Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2020 – Recuperatorio del Segundo parcial (17/12/2020)

(Justifique todas sus respuestas. Ponga su nombre en la primer hoja y enumere todas las carillas. Entregue un único PDF con los distintos problemas en hojas separadas, con nombre de archivo *Apellido_Nombre_LUxxxx*. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto.)

P1. Un cilindro circular sólido homogéneo de masa m, radio a y largo l está suspendido de un eje transversal que pasa a través de su centro de masa. Este eje, de masa despreciable, puede girar libremente alrededor del eje vertical $\hat{z}$, permaneciendo perpendicular al mismo (ver figura). El cilindro está imposibilitado de girar sobre su eje de simetría.

a) Considerando como eje $\hat{3}$ al eje de simetría del cuerpo, calcule el momento principal de inercia I_3 en función de los datos del problema.

b) Escriba el Lagrangiano del sistema en términos de los ángulos de Euler y calcule todas las magnitudes conservadas en función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas. Puede tomar como dato que $I_1 = I_2 \equiv I = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}ml^2$.

c) Calcule el potencial efectivo y determine las posiciones de equilibrio suponiendo que $l > \sqrt{3}a$. Determine los casos de equilibrio estable e inestable.

d) Calcule la frecuencia de oscilación alrededor del equilibrio estable en función de los datos.

P2. El Hamiltoniano de dos osciladores armónicos acoplados es

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{mw_1^2x^2}{2} + \frac{mw_2^2y^2}{2} + m\alpha xy$$

en donde α es una constante de acoplamiento. Sea la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} x &= Q_1 \cos\varphi - Q_2 \sin\varphi \\ y &= Q_1 \sin\varphi + Q_2 \cos\varphi \\ p_x &= P_1 \cos\varphi - P_2 \sin\varphi \\ p_y &= P_1 \sin\varphi + P_2 \cos\varphi \end{aligned}$$

a) Pruebe que la transformación propuesta es canónica.

b) Calcule el valor de φ para que el Hamiltoniano en las nuevas variables esté desacoplado.

c) Para el caso anterior, escriba las ecuaciones de Hamilton en las nuevas variables, resuelva el sistema y, luego, exprese la solución general del problema original.

d) Calcule las *frecuencias normales de oscilación* del sistema en el límite $w_1 \to w_2$ en función de la frecuencia única w y la constante de acoplamiento α.

P3. Una partícula de masa m y carga eléctrica $q > 0$ se mueve en un plano sometida a un potencial central del tipo elástico $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ en presencia de un campo magnético constante $\vec{B} = B\hat{z}$ descrito en el gauge simétrico $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$, donde $\hat{z}$ es la dirección perpendicular al plano del movimiento.

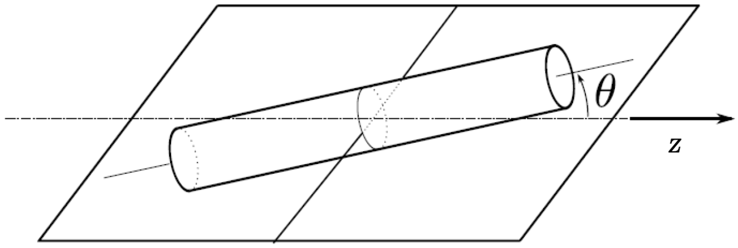
a) Escriba el Lagrangiano del sistema usando coordenadas polares en el plano de movimiento (*Ayuda: recordar que el potencial asociado a un campo magnético se escribe* $-q\vec{v} \cdot \vec{A}$). Halle los momentos generalizados y muestre que el Hamiltoniano del sistema es

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \left(\frac{p_\varphi}{r} - \frac{qB}{2}r\right)^2\right] + \frac{k}{2}r^2$$

b) Plantee la ecuación de Hamilton-Jacobi y exprese la función principal de Hamilton en términos de una integral radial. Escriba las ecuaciones que relacionan las variables originales, r y θ, con el tiempo (no resuelva las integrales).

c) Para el caso particular en que inicialmente se tiene $p_\varphi(0) = 0$, halle explícitamente $r(t)$ y $\varphi(t)$. Describa cualitativamente el movimiento en el límite $\frac{qB}{2m} \to 0$.

d) Escriba explícitamente, en términos de una integral radial, la generatriz que lleva a coordenadas de Ángulo-Acción. Para el caso particular $p_\varphi(0) = 0$ dibuje el diagrama de fases y halle las "frecuencias" (compárelas con las obtenidas en los incisos anteriores).



Problema 1