Mecánica Clásica - 1c 2020
13/07/2020
Máximo Coppola

Guía 8a - Hamilton-Jacobi

Repaso Teórico

El formalismo de Hamilton-Jacobi puede ser bastante confuso en cuanto a la notación. Cada función depende formalmente de variables diferentes pero que se encuentran relacionadas entre sí. A su vez vamos a empezar a explicitar la dependencia en las constantes de integración, que a su vez están relacionadas con las variables. Al final del día, cuando queramos resolver un ejercicio, toda esta discusión va quedar implícita. Pero como es la primera vez, veamosla un poco en detalle.

Motivación: Hemos visto que mediante una transformación canónica podemos llevar el Hamiltoniano a uno nuevo, resolver la dinámica allí y luego volver. Esto va a ser útil si el nuevo Hamiltoniano $\bar{\mathcal{H}}$ es simple. Por ejemplo, para el oscilador armónico

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \tag{1}$$

existe una transformación (útil, no como la de la guía anterior) basada en senos y cosenos tal que

$$\begin{cases} p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q \\ q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\sin Q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{H}}(Q,P) = \omega P \tag{2}$$

En el nuevo sistema la ecuación diferencial es trivial. Como Q es cíclica, P se conserva y

$$\dot{Q} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + Q_0 \tag{3}$$

Es posible hallar una función generatriz $F_2(q,P)$ asociada a esta transformación para probar que es canónica.

La pregunta que nos hacemos entonces es: ¿cómo encontramos en general una transformación que simplifique el Hamiltoniano? Cegados por la ambición vamos a pedir simplificarlo lo máximo posible, al punto de trivializarlo. Vamos a pedir que $\bar{H}(Q,P) = 0$ (en lo que sigue q,p,Q,P representan vectores de n variables). La ventaja de hacer esto es que en vez de tener que resolver las ecuaciones diferenciales originales, que puede ser algo muy complicado, las nuevas ecuaciones diferenciales son triviales: Q y P son constante por ser cíclicas. El peso del cálculo se va a trasladar ahora a tener que invertir y componer funciones para hallar las variables originales (q,p) en función de las nuevas constantes (Q,P). Pero ese peso, aunque no lo parezca, suele ser menor que resolver ecuaciones diferenciales muy complejas.

Hamilton-Jacobi: En el ejemplo del oscilador, como sabíamos la forma de $\mathcal{H}$, pudimos idearnos la transformación. Pero queremos ir al caso general, donde no sabemos $\mathcal{H}$. Para anular $\bar{\mathcal{H}}$ recurrimos a una función generatriz, que elegimos de tipo 2

$$\mathcal{H}(q,p,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q,P,t) = \bar{\mathcal{H}}(Q,P,t) = 0 \tag{4}$$

Ojo con la dependencia formal de cada función. Las variables se relacionan entre sí mediante las ecuaciones de la transformación

$$p_k(q,P,t) = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}(q,P,t)\,, \quad Q_k(q,P,t) = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}(q,P,t) \tag{5}$$

A esta generatriz tan especial que anula el nuevo Hamiltoniano la vamos a definir con la letra $F_2 \equiv S$, debido a su similitud con la función principal de Hamilton (de hecho se la suele llamar así). Reemplazando en (4) la expresión para p de la transformación (5) llegamos a una ecuación diferencial para S

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,P,t), t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t) = 0 \tag{6}$$

Como tenemos derivadas parciales en $n+1$ variables (q,t), aparecerán $n+1$ constante de integración. Sin embargo hay una de ellas que no aporta nada. Como solo aparecen derivadas de S, $S(q,P,t)+cte$ también es solución, pero no aparecerá en la dinámica del problema (vamos a terminar derivando a S). Nos quedan n constantes, que llamaremos $\alpha_{1\ldots n}$. Recordemos que, como $\bar{\mathcal{H}} = 0$, $P = cte$, y tenemos n de ellas. Así que una vez que tengamos la solución, podemos asociar a las constantes α con P. Esto es posible porque la ecuación diferencial (6) no contiene derivadas parciales en la variable P.

Cómo hacer esa asociación puede ser un poco confuso. Antes de hacerlo, veamos un ejemplo para explicar el punto. Supongamos que tenemos la ecuación diferencial para un MRUV

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = a \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \tag{7}$$

donde x_0, v_0, t_0 son constantes de integración. Cuando escribimos la solución no solemos incluir la dependencia en estas constantes, porque estamos resolviendo un ejercicio particular y sabemos su valor. Pero en un caso general, lo más correcto sería explicitar su dependencia

$$x(x_0, v_0, t_0, t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \tag{8}$$

Estas constantes no aparecen en la ecuación diferencial (7). Solo aparecen una vez hallamos la solución. Vamos a hacer lo mismo con S. Vamos a escribir en la solución la dependencia en las constantes de integraciones, tal que $S(q,\alpha,t)$ es la solución.

Falta asociar las variables constantes P con las variables de integración α. La asociación más simple es $P_i = \alpha_i$. Sin embargo podría pasar que en la solución nos aparezca por ejemplo la cantidad $\sqrt{\alpha_2}$ por todos lados. Tal vez sea conveniente entonces definir $P_2 = \sqrt{\alpha_2}$. Es decir tenemos cierta libertad para definir como se relacionan. Luego

$$\begin{aligned} &General: \;\; S(q,\alpha,t) = S(q,f(P),t)\,, \qquad f_i(P) = \alpha_i \\ &Simple: \;\; S(q,\alpha,t) = S(q,P,t)\,, \qquad\qquad P_i = \alpha_i \end{aligned} \tag{9}$$

Una vez que tenemos la solución $S(q,\alpha,t)$ podemos hallar la dinámica de las variables originales

(q, p) invirtiendo las ecuaciones de la transformación (5). Para ello usamos que, como $\bar{\mathcal{H}} = 0$, las variables Q son constantes. Las llamamos $Q_i = \beta_i$. Invirtiendo primero las ecuaciones para Q hallamos $q(\beta, \alpha, t)$, y luego reemplazamos esta expresión en la ecuación para p. **En el caso simple** donde $P_i = \alpha_i$ tenemos

$$Q_k(q, \alpha, t) = \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}(q, \alpha, t) \quad \xrightarrow{\text{Invierto}} \quad q(\beta, \alpha, t) \tag{10}$$

$$p_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, \alpha, t) \quad \xrightarrow{\text{Reemplazo}} \quad p_k(\beta, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, \alpha, t)\Big|_{q=q(\beta,\alpha,t)} \tag{11}$$

Al final del día, las $2n$ constantes (β, α) del nuevo sistema se relacionan con las $2n$ condiciones iniciales (q_0, p_0).

Hasta acá fue todo muy general. Sería difícil resolver un ejercicio sólo con lo dicho hasta ahora. Veamos algunas casos prácticos.

Sistemas Conservativos

Si $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo, entonces se conserva $\mathcal{H}(q, p) = h$. En ese caso la ecuación diferencial (6) se reduce a

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, P, t)\right) = h = -\frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t) \tag{12}$$

La ecuación quedó separable: derivadas en q por un lado, y derivadas en t por el otro. Integrando el lado derecho y usando el caso simple $P = \alpha$ se obtiene

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - ht \equiv W(q, \alpha) - \alpha_1 t \tag{13}$$

Vemos que h aparece como una de las constantes de la solución S, y dijimos que a esas constantes las definimos como α, así que por convención podemos identificarla como la primera de ellas. Como $P = \alpha$, una de las nuevas variables es la constante h. Es normal sentirse un poco confundidos, miren a la tira de igualdades que llegamos: $\mathcal{H}(q, p) = h = \alpha_1 = P_1$. En general en los ejercicios de la guía $h = E$, así que se suele escribir E en vez de α_1 porque ya sabemos quién es esa constante.

Otra fuente de confusión es que estoy reservando la letra $\mathcal{H}$ para el Hamiltoniano, que es una función de ciertas variables, mientras que h es una constante, un número. Para hallar la función $W(q, \alpha)$ que aparece en la solución (13) esta distinción resulta importante, pues debemos resolver el lado izquierdo de (12)

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q, \alpha)\right) = h \tag{14}$$

Coordenadas Cíclicas

Vimos que si h se conservaba, entonces la solución (13) era lineal en esa variable. Eso sucede también para cualquier coordenada cíclica. Si por ejemplo, en dos dimensiones, q_1 es cíclica, entonces

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, p_1, p_2) \;\Rightarrow\; \dot{p}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = 0 \;\Rightarrow\; p_2 = cte \tag{15}$$

De la ecuación de transformación (11)

$$p_2(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial q_2}(q, \alpha, t) = cte \equiv \alpha_2 \;\Rightarrow\; S(q, \alpha, t) = \tilde{W}(q, \alpha, t) + \alpha_2 q_2 \tag{16}$$

donde ya asociamos la constante de la coordenada cíclica p_2 con la constante de integración α_2. Es decir, al hacer la transformación, el nuevo momento es igual al viejo, $P_2 = p_2 = \alpha_2$.

Sistemas Separables Conservativos

En general resolver la ecuación diferencial (6) puede ser difícil si hay muchas variables. El método resulta útil si el sistema es separable. ¿Se acuerdan cuando queríamos hallar el diagrama de fase, que en la ecuación de la energía separábamos la dependencia en cada variable? Haciendo esto nos quedaba una igualdad entre funciones tipo $f(r) = g(z) = cte$, que solo puede cumplirse si ambas son constantes. Si esto es posible, entonces la función principal S también puede separarse, y las funciones W_i se hallan separando variables en la igualdad (14)

$$S(q, \alpha, t) = \sum_i W_i(q_i, \alpha) - \alpha_1 t \;\Rightarrow\; \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha)\right) = \alpha_1 = h \tag{17}$$

Resumen (si $\boldsymbol{P_i = \alpha_i}$)

1. Hallamos $S(q, \alpha, t)$ resolviendo la ecuación diferencial

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, \alpha, t), t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, \alpha, t) = 0 \tag{18}$$

   - Si es conservativo, $\mathcal{H} = h = \alpha_1$, entonces $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t$
   - Si es conservativo y separable entonces $S(q, \alpha, t) = \sum_i W_i(q_i, \alpha) - \alpha_1 t$
   - Si q_j es cíclica entonces $S(q, \alpha, t) = \tilde{W}(q, \alpha, t) + \alpha_j q_j$

2. Invertimos la transformación para hallar q en función del tiempo y las constantes

$$Q_k(q, \alpha, t) = \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}(q, \alpha, t) \quad \xrightarrow{\text{Invierto}} \quad \text{Hallo} \quad q(\beta, \alpha, t) \tag{19}$$

3. Reemplazamos las expresiones halladas de $q(\beta, \alpha, t)$ en la otra ecuación de transformación

$$p_k(\beta, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, \alpha, t)\bigg|_{q=q(\beta,\alpha,t)} \tag{20}$$

Ejercicio 1

Nos dan un sistema de dos coordenadas descrito por el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \tag{21}$$

Lo primero de todo es pasar al formalismo Hamiltoniano

$$p_i = \dot{q}_i(q_1^2 + q_2^2) \;\; \Rightarrow \;\; \mathcal{H} = \frac{1}{2}\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \tag{22}$$

Queremos resolver la ecuación diferencial para S (18). Como $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo, la cinética es homogénea de grado dos en las velocidades y el potencial no depende de las velocidades, entonces $\mathcal{H}(q,p) = h = E$. Vamos a llamar α_1 a la energía para ser consistentes con la notación. Como el sistema es conservativo proponemos $S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - \alpha_1 t$, con lo que la ecuación diferencial se reduce a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,\alpha,t), t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,\alpha,t) = 0 \\
\Rightarrow \;\; &\frac{1}{2(q_1^2+q_2^2)}\left[\left(\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_2}\right)^2\right] + \frac{1}{q_1^2+q_2^2} - \alpha_1 = 0 \\
\Rightarrow \;\; &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_2}\right)^2 + 1 = \alpha_1 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2
\end{aligned} \tag{23}$$

Esta ecuación es separable. Llevándonos todo lo que depende de 1 del lado izquierdo y de 2 del lado derecho tenemos la igualdad entre dos funciones, que deben ser iguales a una constante

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_1}\right)^2 + 1 - \alpha_1 q_1^2 = \alpha_2 = \alpha_1 q_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_2}\right)^2 \tag{24}$$

Como es separable, proponemos una solución separable para W

$$\begin{aligned}
&W(q,\alpha) = W_1(q_1,\alpha) + W_2(q_2,\alpha) \\
\Rightarrow \;\; &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1(q_1,\alpha)}{\partial q_1}\right)^2 + 1 - \alpha_1 q_1^2 = \alpha_2 = \alpha_1 q_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_2(q_2,\alpha)}{\partial q_2}\right)^2
\end{aligned} \tag{25}$$

Despejando obtenemos las funciones W

$$\begin{aligned}
W_1(q_1,\alpha) &= \pm\sqrt{2}\int \sqrt{\alpha_1 q_1^2 - 1 + \alpha_2}\, dq_1 \\
W_2(q_2,\alpha) &= \pm\sqrt{2}\int \sqrt{\alpha_1 q_2^2 - \alpha_2}\, dq_2 \\
S(q,\alpha,t) &= W_1(q_1,\alpha) + W_2(q_2,\alpha) - \alpha_1 t
\end{aligned} \tag{26}$$

Fíjense que cada W_k depende solo de q_k, pero de todos los α. Además apareció una duplicidad de signos $\pm$ al tomar la raíz de $\partial W_k/\partial q_k = p_k$, correspondientes a las zonas donde p_k es positivo o negativo. Suele suceder que ese signo no es relevante. Vamos a tomar el signo positivo y al final utilizar propiedades que conozcamos del movimiento (por ejemplo dibujando su diagrama de fases) para deducir que pasa con la otra rama negativa. Finalmente, integrando obtenemos una solución para $S(q, \alpha, t)$ y completamos el paso 1. Pero no siempre es conveniente integrar a esta altura; esperemos un momento para hacerlo.

Ahora que tenemos S pasamos al paso 2 y despejamos q_k a partir de la ecuación (19) de transformación para $Q = \beta$. Aquí tenemos dos opciones. Una es realizar las integrales en (26) primero y luego derivar en α_k. Pero en general suele convenir el proceso inverso: derivar primero e integrar después. Derivando tenemos

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{q_1^2}{\sqrt{\alpha_1 q_1^2 - 1 + \alpha_2}}\, dq_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{q_2^2}{\sqrt{\alpha_1 q_2^2 - \alpha_2}}\, dq_2 - t \\
\beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 q_1^2 - 1 + \alpha_2}}\, dq_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 q_2^2 - \alpha_2}}\, dq_2
\end{aligned} \tag{27}$$

En este caso no parece que haya sido mucho más simple derivar primero e integrar después. Aquí suele llegar la traba de este método; realizar estas integrales suele ser difícil sin buscarlas. Integrando e invirtiendo las relaciones obtenemos $q(\beta, \alpha)$. Los momentos conjugados se obtienen del paso 3 [o podríamos usar la expresión para p_i que hallamos para pasar al Hamiltoniano en la ecuación (22)], aunque con hallar $q(t)$ podemos darnos por satisfechos, los momentos salen de allí. Estos son pasos algebraicos, no conceptuales. Hasta aquí de este noble usuario.

Tal vez en este momento piensen que este método es bastante cuentoso y duden de su utilidad. Pero como decíamos al principio, sólo es cuentoso. Hay que hacer integrales e inversiones de funciones; manipulaciones algebraicas. En cambio usar las ecuaciones de Lagrange o Hamilton es otro nivel de dificultad. Nos hubiese llevado a tener que resolver el par de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\ddot{q}_k(q_1^2 + q_2^2) + 2\dot{q}_k(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2) - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)q_k - \frac{2q_k}{(q_1^2 + q_2^2)^2} = 0\,, \qquad k = 1, 2 \tag{28}$$

Ejercicio 3

Solo quiero mencionarlo porque este es un ejemplo de no poder aplicar las cosas prácticas que vimos. Tenemos una partícula en presencia de una fuerza uniforme $F = At$, cuyo potencial vendrá dado por $V = -\int F dx = -Atx$. El Hamiltoniano y la ecuación diferencial para S son

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - Atx \;\Rightarrow\; \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - Atx + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{29}$$

Este Hamiltoniano no es conservativo, ni posee ninguna coordenada cíclica. Por lo tanto no podemos proponer que $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t$. Para hallar S debemos resolver esta ecuación diferencial. Como no es tan simple, en el ejercicio nos dan una sugerencia para S.

Ejercicio 5

Nos dan el siguiente Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2 \tag{30}$$

y nos piden resolver el problema usando todos los métodos conocidos. El inciso d) y todo lo que en esta guía diga 'angulo-acción' quedará pendiente hasta la próxima clase. Junto con el ejercicio 4 son buenos para hacer una práctica general.

Antes de resolverlo podemos irnos anticipando a que tipo de órbitas podemos esperar si dibujamos el diagrama de fases. Así como antes obteníamos una descripción cualitativa a partir del potencial efectivo, el análogo Hamiltoniano sería el diagrama de fases. Como $\mathcal{H}$ no depende explícitamente de t, el sistema es conservativo (no sabemos bien si h es E porque no sabemos la cinética y el potencial por separado). Además, q_2 es cíclica, por lo que $p_2 = cte$. Reacomodando un poco la igualdad $\mathcal{H}(q,p) = h$

$$\frac{p_1^2}{2mh} + \frac{(q_1 - p_2/k)^2}{2mh/k^2} = 1 \tag{31}$$

Para cada valor de p_2 esta es la ecuación de una elipse centrada en $(p_2/k, 0)$, como se observa en la figura 1. ¿Qué tipo de movimiento es este?
Spoiler: son oscilaciones.

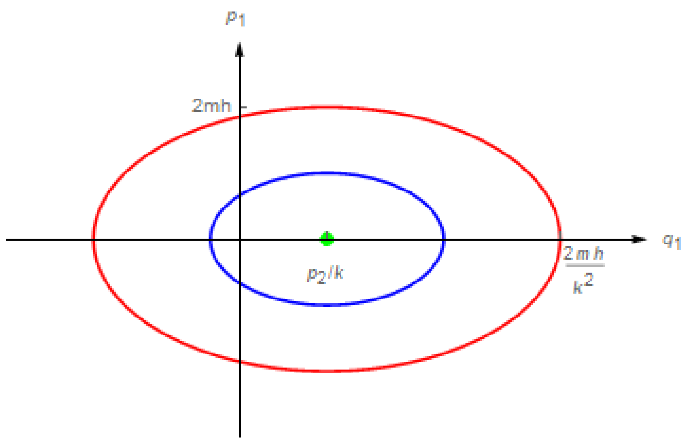

Figura 1: Diagrama de fases del ejercicio 5.

a) Primero nos piden resolverlo por Hamilton-Jacobi. El sistema es conservativo y q_2 es cíclica. Proponemos entonces

$$S(q,\alpha,t) = W_1(q_1,\alpha) + \alpha_2 q_2 - \alpha_1 t \tag{32}$$

Voy a seguir con $\alpha_{1,2}$ para mantener la notación del formalismo, pero no hay que perder de vista que la identificación con las variables del problema es inmediata: $\alpha_2 = p_2$ y $\alpha_1 = h$

$$p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \alpha_2 \qquad y \qquad \alpha_1 = -\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{H}(q,p,t) = h \tag{33}$$

Reemplazando la S propuesta, la ecuación diferencial queda

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2m}(\alpha_2 - kq_1)^2 - \alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \; W_1(q_1, \alpha) = \pm \int \sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1)^2}\, dq_1 \tag{34}$$

No integremos todavía, derivemos primero. Listo el paso 1, obtenemos $q(\beta, \alpha, t)$ de la ecuación de transformación siguiendo el paso 2

$$Q_1 = \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} - t = \pm m \int \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1)^2}}\, dq_1 - t \tag{35}$$

$$\Rightarrow \; \beta_1 + t = \pm \frac{m}{k} \arccos\left(\frac{\alpha_2 - kq_1}{\sqrt{2m\alpha_1}}\right) \tag{36}$$

Al invertir esta ecuación, los signos $\pm$ desaparecen debido a que $\cos(\pm x) = \cos(x)$ y tenemos

$$q_1(\beta, \alpha, t) = -\frac{\sqrt{2m\alpha_1}}{k} \cos\left(\frac{k}{m}t + \frac{k\beta_1}{m}\right) + \frac{\alpha_2}{k} \tag{37}$$

Eso fue para Q_1, para Q_2 tenemos

$$Q_2 = \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} = q_2 \pm \int \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1)^2}\, dq_1 \tag{38}$$

Si prestamos un poco de atención notaremos que no es necesario hacer esta integral. Si hacemos el cambio de variables $z = \alpha_2 - kq_1$ entonces derivar respecto de α_2 es igual a derivar respecto de z. Pero también debemos cambiar la variable de integración que es independiente de α_2

$$z = \alpha_2 - kq_1 \;\; \Rightarrow \;\; \beta_2 = q_2 \pm \int \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{2m\alpha_1 - z^2} \left(\frac{-dz}{k}\right) \tag{39}$$

La primitiva será la función que allí aparece, y por lo tanto

$$\beta_2 = q_2 \mp \frac{1}{k}\sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1)^2} \tag{40}$$

De aquí podemos despejar a q_2 en función de q_1, obteniendo la órbita en el plano $q_1 - q_2$

$$\left(q_1 - \frac{\alpha_2}{k}\right)^2 + (q_2 - \beta_2)^2 = \frac{2m\alpha_1}{k^2} \;\; \rightarrow \;\; (q_1 - \bar{q}_1)^2 + (q_2 - \bar{q}_2)^2 = R^2 \tag{41}$$

que es la ecuación de círculo de radio R centrado en $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2)$. Si quisiéramos a q_2 en función de las constantes y el tiempo reemplazamos la solución que encontramos para q_1 de la ecuación (37) en (40)

$$q_2 = \beta_2 \pm \frac{\sqrt{2m\alpha_1}}{k} \left|\sin\left(\frac{k}{m}t + \frac{k\beta_1}{m}\right)\right| \tag{42}$$

¿Qué hacemos con el $\pm$? Antes dijimos que, como $p_1 = \partial W_1/\partial q_1$, la rama positiva (negativa) corresponde a valores positivos (negativos) de p_1, ver ecuación (34). En efecto,

$$p_1 = m\dot{q}_1 = \cancel{m}\frac{\sqrt{2m\alpha_1}}{\cancel{k}}\frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}\sin\left(\frac{k}{m}t + \frac{k\beta_1}{m}\right) \;\Rightarrow\; q_2 = \beta_2 \pm \frac{1}{k}|p_1| \tag{43}$$

Cuando $p_1 > 0$ tomamos el $+$, y cuando $p_1 < 0$ tomamos el $-$, así que $\pm|p_1| = p_1$.

Finalmente, la solución completa es

$$\boxed{\begin{aligned} q_1(\beta,\alpha,t) &= -R\cos\left(\frac{k}{m}t + \varphi\right) + \bar{q}_1 \\ q_2(\beta,\alpha,t) &= +R\sin\left(\frac{k}{m}t + \varphi\right) + \bar{q}_2 \end{aligned}} \tag{44}$$

donde podemos identificar algunas constantes

$$R = \frac{\sqrt{2m\alpha_1}}{k} = \frac{\sqrt{2mh}}{k}\,, \quad \varphi = \frac{k\beta_1}{m}\,, \quad \bar{q}_1 = \frac{\alpha_2}{k} = \frac{p_2}{k}\,, \quad \bar{q}_2 = \beta_2 \tag{45}$$

La soluciones son círculos y el Hamiltoniano tiene la forma de la ecuación (30).
¿Les suena a algo? Obtuvimos algo parecido en el ejercicio 5 de la guía 7.
Se parece a las soluciones de una partícula en un campo magnético uniforme. Recordemos que el Hamiltoniano en ese caso era

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \tag{46}$$

($\boldsymbol{p}$ es el momento mecánico). Vemos que podemos recuperar el Hamiltoniano de la ecuación (30) si

$$A_1 = 0 = A_3 \qquad y \qquad kq_1 = \frac{e}{c}A_2 \;\Rightarrow\; A_2 = \frac{kc}{e}q_1 \tag{47}$$

La constante k no puede ser cualquier cosa. Como $\boldsymbol{B} = B\hat{3} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = kc/e\,\hat{3}$ entonces $k = eB/c$. La única diferencia con el ejercicio 5 de la guía 7 fue que allí usamos el gauge simétrico. El de este Hamiltoniano corresponde al gauge de Landau. Las soluciones son las mismas, independientes del gauge.

Para terminar quisiera dejar unos lineamientos sobre los incisos que siguen.

b) Ahora debemos resolver el sistema pero utilizando las ecuaciones canónicas

$$\dot{p}_k = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k}\,, \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k} \tag{48}$$

Les dejo a ustedes chequear que las soluciones son las mismas que en (44).

c) En este inciso debemos utilizar la transformación $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, donde A y B son constantes que debemos elegir de forma tal que la transformación sea canónica. Lo mismo con las variables no especificadas Q_2 y P_2.

Con esta transformación, el nuevo Hamiltoniano resulta ser

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\frac{Q_1^2}{A^2} + \frac{1}{2m}\frac{P_1^2}{B^2} \tag{49}$$

Nuevamente tenemos elipses en el diagrama de fases de (Q_1, P_1). Resolviendo las ecuaciones de Hamilton en el nuevo sistema

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = +\dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial P_1} = \dfrac{P_1}{mB^2} \\ \dot{P}_1 = -\dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial Q_1} = \dfrac{Q_1}{mA^2} \end{cases} \Rightarrow \ \ddot{Q}_1 = -\frac{1}{(mBA)^2} Q_1 \ \Rightarrow \ Q_1 = Q_0 \sin\left(\frac{1}{mBA}t + \varphi\right) \tag{50}$$

Por otro lado, $\bar{\mathcal{H}}$ es cíclico en Q_2 y P_2, por lo que esas variables son constantes. Para hallar q_1 y q_2 debemos anti-transformar. Para ello necesitamos la transformación completa, y necesitamos que sea canónica.

¿Qué formas vimos que existen para probar que la transformación es canónica?

I. Corchetes de Poisson

Este es el método más simple. La transformación será canónica si $[Q_i, P_j] = \delta_{ij}$, $[Q_i, Q_j] = 0 = [P_i, P_j]$ respecto de las variables (q, p). Es decir, las variables (q, p) ya cumplen esos corchetes, eso es lo que simplifica la cuenta. Notar que son varias relaciones porque $i, j = 1, 2$. Escribiéndolo por extenso

$$[Q_1, P_1] = AB \overbrace{[p_1, p_2]}^{=0} - ABk \overbrace{[p_1, q_1]}^{=-1} = ABk = 1 \tag{51a}$$

$$[Q_1, Q_2] = A[p_1, Q_2] = 0 \tag{51b}$$

$$[Q_1, P_2] = A[p_1, P_2] = 0 \tag{51c}$$

$$[P_1, P_2] = B[p_2, P_2] - kB[q_1, P_2] = 0 \tag{51d}$$

$$[P_1, Q_2] = B[p_2, Q_2] - kB[q_1, Q_2] = 0 \tag{51e}$$

$$[Q_2, P_2] = 1 \tag{51f}$$

La primer igualdad nos dice que para que la transformación sea canónica, $ABk = 1$. Como A y B son constantes a elegir, lo más simple sería elegir $B = 1$ (para que P_1 también tenga unidades de momento). Entonces $A = 1/k$. Las demás igualdades nos imponen restricciones sobre Q_2 y P_2.

Una elección simple podría ser $P_2 = p_2$, que sabemos que es una cantidad conservada. En ese caso, la tercer y cuarta línea – (51c) y (51d)– se cumplen automáticamente. La última (51f) nos dice que

$$[Q_2, P_2] = [Q_2, p_2] = 1 \;\; \Rightarrow \;\; Q_2 = q_2 + f(q_1, p_1, p_2) \tag{52}$$

entonces Q_2 debe tener esa dependencia ya que $[q_2, p_2] = 1$ y el resto se anula. Reemplazando en (51b)

$$[Q_1, Q_2] = A[p_1, Q_2] = A\overbrace{[p_1, q_2]}^{=0} + A[p_1, f(q_1, p_1, p_2)] = 0 \;\; \Rightarrow \;\; f(q_1, p_1, p_2) = g(p_1, p_2) \tag{53}$$

por lo que la función f no puede depender de q_1. Sino aparecería el corchete $[p_1, q_1] = -1$ que no tiene con quien anularse ($[p_i, p_j] = 0$). Nos queda sólo una ecuación disponible, la (51e)

$$\begin{aligned} [P_1, Q_2] = B[p_2, Q_2] - kB[q_1, Q_2] = B\overbrace{[p_2, q_2]}^{=-1} + B\overbrace{[p_2, g(p_1, p_2)]}^{=0} - kB\overbrace{[q_1, q_2]}^{=0} - kB[q_1, g(p_1, p_2)] = 0 \\ \Rightarrow \;\; [q_1, g(p_1, p_2)] = -k \;\; \Rightarrow \;\; g(p_1, p_2) = -\frac{p_1}{k} + h(p_2) \end{aligned} \tag{54}$$

Nos quedó la libertad de elegir la función $h(p_2)$, así que lo más fácil es elegirla igual a cero.

Juntando todo, la transformación canónica que encontramos es

$$\boxed{Q_1 = Ap_1\,, \quad P_1 = B(p_2 - kq_1)\,, \quad Q_2 = q_2 - \frac{p_1}{k}\,, \quad P_2 = p_2} \tag{55}$$

donde $ABk = 1$ (por ejemplo podemos tomar $B = 1$ y $A = 1/k$).

Podemos chequear algunas cosas.

- Dijimos que como Q_2 era cíclica en el nuevo Hamiltoniano $\bar{\mathcal{H}}$, entonces $Q_2 = cte$. En la guía 1 [pdf del 29/04 ecuación (17)] también resolvimos este ejercicio en el gauge de Landau, y encontramos la cantidad conservada $\tilde{P}_x = m\dot{x} - m\omega y$, o en nuestra notación actual $\tilde{P}_x = p_1 - m\omega q_2 = -m\omega(q_2 - p_1/m\omega)$, donde $\omega = eB/mc = k/m$. Así que en ambos métodos encontramos la cantidad conservada $\tilde{P}_x = -m\omega Q_2 = cte$.
- Usando que $p_1 = Q_1/A = kQ_1$ y la solución de la ecuación (50) tenemos que

$$p_1 = kQ_1 = kQ_0 \sin\left(\frac{k}{m}t + \varphi\right) \tag{56}$$

  Pueden compararla con la expresión (43); coinciden!
  De hecho, completando la anti-transformación se recuperan las soluciones de la ecuación (44).

II. Cadena de derivadas

Bueno, este método no tiene un nombre oficial. Pero vimos en el ejercicio 8.a de la guía anterior que la transformación es canónica si se cumplen las siguientes igualdades

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_k}\,, \quad \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}\,, \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\,, \quad \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \tag{57}$$

Este método es un poco engorroso porque hay que despejar constantemente variables en funciones de otras teniendo cuidado de no perdernos ninguna dependencia. Hay muchas relaciones que son iguales y simplemente nos repiten que $ABk = 1$, como ya vimos. Como ejercicio pueden chequear que la transformación (55) cumple todas estas igualdades.

III. Encontrar una función generatriz

Les dejo esta opción a ustedes. Técnicamente, pedían usar solo uno de los métodos (son equivalentes).

IV. Método simpléctico

Solo por completitud lo menciono. Si le gusta trabajar en forma matricial, en la teórica vieron que una transformación es canónica si $\boldsymbol{M}\omega\boldsymbol{M}^T = \omega$.