Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2020

Guía 6: *Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas. Hamilton–Jacobi.*

1. Escriba el hamiltoniano, las ecuaciones de Hamilton y construya los diagramas de fases para:

   (a) Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Utilizar coordenadas cartesianas. Resuelva las ecuaciones.

   (b) Una partícula en un potencial central $U(r)$. Halle constantes de movimiento. Suponga en particular que $U(r) = -k/r$ y discuta las órbitas posibles.

   (c) Un trompo simétrico con un punto fijo en un campo gravitatorio uniforme. Halle constantes de movimiento.

   (d) Un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad).

   (e) Una máquina de Atwood, considerando los casos en que la polea, de radio R, tiene masa cero o masa M.

2. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas cilíndricas y esféricas. Construya los correspondientes diagramas de fases.

3. Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano igual a la energía total?

4. Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = \frac{1}{r}(1 + \dot{r}^2)$, donde r es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados p_r y p_θ, y el hamiltoniano. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? Reduzca el problema para r a una ecuación diferencial de primer orden.

5. Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$, en la dirección $\hat{z}$. Tome $\mathbf{A} = Bx\hat{y}$ y recuerde que el potencial generalizado es $U = -(q/c)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$.

   (a) Resuelva de nuevo el problema eligiendo ahora $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}$.

6. Un sistema consiste en dos masas puntuales m_1 y m_2 que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{\rm cm} + H_{\rm rel}$, con

$$H_{\rm cm} = \frac{P_{\rm cm}^2}{2M} \qquad\qquad H_{\rm rel} = \frac{p_{\rm rel}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

   donde: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, $\mathbf{L}$ es el momento angular total y $p_{\rm rel}$ es el momento canónicamente conjugado de r.

7. Demuestre que la transformación

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2) \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2)$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2) \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\sin q_1 + p_2),$$

donde $\omega = qB/mc$, es canónica y úsela para encontrar una solución alternativa del Problema 5.

8. Considere los siguientes puntos

(a) Pruebe que si se hace una transformación canónica de (q,p) a (Q,P) se tiene:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

(b) Considere un oscilador unidimensional de hamiltoniano $H = p^2/2m + (k/2)q$. Muestre que la transformación $Q = \ln(\frac{\sin p}{q})$, $P = q\cot p$ es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q,Q)$ y $F_2(q,P)$.

9. Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p,q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P,Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton:

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y \sin\lambda}{m\omega} \qquad p_x = -m\omega Y\sin\lambda + P_x\cos\lambda$$
$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_x \sin\lambda}{m\omega} \qquad p_y = -m\omega X\sin\lambda + P_y\cos\lambda.$$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en $t = 0$.

10. Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo f, g, h funciones arbitrarias de p_i, q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante.

(a) $[f,c] = 0$; $[f,f] = 0$; $[f,g] + [g,f] = 0$; $[f+g,h] = [f,h] + [g,h]$; $[fg,h] = f[g,h] + [f,h]g$; $\frac{\partial}{\partial t}[f,g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$; $[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$; $[f,F(f)] = 0$

(b) $[q_i,q_j] = [p_i,p_j] = 0$; $[q_i,p_j] = \delta_{ij}$; $[f,q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $[f,p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}$

(c) $[f,g^n] = ng^{n-1}[f,g]$; $[g,F(f)] = F'(f)[g,f]$

11. Analizar los siguientes puntos:

(a) ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente variables canónicas? Ídem para H y L_z.

(b) ¿Pueden ser L_x y L_y simultáneamente variables canónicas? Ídem para L_x y L^2.

(c) ¿Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?

12. Considere los siguientes puntos:

(a) Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ y $f = p_i$? Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.

(b) Muestre que si una coordenada q_i es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de q_i. Observe que si f es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. ¿Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?

13. Considere los siguientes puntos:

(a) Muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.

(b) Calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$.

14. Muestre que, para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje z, L_z es una constante de movimiento y que, si el potencial es central, entonces $\mathbf{L}$ es constante.