) = -\dot{\theta} [\sin \theta \hat{\mathbf{z}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)] + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi). \quad (11)$$

Como está escrito en una base ortonormal, es fácil calcular su módulo al cuadrado,

$$\left[ \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{e}}_3(\theta, \varphi) \right]^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta. \quad (12)$$

A poco de que lo piensen, este resultado es bastante obvio.

Finalmente,

$$T_{1CM} + T_{2CM} = 2 \times \frac{1}{2} m \left[ \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{l^2}{4} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \right]. \quad (13)$$

La energía cinética total será

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}I_3 \left( \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2}I_3 \left( \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \left( I + \frac{1}{4}ml^2 \right) \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right). \quad (14)$$

Por otro lado, como el campo gravitatorio es uniforme, la energía potencial es igual a la que tendría una partícula de masa  $2m$  en la posición del centro de masa  $\mathbf{R}$ ,

$$V(\mathbf{R}) = 2mgZ. \quad (15)$$

En definitiva, el lagrangiano se separa en una parte de traslación del centro de masa más una parte que comprende la rotación de los dos discos:

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}, \theta, \varphi, \psi_1, \psi_2, \dot{\mathbf{R}}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) = \mathcal{L}_{\text{CM}}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) + \mathcal{L}_{\text{Rot}}(\theta, \varphi, \psi_1, \psi_2, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2), \quad (16)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{CM}} = \frac{1}{2}(2m)\dot{\mathbf{R}}^2 - 2mgZ, \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Rot}} = \frac{1}{2}I_3 \left( \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2}I_3 \left( \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + I' \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right), \quad (18)$$

con

$$I' = \left( I + \frac{1}{4}ml^2 \right). \quad (19)$$

Es como si se tratara de dos sistemas separados. Por un lado, una partícula de masa  $2m$  en un campo gravitatorio uniforme, y, por otro lado, dos cuerpos rígidos simétricos, con momentos de inercia  $I_3$  e  $I'$  y que comparten el mismo eje de simetría.

La separación del problema permite establecer leyes de conservación válidas para cada subsistema. No sólo se conservará la energía total, sino que se conservarán independientemente las energías de cada subsistema:

$$\mathcal{E}_{\text{CM}} = \frac{1}{2}(2m)\dot{\mathbf{R}}^2 + 2mgZ, \quad (20)$$

$$\mathcal{E}_{\text{Rot}} = \mathcal{L}_{\text{Rot}}. \quad (21)$$

La descomposición que vale para el lagrangiano también es válida para la función  $h$ , que se conserva y es igual a la energía, globalmente y para cada subsistema.

Asociadas al lagrangiano de rotación existen otras constantes de movimiento, debido al

carácter cíclico de las coordenadas  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  y  $\varphi$ . Esas constantes son

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Rot}}}{\partial \dot{\psi}_1} = I_3 \left( \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi} \cos \theta \right) = I_3 \omega_{31} \equiv L_{31}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Rot}}}{\partial \dot{\psi}_2} = I_3 \left( \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi} \cos \theta \right) = I_3 \omega_{32} \equiv L_{32}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Rot}}}{\partial \dot{\varphi}} &= I_3 \left( \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \cos \theta + I_3 \left( \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \cos \theta + 2I' \dot{\varphi} \sin^2 \theta \\ &= L_3 \cos \theta + 2I' \dot{\varphi} \sin^2 \theta \equiv L_z, \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$$L_3 = L_{31} + L_{32}. \quad (25)$$

Esta cantidad es el momento angular en la dirección de  $\hat{e}_3$ . En tanto, según **deberían** demostrarlo,  $L_z$  es el momento angular en la dirección de  $\hat{z}$ .

La constancia de estas cantidades es equivalente a las ecuaciones de E-L asociadas a las coordenadas  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  y  $\varphi$ . La ecuación de E-L asociada a  $\theta$  se lee como

$$\ddot{\theta} + \frac{L_3}{2I'} \dot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (26)$$

Podemos eliminar  $\dot{\varphi}$  mediante la ley de conservación para  $L_z$ , ec. (24), que implica

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{2I' \sin^2 \theta}. \quad (27)$$

Entonces obtenemos un problema unidimensional equivalente para  $\theta$  gobernado por la ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{4I'^2 \sin \theta} L_3 - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{4I'^2 \sin^3 \theta} \cos \theta = 0. \quad (28)$$

A este mismo resultado podemos llegar a partir de las ecuaciones de conservación. Partimos de la conservación de la energía de rotación

$$\mathcal{E}_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I_3 \left( \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2} I_3 \left( \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + I' \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right). \quad (29)$$

Los dos primeros términos son en sí mismos cantidades conservadas,

$$\mathcal{E}_{\text{Rot}} = \frac{1}{2I_3} L_{31}^2 + \frac{1}{2I_3} L_{32}^2 + I' \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right). \quad (30)$$

Esto implica que el último término es también una constante de movimiento,

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = A. \quad (31)$$

Eliminando  $\dot{\phi}$  a partir de la ec. (27), obtenemos un problema unidimensional equivalente para  $\theta$  gobernado por la ecuación de conservación

$$\dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{4I'^2 \sin^2 \theta} = A. \quad (32)$$

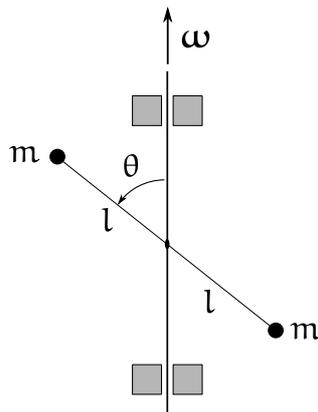
Si derivan respecto del tiempo deberían verificar que se recupera la ec. (28). Ahora bien, la ec. (32) da una idea más directa de la evolución de  $\theta$  en términos del potencial efectivo

$$V_{\text{ef}} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{4I'^2 \sin^2 \theta}. \quad (33)$$

Como última observación, notar que si  $L_3 = 0$ , las ecuaciones se reducen a las del movimiento de una partícula sobre una esfera. Es decir, el movimiento de rotación de la barra ocurre como si los discos fueran dos masas puntuales. En general, la evolución de  $\theta$  y  $\phi$  estará regida por las mismas ecuaciones de movimiento que las de un disco con momentos angulares  $L_3$  y  $L_z$ .

## Problema 15

■ El sistema de la figura consiste de dos masas unidas a un eje vertical que gira con velocidad angular  $\omega$ .



- Calcular el tensor de inercia para ejes fijos al espacio.
- Encontrar los ejes principales de inercia e interpretar.
- Calcular el impulso angular  $L$  en el sistema fijo al espacio y en el sistema fijo al cuerpo.
- Calcular el par que ejercen los cojinetes, según ambos sistemas. Interpretar el resultado.

Para ver la distinción que existe entre las componentes del tensor de inercia para ejes fijos al espacio y para ejes fijos al cuerpo, repasemos cómo se calcula el momento angular.

Por lo común, interesa calcular el momento angular relativo al centro de masa o relativo a un punto fijo del cuerpo, debido a que, en esos casos, la variación del momento angular es igual al torque. Si  $\mathbf{r}$  es el vector posición relativa de un punto del cuerpo respecto del punto de referencia en cuestión, su velocidad relativa a ese punto es

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (34)$$

El momento angular que estamos buscando es

$$\mathbf{L} = \sum m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \sum m [r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}]. \quad (35)$$

Se sobreentiende que la suma, eventualmente, una integral, recorre todos los puntos del cuerpo.

Supongamos que se usa una base de versores ortogonales

$$\hat{\mathbf{x}}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (36)$$

que pueden depender del tiempo. Por ejemplo, si son una base de versores fijos al cuerpo, la rotación del cuerpo induce una variación en esos versores. Con ellos escribimos

$$\mathbf{r} = r_i(t) \hat{\mathbf{x}}_i(t), \quad (37)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i(t) \hat{\mathbf{x}}_i(t). \quad (38)$$

Estamos indicando explícitamente todo lo que puede depender del tiempo. Luego,

$$\mathbf{L} = \sum m \left[ r^2 \omega_i(t) - \omega_j(t) r_j(t) r_i(t) \right] \hat{\mathbf{x}}_i(t) = \left\{ \sum m \left[ r^2 \delta_{ij} - r_i(t) r_j(t) \right] \right\} \omega_j(t) \hat{\mathbf{x}}_i(t). \quad (39)$$

El valor de  $r^2$  no puede depender del tiempo porque es la distancia de cada punto al centro de masa. En la base de versores  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$  se definen las componentes del tensor de inercia

$$I_{ij}(t) = \sum m \left[ r^2 \delta_{ij} - r_i(t) r_j(t) \right], \quad (40)$$

de modo que, finalmente, es

$$\mathbf{L} = I_{ij}(t) \omega_j(t) \hat{\mathbf{x}}_i(t). \quad (41)$$

Esto nos da las componentes de  $\mathbf{L}$  en la base de los versores  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$ .

Veamos ahora dos casos especiales. Si la base  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$  corresponde a una terna de versores fijos al cuerpo, entonces por definición las componentes  $r_i(t)$  no dependen del tiempo. En

otras palabras, cada punto del cuerpo se especifica como una combinación lineal

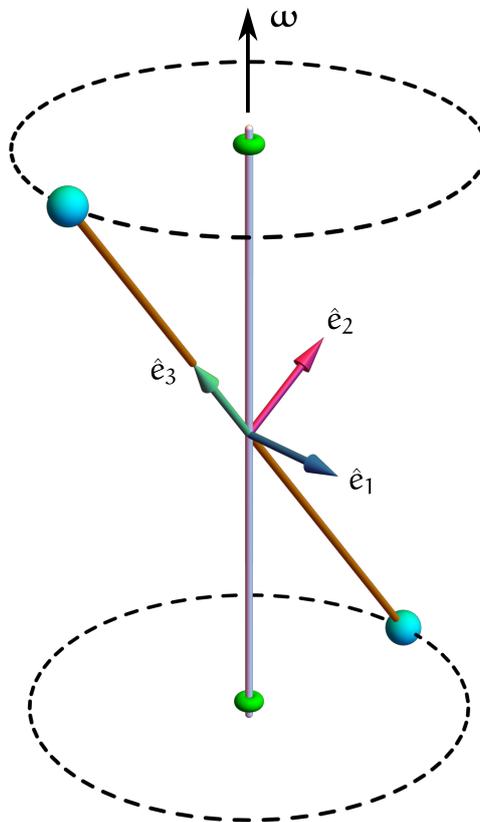
$$\mathbf{r}(t) = r_1 \hat{e}_1(t) + r_2 \hat{e}_2(t) + r_3 \hat{e}_3(t), \quad (42)$$

donde las componentes  $r_i$  son independientes del tiempo. En tal caso, las componentes del tensor de inercia también serán independientes del tiempo

$$I_{ij} = \sum m(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j). \quad (43)$$

Si en cambio la base de versores  $\hat{x}_i(t)$  está fija al espacio, las componentes de  $I_{ij}$  dependerán explícitamente del tiempo, porque las componentes  $r_i$  serán funciones del tiempo.

El problema 15 sirve para ilustrar estas distinciones. Es un problema muy simple porque se trata de un cuerpo rígido formado únicamente por dos partículas. El movimiento está determinado externamente.



Calculemos el tensor de inercia en la base de versores fijos al espacio. Las posiciones de los dos puntos del cuerpo son

$$\mathbf{r}_1(t) = -\mathbf{r}_2(t) = l \hat{e}_3(t), \quad (44)$$

donde

$$\hat{e}_3(t) = -\sin \theta \hat{\varphi}(\varphi(t)) + \cos \theta \hat{z}. \quad (45)$$

Los ángulos de Euler  $\theta$  y  $\varphi$  están determinados:  $\theta$  es fijo y

$$\varphi(t) = \omega t. \quad (46)$$

Explícitamente,

$$\mathbf{r}_1(t) = l \left[ \sin \theta \sin \omega t \hat{x} - \sin \theta \cos \omega t \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \right]. \quad (47)$$

Para el punto en  $\mathbf{r}_1$ , la matriz  $I'_1$  con componentes  $m(\delta_{ij}r_1^2 - r_{1i}r_{1j})$  será

$$\begin{aligned} I'_1(t) &= m \begin{pmatrix} y_1^2 + z_1^2 & -x_1y_1 & -x_1z_1 \\ -x_1y_1 & x_1^2 + z_1^2 & -y_1z_1 \\ -x_1z_1 & -y_1z_1 & x_1^2 + y_1^2 \end{pmatrix} \\ &= ml^2 \begin{pmatrix} 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \omega t & \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin 2\omega t & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \omega t \\ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin 2\omega t & 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \omega t & \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos \omega t \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \omega t & \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos \omega t & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

Usamos el símbolo  $I'$  para distinguir esta matriz de la calculada en la base de ejes fijos al cuerpo. Debido a que  $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1$ , por paridad será

$$I'_2(t) = I'_1(t), \quad (49)$$

y la matriz de componentes del momento de inercia total será

$$I'(t) = 2I'_1(t). \quad (50)$$

Si el momento de inercia en esta base resulta complicado,  $\boldsymbol{\omega}$  es muy simple

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}. \quad (51)$$

Las componentes del momento angular en esta base están dadas por

$$L_i = I'_{ij}(t)\omega_j. \quad (52)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= 2ml^2\omega \left[ -\frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \omega t \hat{x} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos \omega t \hat{y} + \sin^2 \theta \hat{z} \right] \\ &= 2ml^2\omega \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta \hat{\varphi}(\omega t) + \sin^2 \theta \hat{z} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Podemos verificar esto por un cálculo directo, después de todo se trata únicamente de dos partículas con posiciones y velocidades conocidas,

$$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2 = l \left[ -\sin \theta \hat{\varphi}(\omega t) + \cos \theta \hat{z} \right], \quad (54)$$

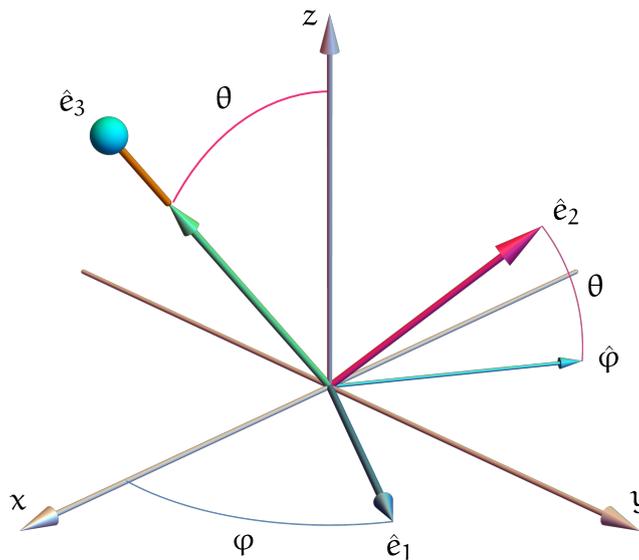
$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 = l\omega \sin \theta \hat{\rho}(\omega t). \quad (55)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= 2m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 = 2ml^2\omega \sin \theta \left[ -\sin \theta \hat{\varphi}(\omega t) + \cos \theta \hat{z} \right] \times \hat{\rho}(\omega t) \\ &= 2ml^2\omega \left[ \sin^2 \theta \hat{z} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \hat{\varphi}(\omega t) \right], \end{aligned} \quad (56)$$

que coincide con la expresión (53). Notemos que el vector  $\mathbf{L}$  rota según el versor  $\hat{\varphi}(\omega t)$ , manteniéndose constante su proyección sobre el eje  $z$ .

Veamos ahora cómo se calcula el momento angular usando la descomposición en los versores fijos al cuerpo. Tomaremos la base de versores que muestra la figura.



En este sistema no existe la rotación según  $\psi$  o, en todo caso, es irrelevante. Por eso el versor  $\hat{e}_1$  está siempre sobre la línea de nodos, y coincide con el versor  $\hat{\rho}(\varphi)$ .

Las componentes del tensor de inercia son constantes y su matriz es diagonal,

$$\mathbf{I} = 2ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Pero ahora tenemos que escribir  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{z}$  en la misma base. Es decir, necesitamos escribir  $\hat{z}$  como combinación lineal de los versores  $\hat{e}_i$ . Eso es sencillo,

$$\hat{z} = (\hat{z} \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\hat{z} \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2 + (\hat{z} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3. \quad (58)$$

Todo lo que necesitamos son los productos escalares de  $\hat{z}$  con cada uno de los versores de la base. Es fácil ver en la figura anterior que

$$\begin{cases} \hat{e}_1(t) = \hat{\rho}(\omega t), \\ \hat{e}_2(t) = \cos \theta \hat{\varphi}(\omega t) + \sin \theta \hat{z}, \\ \hat{e}_3(t) = -\sin \theta \hat{\varphi}(\omega t) + \cos \theta \hat{z}. \end{cases} \quad (59)$$

De manera que es

$$\hat{z} = \sin \theta \hat{e}_2(t) + \cos \theta \hat{e}_3(t). \quad (60)$$

Las componentes de  $\mathbf{L}$  se leen a partir de  $L_i = I_{ij}(\hat{z})_j$ ,

$$2ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Así resulta

$$\mathbf{L} = 2ml^2 \omega \sin \theta \hat{e}_2(t). \quad (62)$$

Esto es lo esperado: puesto que el tensor de inercia se representa de manera diagonal, es

$$\mathbf{L} = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3. \quad (63)$$

El primer término es cero, porque  $\omega_1$  es cero; y el último es cero porque  $I_3$  es cero. Entonces

$$\mathbf{L} = I_2 \omega_2 \hat{e}_2, \quad (64)$$

donde  $I_2 = 2ml^2$  y  $\omega_2 = \omega \sin \theta$ . Si escribimos  $\hat{e}_2$  en la base de versores fijos al espacio volvemos a obtener la expresión (53).

Respecto al torque externo que se ejerce en los extremos del eje. Hemos calculado el momento angular respecto del centro de masa, de modo que su derivada respecto del tiempo nos da el torque también respecto del centro de masa. Si lo calculamos usando la expresión según los ejes fijos al espacio, ec. (53), obtenemos

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -ml^2\omega^2 \sin 2\theta \hat{\rho}(\omega t). \quad (65)$$

Es lógico que un vector que rota como  $\hat{\rho}(\omega t)$  tenga su derivada en la dirección de  $\hat{\rho}$ . El cálculo usando la representación (62) es esencialmente el mismo. Como verificación, notar que si  $\theta$  es igual a 0 o a  $\pi/2$  la variación del momento angular es nula. Esto es esperable porque en tal caso el momento angular o bien es cero o bien es paralelo a  $\omega$ .

## Conocimientos benévolos

Hay cuatro cosas que uno debería ser capaz de escribir con un mínimo de esfuerzo sin tener que consultar ningún apunte:

- La expresión de la velocidad angular:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{\rho}(\varphi) + \dot{\psi} \hat{e}_3(\theta, \varphi). \quad (66)$$

- Los versores fijos al cuerpo en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \hat{e}_1(\theta, \varphi, \psi) = \sin \psi \left[ \cos \theta \hat{\rho}(\varphi) + \sin \theta \hat{z} \right] + \cos \psi \hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_2(\theta, \varphi, \psi) = \cos \psi \left[ \cos \theta \hat{\rho}(\varphi) + \sin \theta \hat{z} \right] - \sin \psi \hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_3(\theta, \varphi) = -\sin \theta \hat{\rho}(\varphi) + \cos \theta \hat{z}. \end{cases} \quad (67)$$

- Las componentes de la velocidad angular en la base de versores fijos al cuerpo:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad (68)$$

- La energía de rotación para una peonza simétrica en términos de los ángulos de Euler cuando los versores fijos al cuerpo coinciden con una terna de ejes principales (el versor  $\hat{e}_3$  está en la dirección del eje de simetría):

$$\mathcal{E}_{\text{Rot}} = \frac{1}{2}I_3 \left( \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2}I \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right). \quad (69)$$

La expresión (66) es fácil de *deducir*. Resalto la palabra *deducir* porque en verdad no puede hablarse de una deducción. Los pasos no son estrictamente lógicos. Debe tomarse como una regla intuitiva que funciona para la convención particular de ángulos de Euler que estamos usando, en donde importan tanto los ángulos como el orden de las rotaciones. Es una regla que vale por accidente. La regla mnemotécnica es así: una variación en  $\varphi$  induce una rotación según  $\hat{z}$ . Una variación en  $\theta$  induce una rotación según  $\hat{\rho}(\varphi)$ . Por último, una variación en  $\psi$  induce una rotación según la dirección del versor  $\hat{e}_3$ . Luego, intuitivamente debería ser

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{\rho}(\varphi) + \dot{\psi} \hat{e}_3(\theta, \varphi). \quad (70)$$

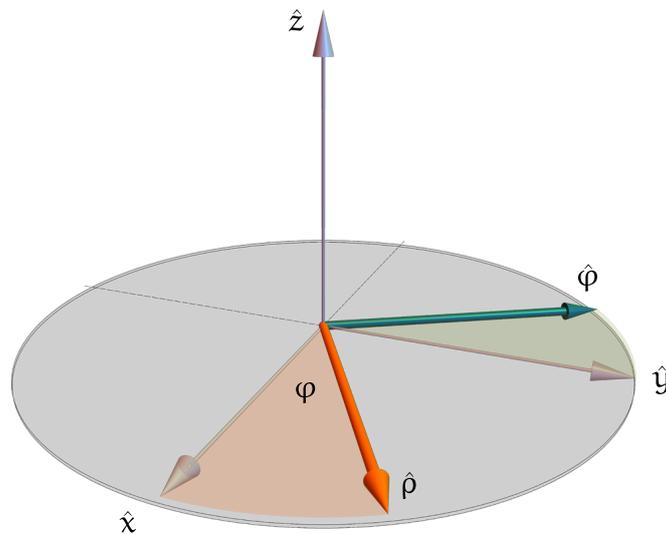
El resultado es correcto. El razonamiento, no (<https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.12522>).

Las expresiones (67) se pueden ir construyendo mentalmente. Casi que alcanza con recordar una sola cosa: que la línea de nodos es el versor  $\hat{\rho}(\varphi)$ . La línea de nodos es la dirección del versor  $\hat{e}_1$  cuando sólo se ha hecho la primera rotación. Esa rotación transforma el versor  $\hat{x}$  en el versor  $\hat{\rho}(\varphi)$  y el versor  $\hat{y}$  en el versor  $\hat{\phi}(\varphi)$ . Notar que  $\hat{\rho}$  y  $\hat{\phi}$  son combinaciones lineales de  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ ,

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}, \quad (71)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}. \quad (72)$$

El caso  $\varphi = 0$  nos indica el lugar de los cosenos en estas expresiones. En tal situación,  $\hat{\rho}$  tiene que ser igual a  $\hat{x}$  y  $\hat{\phi}$  tiene que ser igual a  $\hat{y}$ . El seno aparece con signo positivo en una de las expresiones y con signo negativo en la otra. Eso se lee fácilmente en la figura.

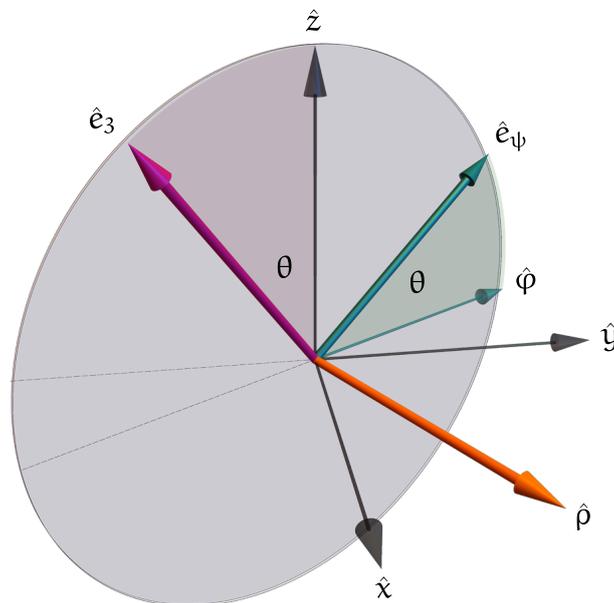


La segunda rotación transforma a los versores  $\hat{\phi}$  y  $\hat{z}$  en dos combinaciones lineales de ellos mismos. Esas combinaciones lineales copian la misma forma que las expresiones (71)

y (72). El versor  $\hat{z}$  es transformado en  $\hat{e}_3$  y el versor  $\hat{\phi}$  en  $\hat{e}_\psi$ , donde

$$\hat{e}_\psi = \cos \theta \hat{\phi} + \sin \theta \hat{z}, \quad (73)$$

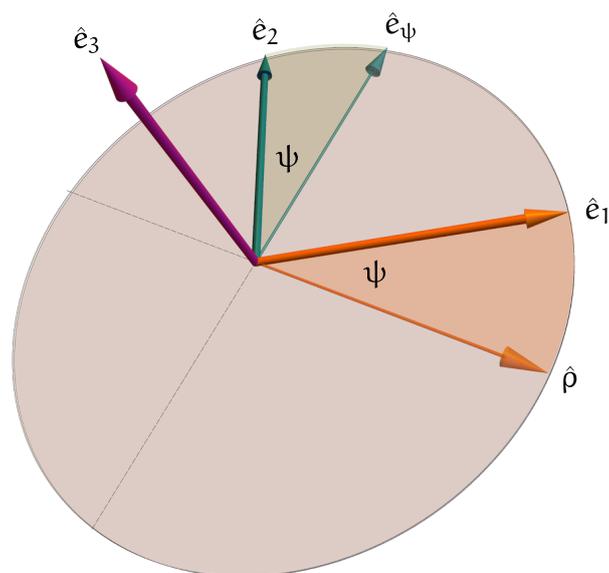
$$\hat{e}_3 = -\sin \theta \hat{\phi} + \cos \theta \hat{z}. \quad (74)$$



Finalmente, la rotación alrededor de  $\hat{e}_3$  transforma a los versores  $\hat{\rho}$  y  $\hat{e}_\psi$  en combinaciones lineales de ellos mismos, siempre copiando el mismo modelo:

$$\hat{e}_1 = \cos \psi \hat{\rho} + \sin \psi \hat{e}_\psi, \quad (75)$$

$$\hat{e}_2 = -\sin \psi \hat{\rho} + \cos \psi \hat{e}_\psi. \quad (76)$$



Esto completa la deducción de las expresiones (67).

Para deducir las componentes de la velocidad angular en la base de versores fijos al cuerpo, basta hacer el producto escalar de la expresión (66) con cada una de las expresiones (67).

Combinando todo lo dicho anteriormente, escribimos la energía cinética de rotación en términos de los ángulos de Euler cuando se usa la representación de versores fijos al cuerpo y cuando esos versores están sobre las direcciones de ejes principales:

$$\begin{aligned} T_{\text{Rot}} &= \frac{I_1}{2} \omega_1^2 + \frac{I_2}{2} \omega_2^2 + \frac{I_3}{2} \omega_3^2 \\ &= \frac{I_1}{2} \left( \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \right)^2 + \frac{I_2}{2} \left( \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \right)^2 + \frac{I_3}{2} \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2. \end{aligned} \quad (77)$$

Un caso de especial importancia es el de los cuerpos simétricos, en donde dos de los momentos de inercia principales son iguales. Lo usual es elegir los ejes fijos al cuerpo de modo que sea  $I_1 = I_2 = I$ . Pero independientemente de esto, una propiedad que resulta útil es que la elección de los ejes principales cuyos momentos son iguales es arbitraria. Lo único que está definido es el plano en el que deben estar esos ejes. Eso quiere decir que se puede tomar cualquier par de versores  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  en ese plano sin alterar la forma de la matriz  $I_{ij}$ . Siempre será  $I_1 = I_2 = I$ . Como deberían comprobar, resultará entonces

$$T_{\text{Rot}} = \frac{I_3}{2} \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 + \frac{I}{2} \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right). \quad (78)$$

Es lógico que en esta expresión  $\psi$  sea una variable cíclica, porque en cualquier instante podemos definir las direcciones principales con  $\hat{e}_1$  en la línea de nodos, lo que es equivalente a tomar  $\psi = 0$ . De hecho, esa es la forma más rápida de deducir la expresión anterior a partir de la ec. (77).