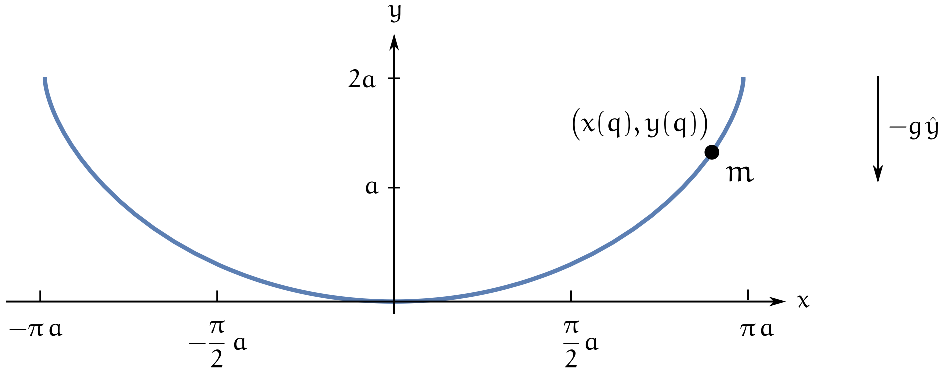
Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2020

Simulacro de 2do. parcial (extendido)

■ **Problema 1**. Una partícula de masa m está restringida a moverse en el plano vertical a lo largo de la curva definida paramétricamente por las ecuaciones:

$$x(q) = (q + \sin q)a, \qquad y(q) = (1 - \cos q)a,$$

con $-\pi \leqslant q \leqslant \pi$, y a una constante positiva. Hay gravedad. La energía inicial de la partícula es menor que $2mga$.



a) Usando q como coordenada, escriba el lagrangiano $L(q, \dot{q})$ y el hamiltoniano $H(q, p)$. Aplique lo antes posible las identidades trigonométricas $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$, $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$.

b) Encuentre una expresión integral para la función característica de Hamilton $W(q, E)$.

c) Encuentre las variables de ángulo-acción $J(E)$ y $w(q, E)$.

d) Calcule la frecuencia $\omega(E)$ como función de la energía. La respuesta lo sorprenderá.

■ **Problema 2**. Dado el primer par de transformaciones para un sistema de dos grados de libertad,

$$Q_1 = q_1^2, \qquad Q_2 = q_1 + q_2. \tag{1}$$

a) Suponiendo una función generatriz de tipo F_2 independiente del tiempo. ¿Qué par de ecuaciones diferenciales debe satisfacer para ser compatible con las relaciones (1)?

b) Integre las ecuaciones y encuentre la familia de funciones generatrices $F_2(q_1, q_2, P_1, P_2)$ más general compatible con las ecuaciones (1).

c) Para esa familia de funciones, dar las ecuaciones de transformación de los impulsos,

$$P_i = P_i(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

d) Dado un sistema cuyo hamiltoniano es

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2,$$

elija una de las F_2 dentro de la familia de funciones posibles, de modo que Q_1 y Q_2 sean cíclicas respecto del nuevo hamiltoniano K. Escriba K explícitamente.

■ **Problema 3**. Un disco plano de masa m y radio a es arrojado hacia arriba ($I_3 = \frac{1}{2}ma^2$).

a) Mostrar que la dinámica se desacopla en una parte de traslación y otra de rotación.

b) Definir un problema 1D para el ángulo de Euler θ.

c) Suponer que las condiciones iniciales son

$$\varphi(0) = \psi(0) = \theta(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0,$$

con $|\dot{\theta}_0| \ll \omega_0$. Encontrar $\theta(t)$, $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ hasta orden $\delta\theta \equiv \dot{\theta}_0/\omega_0$. *Ayuda*: asumir que $|\theta| \ll 1$ y justificar luego de hechas las cuentas.

d) Hasta el mismo orden de aproximación encontrar $\hat{e}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Demostrar que $\hat{e}_3$ realiza un movimiento que tiene el doble de la frecuencia que el movimiento que realizan $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$.

■ **Problema 4**. Una partícula de masa m se mueve en un potencial que, en coordenadas esféricas, se escribe como

$$U(r, \theta, \varphi) = V(r) + \frac{g(\theta)}{r^2}. \tag{2}$$

a) Escribir el hamiltoniano en coordenadas esféricas.

b) Mostrar que la ecuación de H–J es separable en coordenadas esféricas.

c) Encontrar una expresión integral para la función característica de Hamilton W. (Por simplicidad, al tomar raíces cuadradas, omitir el símbolo $\pm$).

d) A partir de la función W escribir las expresiones que, de llevar a cabo las integrales, dan la solución de las ecuaciones de movimiento.

■ **Problema 5**. Una partícula de masa m está fija al marco interno de un giróscopo mediante un semicírculo de radio a, como muestran las figuras. El marco externo rota alrededor del eje vertical. El marco interno rota alrededor del eje horizontal que pasa por los puntos que lo unen al marco externo. La peonza central puede rotar sobre su propio eje. El giróscopo tiene momentos de inercia respecto de su CM $I_1 = I_2 \equiv I$ e I_3 (los marcos tienen masa despreciable). **Vale la siguiente relación:** $\mathbf{ma^2 = I}$. Hay gravedad.

a) Escribir el lagrangiano. Encontrar al menos 3 constantes de movimiento.

b) Formular un problema unidimensional para el ángulo de Euler θ. Considerar de ahora en más que las condiciones iniciales son tales que

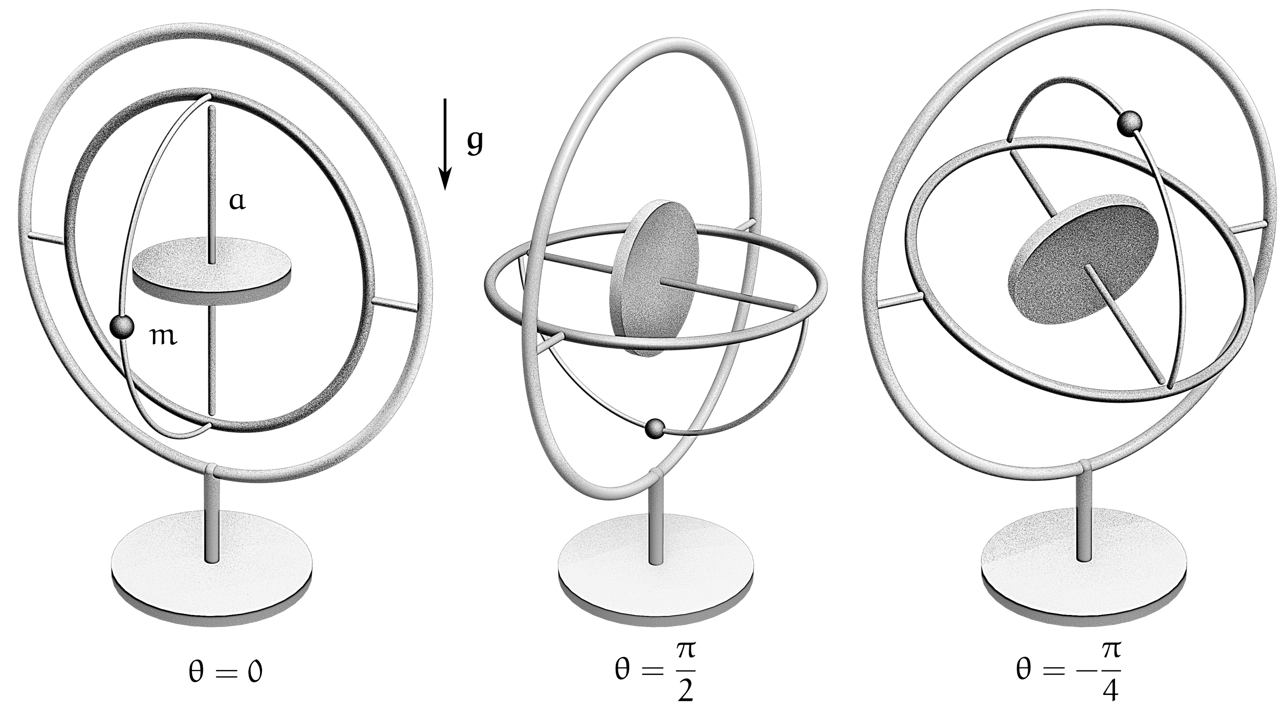
$$\dot{\varphi}(0) = 0, \quad p_\varphi(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = \omega_3.$$

c) Mostrar que $\theta = \pi/2$ es siempre un punto de equilibrio estable para el problema 1D.

d) Mostrar que existe ω_0 tal que para $|\omega_3| > \omega_0$ hay otro punto de equilibrio estable θ_1. ¿Cuál es este punto de equilibrio y cuánto vale ω_0?

e) Resolver el movimiento del sistema cuando θ realiza pequeñas oscilaciones alrededor de θ_1, con $\theta(0) = \theta_1 + \delta\theta_0$, donde $|\delta\theta_0| \ll 1$, y $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. (Es decir, dar expresiones para los tres ángulos de Euler como funciones del tiempo).

f) En la misma aproximación, calcular $\hat{e}_3(t)$ y graficar la curva que describe su extremo.



Notación: $\omega_g = \sqrt{g/a}$, $\alpha = (I_3\omega_3/I\omega_g)^2$.