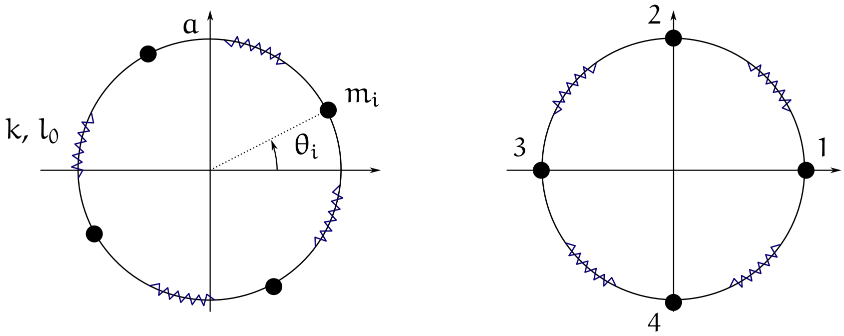
Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2020

Clase práctica del lunes 1/6. *Guía 5. Pequeñas oscilaciones.**

Problema 10

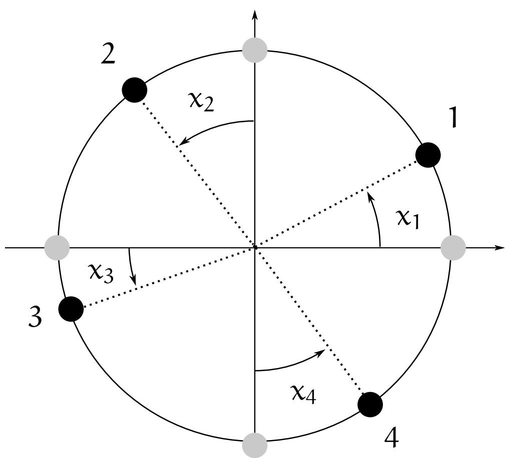
Se trata de cuatro partículas de masa m que se mueven sobre un aro fijo de radio a, como muestra la figura de la izquierda. Las partículas interactúan a través de resortes de constante elástica k y longitud natural l_0.



Debido a que las fuerzas son proporcionales a las diferencias entre los ángulos, este problema no va a requerir linealización. El potencial será cuadrático desde el principio. También podemos anticipar que habrá una frecuencia nula.

Por simetría, la configuración en forma de cuadrado es de equilibrio. Es indiferente la orientación del cuadrado. En estos casos, una alternativa es elegir arbitrariamente, entre las infinitas configuraciones equivalentes, una configuración de referencia y hacer pequeñas oscilaciones alrededor de esta última. Tomaremos como configuración de referencia la que muestra la figura de la derecha.

Las partículas en el aro pueden ser caracterizadas por los cuatro ángulos θ_i, medidos a partir de la posición de equilibrio de la primera partícula. Las coordenadas de pequeñas oscilaciones x_i miden la diferencia entre el ángulo de la partícula i y su ángulo de equilibrio, como muestra la figura.



*zanellaj@df.uba.ar

Por construcción, será entonces

$$\theta_1 = x_1, \qquad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + x_2, \qquad \theta_3 = \pi + x_3, \qquad \theta_4 = \frac{3\pi}{2} + x_4. \tag{1}$$

La energía cinética es función sólo de las velocidades

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = \tfrac{1}{2} m a^2 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2\right). \tag{2}$$

Por otro lado, la energía potencial es una función de las longitudes de los arcos de círculo entre las partículas

$$\begin{aligned} V = \frac{k}{2}\Bigg[&\Big(|\theta_2 - \theta_1| a - l_0\Big)^2 + \Big(|\theta_3 - \theta_2| a - l_0\Big)^2 \\ &+ \Big(|\theta_4 - \theta_3| a - l_0\Big)^2 + \Big(|2\pi + \theta_1 - \theta_4| a - l_0\Big)^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{3}$$

Notar que la longitud del arco entre la partícula 1 y la partícula 4 se escribe de manera especial. Si tomásemos la diferencia entre θ_1 y θ_4 estaríamos midiendo la longitud del arco complementario. Las barras de valor absoluto son, en principio, necesarias, porque las partículas pueden cruzarse unas a otras. Si convenimos en estudiar oscilaciones pequeñas, entonces podremos omitirlas: siempre será $\theta_2 > \theta_1$, etc. En términos de las coordenadas que miden el apartamiento del equilibrio, resulta

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2} + x_2 - x_1, \tag{4}$$

$$\theta_3 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + x_3 - x_2, \tag{5}$$

$$\theta_4 - \theta_3 = \frac{\pi}{2} + x_4 - x_3, \tag{6}$$

$$2\pi + \theta_1 - \theta_4 = \frac{\pi}{2} + x_1 - x_4. \tag{7}$$

Luego,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) = \frac{k}{2}\Bigg\{ &\left[\left(\frac{\pi}{2} + x_2 - x_1\right) a - l_0\right]^2 + \left[\left(\frac{\pi}{2} + x_3 - x_2\right) a - l_0\right]^2 \\ &+ \left[\left(\frac{\pi}{2} + x_4 - x_3\right) a - l_0\right]^2 + \left[\left(\frac{\pi}{2} + x_1 - x_4\right) a - l_0\right]^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Definamos $\Delta l = l_0 - \frac{1}{2}\pi a$. Entonces, de manera más compacta,

$$\begin{aligned} V(x) = \frac{k}{2}\bigg\{ \Big[(x_2 - x_1)a - \Delta l\Big]^2 + \Big[(x_3 - x_2)a - \Delta l\Big]^2 \\ + \Big[(x_4 - x_3)a - \Delta l\Big]^2 + \Big[(x_1 - x_4)a - \Delta l\Big]^2 \bigg\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Según anticipamos, este potencial ya es cuadrático en los apartamientos. Desarrollando los cuadrados, queda

$$V(x) = V_0 + \tfrac{1}{2}ka^2\Big[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2\Big], \tag{10}$$

donde $V_0 = 2k\Delta l^2$. Esta constante puede omitirse en todos los cálculos que siguen. Es muy importante notar que no hay términos lineales en los desplazamientos: al expandir los cuadrados en la ec. (9) estos términos se cancelan:

$$2a\Delta l\big[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + (x_1 - x_4)\big] = 0. \tag{11}$$

Si los términos lineales no se cancelaran sería señal de que la configuración que se ha supuesto como de equilibrio no es tal.

El lagrangiano de pequeñas oscilaciones se lee como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}ma^2\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2\right) \\ - \tfrac{1}{2}ka^2\Big[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2\Big]. \end{aligned} \tag{12}$$

Siempre podemos multiplicar al lagrangiano por una constante sin alterar las ecuaciones de movimiento. Si dividimos la expresión anterior por ma^2 y seguimos llamando $\mathcal{L}$ al resultado, nuestro lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2\right) \\ - \tfrac{1}{2}\omega_0^2\left[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

donde

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{14}$$

Esto simplifica las cuentas, sobre todo al escribir las matrices. Con una redefinición de la variable temporal incluso podríamos deshacernos de ω_0^2, que es el único parámetro dimensional que sigue apareciendo.

En forma matricial

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \tfrac{1}{2}\,\dot{x}\cdot\mathbb{M}\cdot\dot{x} - \tfrac{1}{2}\,x\cdot\mathbb{V}\cdot x. \tag{15}$$

La matriz energía cinética es diagonal

$$\mathbb{M} = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

La matriz potencial tiene términos cruzados. Es fácil ver que

$$\mathbb{V} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Recordemos que, en general, las ecuaciones de Euler-Lagrange para un lagrangiano de la forma (15) son

$$\mathbb{M}\cdot\ddot{x} + \mathbb{V}\cdot x = 0. \tag{18}$$

Proponiendo soluciones de la forma $x = e^{i\omega t}\mathbf{A}$, resulta la ecuación

$$\left[\omega^2\mathbb{M} - \mathbb{V}\right]\cdot\mathbf{A} = 0, \tag{19}$$

Para que haya soluciones no triviales, debe ser cero el determinante de la matriz $\omega^2\mathbb{M} - \mathbb{V}$. En el caso del problema que estamos resolviendo,

$$\omega^2\mathbb{M} - \mathbb{V} = \begin{pmatrix} \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & 0 & \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{20}$$

donde, ya que $\omega^2 - 2\omega_0^2$ aparece tantas veces repetido, hemos definido

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2. \tag{21}$$

Debe suceder entonces que

$$\Delta \equiv \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = 0, \tag{22}$$

Calcular el determinante de la ec. (22) es más sencillo de lo que parece. Lo que sigue es para mostrarles que un determinante de más de 3×3 no es necesariamente complicado de calcular.

Recordemos que el valor del determinante no cambia si a una fila se le suma otra, y que si a una fila se la multiplica por una constante el determinante se multiplica por la misma constante. El objetivo es llevar la matriz a una forma decididamente más triangular o con la mayor cantidad de elementos nulos posible. Así, si a la primera fila le restamos la tercera, y a la segunda la cuarta, queda

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Si ahora a la última fila la multiplicamos por λ y le restamos la primera,

$$\lambda\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Si a la tercera fila la multiplicamos por λ y le restamos la segunda, obtenemos

$$\lambda^2\Delta = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Con esto ya es suficiente. Sólo tendremos que calcular un determinante de 2×2. Pueden verificar que

$$\lambda^2\Delta = \lambda^2 \times \lambda^2(\lambda^2 - 4) \quad \Rightarrow \quad \Delta = \lambda^2(\lambda^2 - 4). \tag{26}$$

De aquí obtenemos las cuatro raíces de $\Delta = 0$, dos de las cuales son degeneradas:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \tag{27}$$

Usando la ec. (21),

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \quad \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2(\lambda + 2), \tag{28}$$

las frecuencias propias correspondientes son

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 2\omega_0, \quad \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{2}\omega_0. \tag{29}$$

Para escribir las ecuaciones que dan las componentes de los autovectores, podemos usar las matrices simplificadas, ya que las operaciones hechas corresponden a combinaciones lineales de las ecuaciones originales. El cuidado que hay que tener es el de usar aquellas matrices en cuya construcción no haya intervenido la multiplicación por $\lambda - \lambda_i$. La matriz en la ec. (23) sirve a nuestros propósitos. Escribiremos todos los autovectores en la forma

$$\mathbf{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Para no multiplicar la notación, usaremos las mismas letras a, b, c y d al hablar de cualquiera de los autovectores.

Para el autovalor λ_1 encontramos

$$a = b = c = d. \tag{31}$$

Tenemos la libertad de elegir la constante común a las cuatro componentes, siempre que no sea cero. Lo más sencillo parece ser

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Para el autovalor λ_2,

$$a = -b = c = -d, \tag{33}$$

y el autovector es

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Para el par de autovalores degenerados, el sistema queda doblemente indeterminado, fijando únicamente una relación entre pares de componentes

$$a = -c, \quad b = -d. \tag{35}$$

Cuando pasa algo así, se tiene la libertad de elegir, dentro de la clase de vectores que satisfacen estas ecuaciones, dos vectores linealmente independientes cualesquiera. Lo más práctico es elegirlos ortogonales respecto de $\mathbb{M}$; es decir, elegir $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ tales que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}' = 0. \tag{36}$$

La razón detrás de esta elección es para que siga valiendo la misma relación general que entre autovectores de autovalores diferentes. Cualquier par de autovectores correspondientes a diferentes autovalores satisface esa relación de ortogonalidad. Entonces es conveniente extender esa propiedad a los autovectores de los autovalores degenerados (aunque bastaría con elegirlos linealmente independientes).

En nuestro caso, la matriz $\mathbb{M}$ es la identidad, lo que implica que la ortogonalidad es respecto al producto escalar usual. Dos vectores que satisfacen las ecs. (35) y que son a la vez ortogonales entre sí son

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Notar que los cuatro autovectores así construidos son ortogonales.

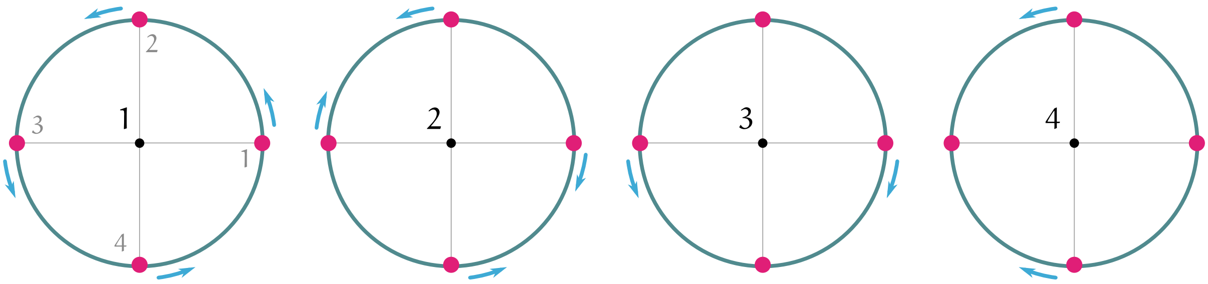
$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Según señalamos antes, esta ortogonalidad, en el caso general, es respecto a la matriz $\mathbb{M}$,

$$\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}^{(j)} = 0. \tag{39}$$

Algunos comentarios:

■ La figura muestra esquemáticamente el movimiento de las masas cuando oscilan en un modo determinado*. Cada vector $\mathbf{A}^{(i)}$ da las amplitudes relativas. Como veremos enseguida, el primer modo es en realidad un movimiento de rotación rígida.



■ El modo correspondiente a $\omega = 0$ no corresponde a una solución del problema de pequeñas oscilaciones. Su existencia está relacionada al hecho de que el equilibrio sea indiferente a la orientación de las masas, siempre que formen un cuadrado. La solución relacionada con $\omega = 0$ es la del movimiento rígido de las cuatro masas con velocidad angular constante

$$\theta_i = \Omega t + \theta_{i0}. \tag{40}$$

En un momento veremos como excluir este modo de rotación rígida de la solución general del problema de pequeñas oscilaciones.

*https://youtu.be/GjED1-L0D8Q

■ La solución general de las ecuaciones de movimiento para el lagrangiano de pequeñas oscilaciones es

$$\mathbf{x}(t) = (C_1 + C_1' t)\,\mathbf{A}^{(1)} + \sum_{i=2}^{4} (C_i \cos\omega_i t + C_i' \sin\omega_i t)\,\mathbf{A}^{(i)}. \tag{41}$$

Las constantes de integración se obtienen a partir de las condiciones iniciales. Aquí resulta muy útil la ortogonalidad de los autovectores. Evaluando las posiciones en $t = 0$,

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{i=1}^{4} C_i \mathbf{A}^{(i)} \tag{42}$$

es fácil ver que para todos los modos vale*

$$C_i = \frac{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}(0)}{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}. \tag{43}$$

La condición para la velocidad inicial,

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = C_1' \mathbf{A}^{(1)} + \sum_{i=2}^{4} \omega_i C_i' \mathbf{A}^{(i)}, \tag{44}$$

requiere tratar separadamente al modo de frecuencia cero. Por un lado es

$$C_1' = \frac{\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0)}{\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}^{(1)}}, \tag{45}$$

mientras que, para $i = 2, 3, 4$, resulta

$$C_i' = \frac{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}(0)}{\omega_i \mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}. \tag{46}$$

La diferencia está en el factor ω_i dividiendo en la última ecuación.

Para excluir el modo de rotación rígida deben anularse C_1 y C_1'. Teniendo en cuenta las formas de $\mathbf{A}^{(1)}$ y de $\mathbb{M}$, ecs. (16) y (32), eso implica que las condiciones iniciales satisfagan

$$C_1 = \tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i(0) = 0, \qquad C_1' = \tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \dot{x}_i(0) = 0. \tag{47}$$

Si se tratase de un movimiento unidimensional sobre el eje x, diríamos que estas ecuaciones son equivalentes a pedir que el centro de masa esté en $x = 0$ y que su velocidad sea 0.

*En estas notas **no** se usa el convenio de sumación de Einstein.

■ Las coordenadas normales ξ_i son aquellas combinaciones lineales de las coordenadas x_i que separan completamente el lagrangiano,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^{4} \tfrac{1}{2} \left(\dot{\xi}_i^2 - \omega_i^2 \xi_i^2 \right). \tag{48}$$

Sus ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0. \tag{49}$$

Para obtener cuáles son estas combinaciones lineales, podemos reescribir la solución general (41) como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{A}^{(i)} f_i(t). \tag{50}$$

Esto ya no hay que verlo como una relación entre funciones del tiempo sino como una transformación entre las coordenadas generalizadas x_i y las f_i. Por construcción las funciones f_i satisfacen las ecuaciones diferenciales (49), de manera que si logramos despejar las funciones f_i del sistema de ecs. (50) obtendremos, salvo por una constante multiplicativa, las combinaciones ξ_i. Usando la ortogonalidad de los autovectores, encontramos

$$f_i(t) = \frac{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{x}(t)}{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}. \tag{51}$$

Las cuentas son muy fáciles porque $\mathbb{M}$ es la identidad. Explícitamente, resulta

$$\begin{aligned} f_1 &= \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ f_2 &= \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \\ f_3 &= \tfrac{1}{2}(x_1 - x_3), \\ f_4 &= \tfrac{1}{2}(x_2 - x_4). \end{aligned} \tag{52}$$

Cada coordenada normal ξ_i es proporcional a la combinación lineal correspondiente,

$$\xi_i = c_i f_i. \tag{53}$$

Lo que fija la constante de proporcionalidad es que todas las $\dot{\xi}_i^2$ aparezcan en el lagrangiano con un coeficiente igual a 1/2. A partir de la ec. (50), el término cinético es

$$\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbb{M}\cdot\dot{\mathbf{x}} = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}\mathbf{A}^{(i)}\dot{f}_i\right)\cdot\mathbb{M}\cdot\left(\sum_{j=1}^{4}\mathbf{A}^{(j)}\dot{f}_j\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4}\mathbf{A}^{(i)}\cdot\mathbb{M}\cdot\mathbf{A}^{(j)}\,\dot{f}_i\dot{f}_j \tag{54}$$

Usando la ortogonalidad entre los autovectores y la definición de las coordenadas f_i en términos de las ξ_i,

$$\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbb{M}\cdot\dot{\mathbf{x}} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\mathbf{A}^{(i)}\cdot\mathbb{M}\cdot\mathbf{A}^{(i)}\,\dot{f}_i^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\frac{\mathbf{A}^{(i)}\cdot\mathbb{M}\cdot\mathbf{A}^{(i)}}{c_i^2}\,\dot{\xi}_i^2. \tag{55}$$

Esto muestra que debemos elegir

$$c_i = \sqrt{\mathbf{A}^{(i)}\cdot\mathbb{M}\cdot\mathbf{A}^{(i)}}, \tag{56}$$

y, por lo tanto,

$$\xi_i = \sqrt{\mathbf{A}^{(i)}\cdot\mathbb{M}\cdot\mathbf{A}^{(i)}}\,f_i = \frac{\mathbf{A}^{(i)}\cdot\mathbb{M}\cdot\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{A}^{(i)}\cdot\mathbb{M}\cdot\mathbf{A}^{(i)}}}. \tag{57}$$

En el caso particular de este problema, queda

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),\\
\xi_2 &= \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4),\\
\xi_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3),\\
\xi_4 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_4).
\end{aligned} \tag{58}$$

Si en la ec. (50) escribimos los f_i en términos de ξ_i obtenemos las fórmulas inversas

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{4}\frac{\mathbf{A}^{(i)}}{\sqrt{\mathbf{A}^{(i)}\cdot\mathbb{M}\cdot\mathbf{A}^{(i)}}}\,\xi_i. \tag{59}$$

Escritas por extenso,

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_3, \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_4, \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_3, \\ x_4 &= \tfrac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_4. \end{aligned} \tag{60}$$

Notar que muchas de las operaciones anteriores se hubieran simplificado si de antemano hubiésemos elegido a los autovectores $\mathbf{A}^{(i)}$ normalizados respecto de la matriz $\mathbb{M}$,

$$\mathbf{A}^{(i)} \to \frac{\mathbf{A}^{(i)}}{\sqrt{\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}^{(i)}}}. \tag{61}$$

En tal caso, habría que tomar $\mathbf{A}^{(i)} \cdot \mathbb{M} \cdot \mathbf{A}^{(i)} = 1$ en todas las expresiones anteriores.

■ **Una condición inicial particular**. En el enunciado se pide encontrar los desplazamientos x_i para una condición inicial especificada no en términos de $x_i(0)$ y $\dot{x}_i(0)$ sino en términos de las condiciones iniciales para los modos normales, $\xi_i(0)$ y $\dot{\xi}_i(0)$. Específicamente, tenemos todas las velocidades y desplazamientos iniciales iguales a cero salvo que

$$\xi_2(0) = b. \tag{62}$$

Puesto que los modos normales evolucionan de manera independiente, será

$$\xi_1(t) = \xi_3(t) = \xi_4(t) = 0, \tag{63}$$

mientras que

$$\xi_2(t) = b \cos \omega_2 t. \tag{64}$$

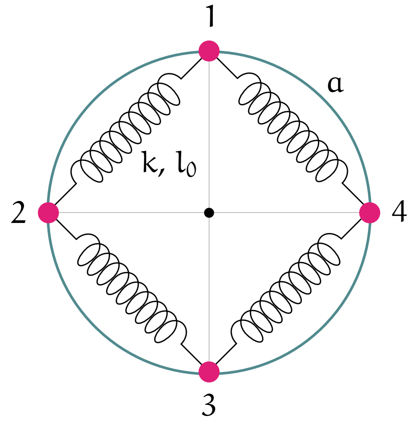
Únicamente está excitado el segundo modo normal. De acuerdo a las ecs. (60), obtenemos

$$x_1(t) = -x_2(t) = x_3(t) = -x_4(t) = \tfrac{1}{2}\xi_2. \tag{65}$$

Como era de esperarse, el vector de desplazamientos es proporcional al autovector $\mathbf{A}^{(2)}$.

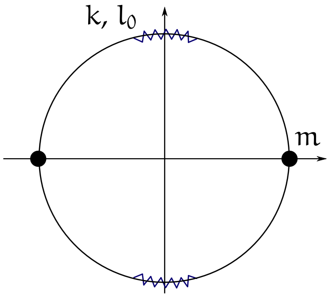
Otros problemas

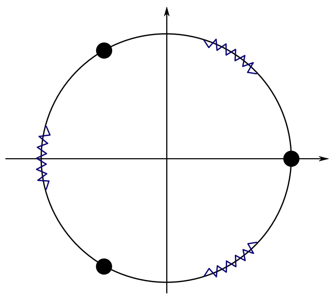
Una variación de este problema (y del problema 7) es considerar que los resortes están dispuestos como en la figura.



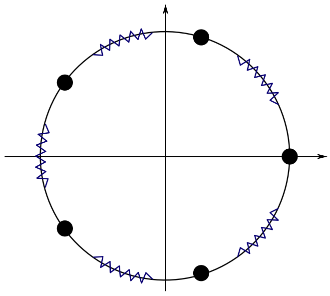
Las frecuencias propias seguramente serán distintas. Pero ¿pueden anticipar algo acerca de sus multiplicidades y de los autovectores de la ecuación característica?

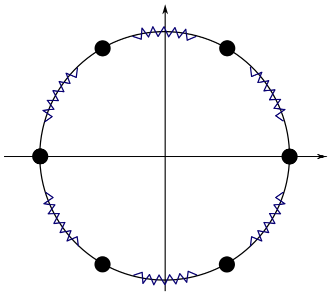
Para practicar con dos problemas más fáciles, consideren los sistemas de 2 y 3 partículas.





Traten de anticipar los resultados. Una vez obtenidos los resultados, vean de qué modo podrían haberlos anticipado. Lo mismo vale para los siguientes dos problemas, que están un escalón más arriba:





Intenten demostrar que si el sistema tiene N partículas, entonces las frecuencias propias están dadas por

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin \frac{\pi n}{N}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{66}$$

Independientemente, si resolvieron los problemas para 2, 3, 4, ... partículas, verifiquen que la fórmula funciona.