Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2020

Clase práctica del lunes 20/7: *Hamilton-Jacobi en un problema relativista.*[*]

■ **Problema**. El hamiltoniano de una partícula relativista de masa m y carga e que se mueve sobre el eje x en un campo eléctrico constante y uniforme $\mathbf{E} = \mathcal{E}\,\hat{x}$ es

$$H(x, p) = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - \lambda x, \tag{1}$$

donde c es la velocidad de la luz y $\lambda = e\mathcal{E} > 0$. Dibujar el retrato de fase. Encontrar la solución general del movimiento mediante el método de H–J.

■ **Solución**. La solución de Física 1 consistiría en escribir y resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = e\mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e\mathcal{E}. \tag{2}$$

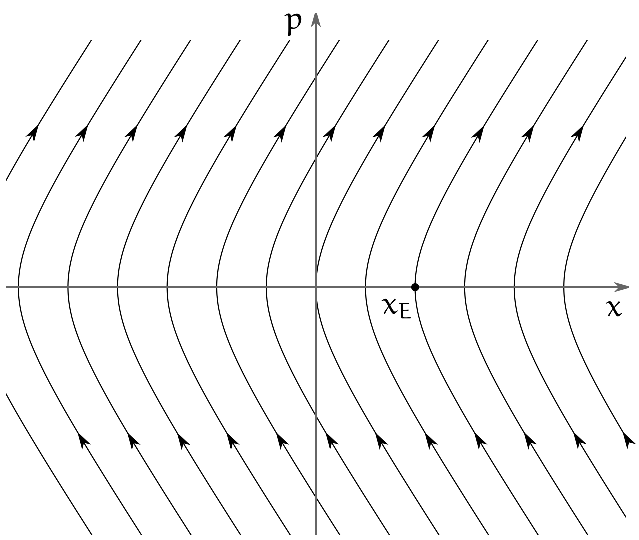
Aquí seguiremos el método de H–J, resolviendo la ecuación diferencial para la función característica de Hamilton W. Usaremos W como función generatriz de una transformación que dará como resultado un hamiltoniano constante.

El retrato de fase es el gráfico de las curvas de nivel de la función $H(x, p)$. Aunque podríamos despejar $p(x, E)$ a partir de la ec. (1), esta vez conviene proceder a la inversa y despejar $x(p, E)$. A partir de la ec. (1) tenemos

$$x(p, E) = \frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{(pc)^2 + E_0^2} - E\right]. \tag{3}$$

donde $E_0 = mc^2$ es la energía de la masa en reposo. El mínimo valor de x alcanzado será

$$x_E = \frac{E_0 - E}{\lambda}. \tag{4}$$



[*]zanellaj@df.uba.ar

Hay que notar que la relación entre la velocidad y el impulso ya no es $p = m\dot{x}$, sino

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{pc^2}{\sqrt{(pc)^2 + E_0^2}}. \tag{5}$$

Sigue siendo cierto que p y $\dot{x}$ tienen el mismo signo, pero cuando $|p| \to \infty$ la magnitud de la velocidad tiende a c. El sentido de las flechas en la figura anterior está determinado por la ec. (5), pues $\dot{x}$ tiene el mismo signo que p.

La partícula se aproxima a x_E desde $x \to \infty$ en $t \to -\infty$, pasa por x_E en cierto instante t_0 y para $t \to \infty$ de nuevo es $x \to \infty$. Para $|pc| \gg E_0$, la trayectoria en el espacio de fase tiende a las asíntotas

$$x(p, E) \to \frac{1}{\lambda}(|pc| - E). \tag{6}$$

Podemos decir algo más acerca de las trayectorias en el espacio de fase. La ec. (3) implica

$$\begin{gathered} \lambda x + E = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} \quad \Rightarrow \\ (\lambda x + E)^2 - (pc)^2 = E_0^2, \end{gathered} \tag{7}$$

con la condición adicional

$$x > \frac{E_0 - E}{\lambda}, \tag{8}$$

que proviene del hecho de que

$$\lambda x + E = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} > E_0. \tag{9}$$

La ec. (7) representa hipérbolas con vértices en el eje x en las posiciones

$$x_\pm = \frac{\pm E_0 - E}{\lambda}. \tag{10}$$

Según la ec. (8) debemos quedarnos únicamente con la rama derecha de estas hipérbolas.

Debido a que se trata de un sistema conservativo, buscaremos la función característica de Hamilton, que satisface la ecuación

$$H\big(x, W'(x)\big) = E, \tag{11}$$

que en el presente problema se lee como

$$\sqrt{W'(x)^2c^2 + E_0^2} - \lambda x = E. \tag{12}$$

Despejando,

$$cW'(x) = \pm\sqrt{(E + \lambda x)^2 - E_0^2}. \tag{13}$$

La solución dependerá explícitamente de E. Será

$$W(x, E) = \pm\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} dx\,\sqrt{(E + \lambda x)^2 - E_0^2}. \tag{14}$$

Como siempre, no hay que apresurarse a calcular esta integral. En este tipo de potencial todas las trayectorias tienen un punto de retorno donde $p = 0$,

$$x_E = \frac{E_0 - E}{\lambda}. \tag{15}$$

Resulta práctico tomar el límite inferior de la integral (14) en $x_0 = x_E$, definiendo

$$W(x, E) = \pm\frac{1}{c}\int_{x_E}^{x} dx\,\sqrt{(E + \lambda x)^2 - E_0^2}. \tag{16}$$

Según ya hicimos notar, esto tiene la ventaja de que la derivada respecto de E puede pasar a través del símbolo integral, puesto que el integrando evaluado en x_E es cero.

Considerada como una función generatriz de tipo 2, la función característica de Hamilton $W(x, E)$ transforma al hamiltoniano original en

$$K(Q, E) = E, \tag{17}$$

donde E es el nuevo impulso y Q es la coordenada conjugada de E. La dinámica de Q está dada simplemente por

$$Q = t + Q_0, \tag{18}$$

donde Q_0 es una constante de integración.

Aquí la función W tiene dos ramas, de modo que necesitamos distinguir entre las variables y constantes de integración de una y otra. La rama correspondiente al signo positivo en la ec. (16) resuelve el movimiento para $p \geqslant 0$, y viceversa. Para no arrastrar el doble signo durante todo el cálculo, resulta más sencillo resolver para una sola de las ramas y usar propiedades conocidas del movimiento para extender la solución a todo tiempo.

Del análisis que hicimos al construir el retrato de fase, sabemos que si la partícula alcanza el punto $x = x_E$ en $t = t_0$, la trayectoria debe ser simétrica respecto de ese instante,

$$x(t_0 - \Delta t) = x(t_0 + \Delta t). \tag{19}$$

Si hemos encontrado la solución para $t \geqslant t_0$, que es cuando $p \geqslant 0$, podemos usar la fórmula anterior para calcular $x(t)$ para valores de $t < t_0$, cuando es $p < 0$.

Concentrémonos entonces en la rama con $p \geqslant 0$. La ecuación de transformación para la nueva coordenada es

$$Q = \frac{\partial W}{\partial E}(x, E). \tag{20}$$

Combinando esta relación con la ec. (18), el resultado es una ecuación que contiene la dinámica de la coordenada x original,

$$t + Q_0 = \frac{\partial W}{\partial E}(x, E). \tag{21}$$

Reemplazando el resultado de la ec. (16) y pasando la derivada respecto de E a través del símbolo integral se obtiene

$$t + Q_0 = \frac{1}{c}\int_{x_E}^{x} dx\, \frac{\partial}{\partial E}\sqrt{(E+\lambda x)^2 - E_0^2}. \tag{22}$$

Recién ahora enfrentamos el problema de resolver integrales. Necesitamos calcular

$$\int_{x_E}^{x} dx\, \frac{\partial}{\partial E}\sqrt{(E+\lambda x)^2 - E_0^2}. \tag{23}$$

El hecho de que E aparezca en la combinación $E + \lambda x$ permite obviar la integración propiamente dicha, pues resulta

$$\int_{x_E}^{x} dx\, \frac{\partial}{\partial E}\sqrt{(E+\lambda x)^2 - E_0^2} = \frac{1}{\lambda}\int_{x_E}^{x} dx\, \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(E+\lambda x)^2 - E_0^2} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{(E+\lambda x)^2 - E_0^2}. \tag{24}$$

Esta clase de simplificación ocurrirá siempre que E y x aparezcan en una combinación lineal. Reemplazando el resultado (24) en la ec. (22) queda

$$t + Q_0 = \frac{1}{c\lambda}\sqrt{(E+\lambda x)^2 - E_0^2}. \tag{25}$$

En esta ecuación vemos que para $t = -Q_0$ resulta $x = x_E$. De esta manera, la constante $-Q_0$ coincide con el tiempo de paso por el punto de retorno,

$$Q_0 = -t_0. \tag{26}$$

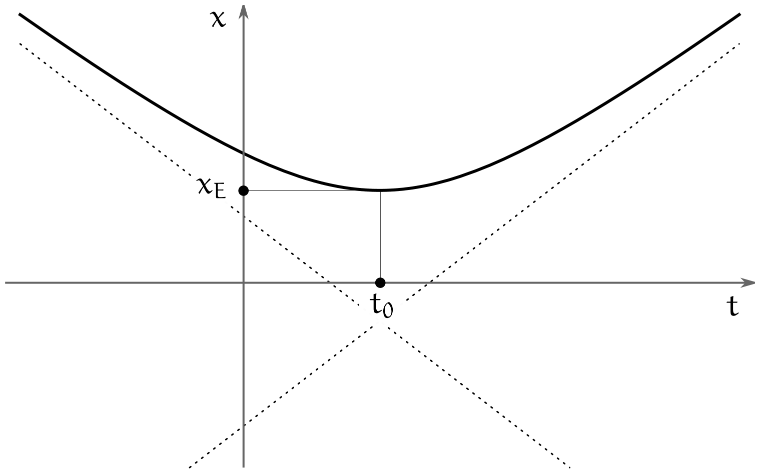
La ec. (25) será válida para $t \geqslant t_0$, donde es $p \geqslant 0$. Al despejar x hay que tomar el signo de la raíz que implica $\dot{x} \geqslant 0$ para $t \geqslant t_0$,

$$x\,(t, E, t_0) = \frac{1}{\lambda}\left\{\sqrt{E_0^2 + [c\lambda\,(t - t_0)]^2} - E\right\}. \tag{27}$$

Esta expresión es simétrica respecto de t_0, por lo tanto para obtener la solución válida para $t < t_0$ no es necesario introducir ninguna modificación. Otra forma de escribirla es

$$x\,(t, E, t_0) = x_E + \frac{1}{\lambda}\left\{\sqrt{E_0^2 + [c\lambda\,(t - t_0)]^2} - E_0\right\}. \tag{28}$$

Aquí vemos de nuevo que el signo frente a la raíz es el correcto. De otro modo la partícula se movería a la izquierda del punto de retorno, lo que no puede ser.



Este tipo de movimiento se conoce con el nombre de movimiento hiperbólico. Para

$$c\lambda|t - t_0| \ll E_0, \tag{29}$$

es decir, cuando la partícula está cerca del punto en el que su velocidad se anula, resulta

$$x(t) \simeq x_E + \frac{1}{2}\frac{\lambda c^2}{E_0}(t - t_0)^2 = x_E + \frac{e\mathcal{E}}{2m}(t - t_0)^2. \tag{30}$$

Este es el resultado no relativista para la trayectoria de una partícula con aceleración $e\mathcal{E}/m$ constante. Notar que no depende de c. En contraste, para $c\lambda|t - t_0| \gg E_0$,

$$x(t) \simeq x_E + c|t - t_0| - \frac{E_0}{\lambda} = x_E + c|t - t_0| - \frac{mc^2}{e\mathcal{E}}, \tag{31}$$

lo que da la ecuación de las asíntotas. Notar que $mc^2/(e\mathcal{E})$ tiene unidades de longitud; es la longitud que corresponde a una diferencia de energía potencial igual a la energía en reposo de la partícula. A su vez, el tiempo $E_0/(c\lambda) = mc^2/(ce\mathcal{E})$ es el tiempo característico en el que la partícula alcanza velocidades relativistas.

■ **Algunos comentarios sobre el movimiento hiperbólico**. Sin introducir conceptos tales como el tiempo propio, no es mucho lo que podemos decir del movimiento hiperbólico. Salvo por un hecho concreto, daremos aquí algunas características meramente cinemáticas que no requieren ninguna transformación entre sistemas de referencia.

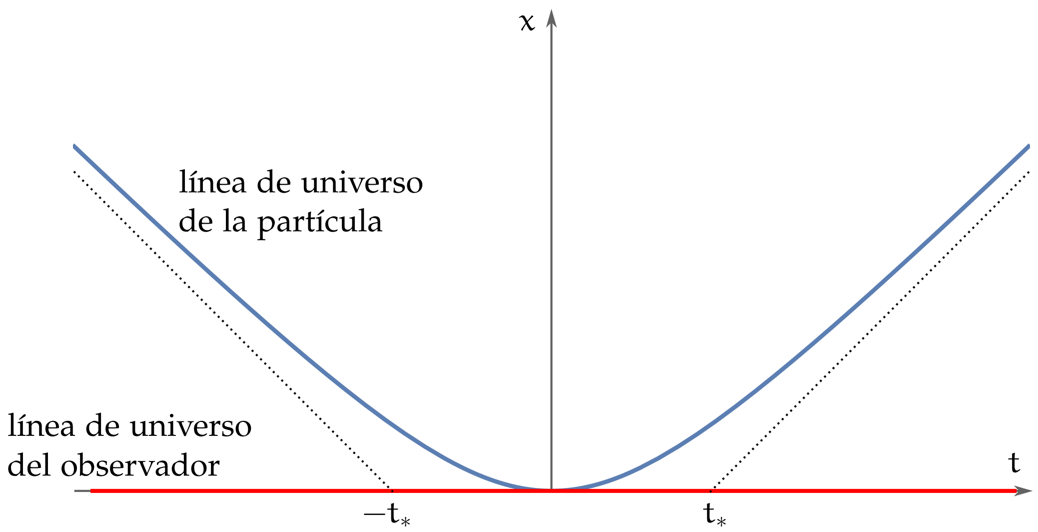
El hecho que queremos resaltar es que si en un sistema el campo eléctrico es $\mathbf{E} = \mathcal{E}\,\hat{x}$, uniforme y constante, entonces en todos los sistemas de referencia inerciales que se mueven con velocidad paralela al eje x, el campo sigue valiendo $\mathbf{E}$. Esto tiene la siguiente aplicación: supongamos que una carga se acelera según la dirección de $\mathbf{E}$. En un instante dado consideramos el sistema en donde la carga está momentáneamente en reposo. Como en ese sistema el campo sigue siendo $\mathcal{E}$, la aceleración de la carga es

$$a_{\text{propia}} \equiv a = \frac{e\mathcal{E}}{m}, \tag{32}$$

con independencia del instante considerado. El movimiento hiperbólico se caracteriza por ser tal que la aceleración propia es constante. Dicho mal y pronto, la partícula siempre siente la misma aceleración. En una nave espacial que siguiera un movimiento hiperbólico, un astronauta de masa m siempre sentiría que su peso es ma. Por eso el movimiento hiperbólico con $a = g$ se toma muchas veces como modelo de viaje interestelar.

Tomemos como paradigma del movimiento hiperbólico la trayectoria de la partícula que, moviéndose a lo largo del eje x con aceleración propia a, a tiempo $t = 0$ pasa por el origen. La partícula, por decirlo de alguna manera, cae desde el infinito, se frena al llegar a $x = 0$ y vuelve a irse por donde vino.

Si en el origen hay un observador que registra la trayectoria de la partícula, las líneas de universo del observador y de la partícula son como las que muestra la figura.



De la ec. (28), con $x_E = 0$ y $t_0 = 0$, el movimiento de la partícula está dado por

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{E_0^2 + (c\lambda t)^2} - E_0\right]. \tag{33}$$

Reemplazando las definiciones de $\lambda = e\mathcal{E}$ y $E_0 = mc^2$, e identificando $\lambda/m = a$, obtenemos

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1\right]. \tag{34}$$

En la ecuación anterior aparecen una escala característica de longitud

$$l_* = \frac{c^2}{a}, \tag{35}$$

y una escala característica de tiempo

$$t_* = \frac{c}{a}. \tag{36}$$

De modo que resulta

$$\frac{x(t)}{l_*} = \sqrt{1 + \left(\frac{t}{t_*}\right)^2} - 1. \tag{37}$$

Si medimos el tiempo en unidades de t_* y la posición en unidades de l_*, la velocidad de la luz será $c = 1$ y la ecuación anterior se escribe simplemente como

$$x(t) = \sqrt{1 + t^2} - 1. \tag{38}$$

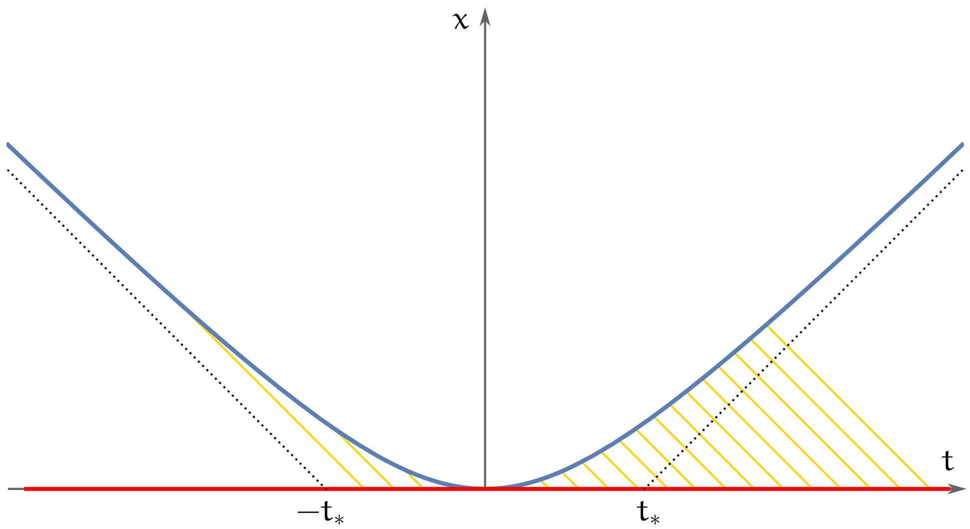
Las asíntotas satisfacen la ecuación

$$x_{\text{asint}}(t) = |t| - 1. \tag{39}$$

A modo de ejemplo, si el movimiento tiene lugar con aceleración propia $a = g \approx 10$ m/s^2, las escalas características de tiempo y longitud son, respectivamente

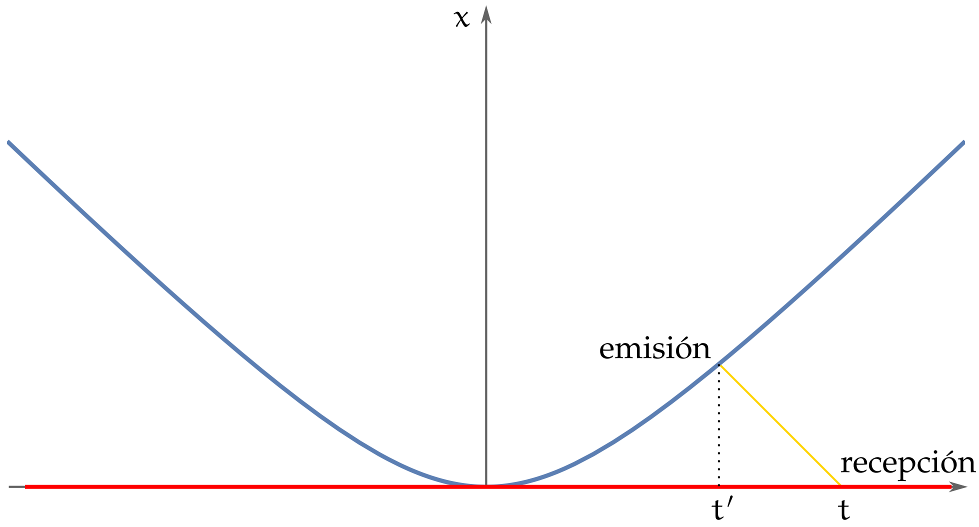
$$t_* \approx 3 \times 10^7 \text{ s} \approx 1 \text{ año}, \qquad l_* \approx 1 \text{ año luz}. \tag{40}$$

Si la partícula emite luz, las líneas de universo de los rayos de luz que emite hacia el observador son líneas rectas a 45° grados, como muestra la figura en trazo amarillo.



Las rectas intersectan la línea de universo del observador. Estos eventos corresponden a la observación de la partícula por parte del observador. Para $t < -t_*$, ningún rayo de luz llega desde la partícula hasta el observador. El observador comienza a ver a la partícula súbitamente cuando $t = -t_*$.

Asociados a estos eventos de observación hay dos instantes de tiempo fundamentales: el tiempo t en el que la luz alcanza al observador y el tiempo t' en el que fue emitida. El observador a tiempo t ve a la partícula en la posición que ocupaba a tiempo t'.



Si la luz se recibe a tiempo t, entonces tiene que haber sido emitida en un tiempo anterior t' tal que en el intervalo $t - t'$ haya viajado la distancia que separaba a la partícula del observador al momento de emisión. Es decir,

$$c(t - t') = |x(t')|. \tag{41}$$

Puesto que $x(t') > 0$, en las unidades naturales t' está definido implícitamente por

$$t - t' = x(t') \quad \Rightarrow \quad t - t' = \sqrt{1 + t'^2} - 1. \tag{42}$$

De aquí es fácil obtener t' como función de t; esto es, el tiempo al que fue emitida la luz que llega al observador a tiempo t,

$$t'(t) = \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)}. \tag{43}$$

Esta solución sólo tiene sentido para $t \geqslant -t_*$. Antes de $-t_*$ ningún rayo de luz emitido por la partícula llega al observador.

Desde el origen, a tiempo t llega luz de la partícula emitida a tiempo $t'(t)$. En otras palabras, la partícula es vista a tiempo t en la posición que ocupaba en $t'(t)$. Debido a que vale la relación (41), para calcular la posición aparente de la partícula,

$$x_{\rm ap}(t) = x\big(t'(t)\big), \tag{44}$$

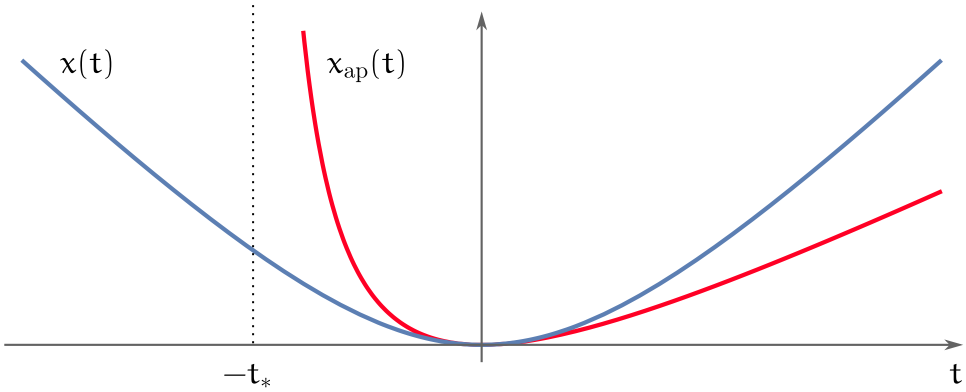
es más sencillo evaluar el miembro izquierdo de esa ecuación,

$$x_{\rm ap}(t) = t - t'(t) = \frac{t^2}{2(1+t)}. \tag{45}$$

Esta es la posición a la que es vista la partícula desde el origen a tiempo t. Notablemente, la velocidad aparente a la que se mueve la partícula, según es vista desde el origen, es

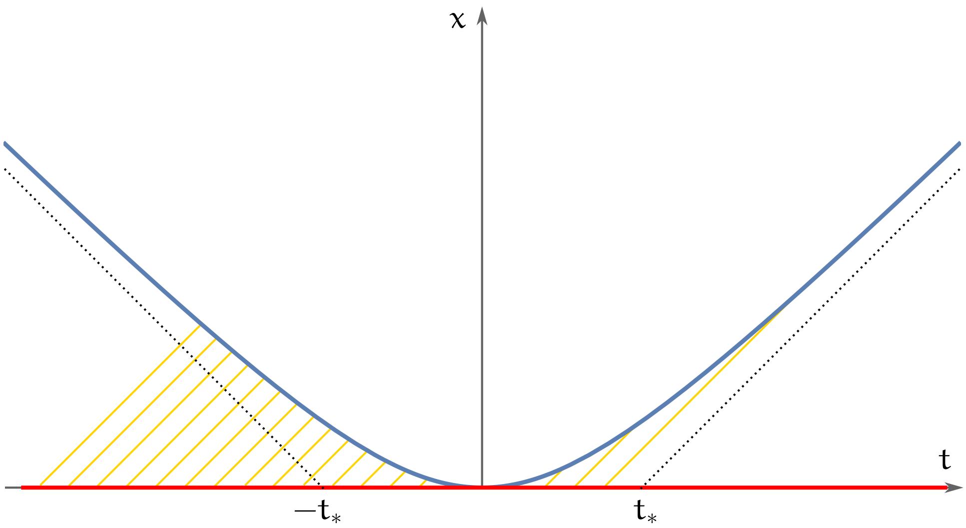
$$\dot{x}_{\rm ap}(t) = \frac{t^2 + 2t}{2(1+t)^2}. \tag{46}$$

Para $t \to -t_*^+$ esta velocidad tiende en módulo a infinito. En cambio, para $t \to \infty$, la velocidad aparente se aproxima a $1/2$.



En las figuras anteriores puede verse que para todo tiempo de emisión t' desde la partícula, existe un t de recepción por el observador en el origen. Esto quiere decir que toda la trayectoria de la partícula es visible desde el origen.

Cambiemos el punto de vista y analicemos lo que ocurre con la luz emitida por el observador hacia la partícula. Ahora las líneas de universo que nos interesan son las de los rayos de luz que se emiten desde el origen en dirección a la partícula.



Ocurre entonces algo peculiar. Todos los rayos emitidos antes de $t = t_*$ llegan a la partícula en algún momento. Pero para $t \geqslant t_*$ ninguno de los rayos de luz emitidos por el observador logra alcanzar a la partícula. Si un observador se mueve con la partícula, podrá ser testigo de la vida del observador en el origen únicamente hasta que los relojes de este último marcan el tiempo $t = t_*$. Se habla entonces de la existencia de un horizonte para él observador acelerado que se mueve con la partícula.