

Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2020

Guía 7: Ecuación de Hamilton–Jacobi. Variables de ángulo acción

1. Una partícula de masa m se mueve sobre el eje x sometida a un potencial $V = a \sec^2(x/l)$, donde a y l son constantes. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para S . Encuentre $x(t)$ utilizando S .
2. Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, \dot{q}_1 y \dot{q}_2 son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema? Resuelva esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton S . Encuentre o deduzca de allí el comportamiento dinámico del sistema.

3. Considere un movimiento unidimensional de una partícula de masa m y carga e sometida a un campo eléctrico uniforme dependiente del tiempo $E(t)$. Encuentre el hamiltoniano del sistema. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi? Muestre que la función principal de Hamilton puede escribirse como

$$S = e \int_0^t E(t') dt' x + \alpha x - \phi(t),$$

donde α es una constante y ϕ es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para ϕ . De allí encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

4. Considere un oscilador armónico unidimensional:
 - (a) Halle su hamiltoniano y las correspondientes ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad, discuta la existencia de movimientos de libración y rotación.
 - (b) Halle la transformación canónica de función generatriz $F_1(Q, q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$ (ω : pulsación del oscilador).
 - (c) Muestre que (Q, P) son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de E (energía) constante en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un P dado encierra un área $2\pi P$.
 - (d) Halle la función generatriz de tipo $F_2(P, q)$ que genera la misma transformación canónica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2 ?
5. Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo y acción es $F_2(q, J) = \int^q p(J, q') dq'$. Pruebe que esta función *no* es periódica como función de q , pero que $F_1(q, Q)$ sí lo es.

6. Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2m} (p_2 - kq_1)^2.$$

Resuelva el problema utilizando la técnica de Hamilton–Jacobi. Encuentre la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema? Resuelva este problema de otras tres maneras:

- (a) Resolviendo las ecuaciones canónicas.
- (b) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.
- (c) Por medio de variables de ángulo–acción.
7. Considere un péndulo físico formado por una barra de longitud l , que puede moverse en un plano vertical, con uno de sus extremos fijo (la barra gira libremente a su alrededor). El momento de inercia de la barra respecto al punto fijo es I . Hay gravedad.
- (a) Muestre que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos \psi)$ donde ψ es el ángulo de la barra con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.
- (b) Construya el correspondiente diagrama de fases; halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad; construya la curva separatriz correspondiente (halle su ecuación). Determine los movimientos de libración y rotación posibles y halle su período.
- (c) Muestre que el área encerrada por la separatriz es 16α . Deduzca que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.
8. Una partícula de masa m se mueve en el potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\lambda^2(x+a)^2 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2 & x \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.
- (b) Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Halle la variable de acción en función de E en cada caso.
9. Escriba las variables de acción y ángulo para las rotaciones en un plano de una barra con un punto fijo, sometida a un potencial angular $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$ ($k > 0$), con $V(\psi)$ periódico, $V(\psi + 2\pi) = V(\psi)$.
10. Considere una partícula con hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ para cada uno de los siguientes casos: $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + l^2/2mq^2$.
- (a) Dibuje los diagramas de fases, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices e indique las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.
- (b) Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(q, J)$, donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cómo es la frecuencia del movimiento?
- (c) Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$ (con n, p números naturales y \hbar constante). Discuta este punto con su docente.

11. Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|\mathbf{r}|)$.
- (a) Calcule las variables de acción para la parte angular del movimiento. ¿Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas?
 - (b) ¿Bajo qué condiciones el movimiento de la partícula será periódico? Demuestre explícitamente que para el problema de Kepler y para el oscilador armónico el movimiento *es* periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Obtenga la frecuencia de movimiento como función de la energía.
 - (c) ¿Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i \hbar$? ¿Cuánto vale el momento angular de las mismas? (n_i entero y \hbar constante).
12. Para el potencial $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$
- (a) Dibujar el diagrama de fases indicando las zonas de libración.
 - (b) Calcular las variables de ángulo y acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$.
 - (c) ¿Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?