Problema 4 Guía 2: Principio Variacional para resolver en forma aproximada problemas de Mecánica

P4. Considere el movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida al potencial: $V(x) = kx^2/2 + \beta x^4/4$ (potencial anharmónico). La solución de la ecuación de movimiento no se conoce, pero por la forma del potencial, el movimiento es periódico y pasa por $x = 0$ cada medio período, por lo que se prueba con una serie de Fourier de la forma:

$$x(t) = \sum_{n=1} b_n \sin n\omega t,$$

verificandose que en $t_1 = 0$ la partícula está en $x_1 = 0$ y que en $t_2 = \pi/\omega = \tau/2$ la partícula vuelve a $x_2 = 0$. Usar el principio de mínima acción considerando solamente el primer término en la serie de Fourier, para calcular el valor aproximado de la amplitud b en función de la frecuencia ω. Alternativamente exprese la dependencia del período del movimiento τ con la amplitud b. La solución exacta (calculada con un programa de manipulación algebraica) es:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\sqrt{1+z/2}}K\left(-1+\frac{2}{2+z}\right)$$

siendo K la denominada integral elíptica completa del primer tipo, $z = A^2\beta/k$ y A la amplitud del movimiento. Calcule los factores de corrección dependiente de $z = A^2\beta/k$, definidos por $\tau = \tau_0 f(z)$ donde $\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$ (τ_0 es el período sin término anharmónico), use que ($b \Leftrightarrow A$). Grafique dicho factor de corrección para el resultado variacional y para el resultado exacto para z entre $z = 0$ y $z = 4$. Notar que si bien el procedimiento se puede mejorar usando dos o más términos en la serie de Fourier, ya este cálculo es suficientemente bueno, lo que demuestra la potencia del método variacional.

Principio de Mínima Acción PMA:

El principio de Hamilton de mínima acción, establece:

La trayectoria $q(t)$ seguida por el sistema mecánico para ir entre dos extremos fijos: $q_1 = q(t_1)$ y $q_2 = q(t_2)$ es la que hace mínima (extrema) la acción:

$$S(q(t))) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)dt$$

La trayectoria exacta $q(t)$ es la que satisface las ecuaciones de Euler Lagrange, que es la que hace extrema la acción: estacionaria ante pequeños pero arbitrarios cambios $q(t) + \eta(t)$.

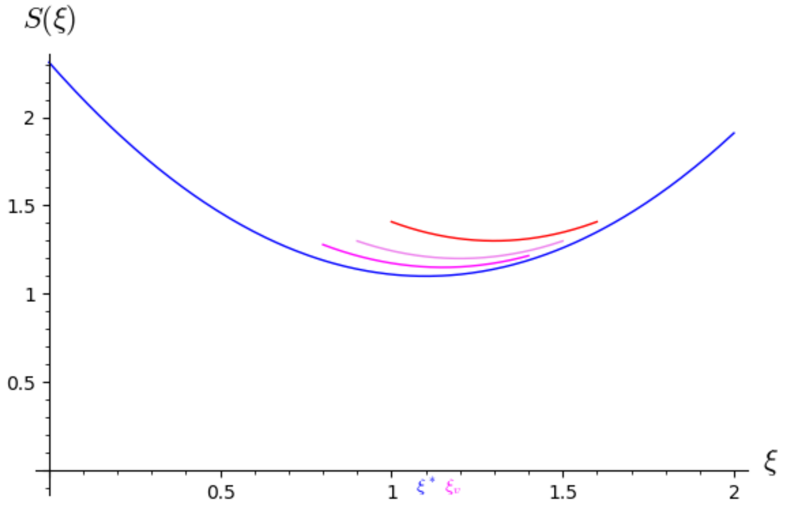
Una forma de usar el PMA para aproximar soluciones de problemas mecánicos es proponer un conjunto de trayectorias que dependen de uno o más parámetros, y que pasen por los extremos fijos. Al minimizar la acción S con respecto a dichos parámetros se obtendrá una trayectoria cercana a la exacta, pues S estaría "cerca" al mínimo exacto S^*.

Para visualizar esto se puede pensar que la funcional acción S es una función del espacio de trayectorias representado como un punto (multidimensional) ξ. La trayectoria que hace mínima S es ξ^*.

Una trayectoria aproximada ξ_{ap} nos dará un valor cercano al mínimo, pero no el valor exacto pues usa un subconjunto de todas las trayectorias posibles. Como la acción cerca a la trayectoria correcta varía en términos de segundo orden, si estamos suficientemente cerca la aproximación será buena.

In [116]:
```
x0=1.1
y0=1.1
y=plot( y0+ (x-x0)^2,(x,0,2),axes_labels=[r'$\xi$', r'$S(\xi)$'])
y+=plot(y0+0.2+1.2*(x-x0-0.2)^2,(x,1, 1.6),color='red')
y+=plot(y0+0.1+1.1*(x-x0-0.1)^2,(x,0.9, 1.5),color='violet')
y+=plot(y0+0.05+1.05*(x-x0-0.05)^2,(x,0.8, 1.4),color='magenta')
## txt= text('aproximado', (0.3,0.5),color='magenta')
txt=text(r"$\xi^*$", (1.1, -0.09), color='blue')
txt+=text(r"$\xi_v$", (1.18, -0.09), color='magenta')
y+txt
```

Out[116]:



En este problema queremo usar el PMA para encontrar solución aproximada del oscilador anharmónico.

$$\mathcal{L}(x(t),\dot{x}(t)) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{4} - \frac{\beta x^4}{2}$$

Proponemos trayectorias periódicas, antisimétricas con respecto a $x = 0$, y que pasan por el origen en $t_1 = 0$ y vuelve a pasar luego de medio período $t_2 = \pi/\omega$. Estos datos son los extremos fijos. Teniendo en cuenta esto proponemos:

$$x(t) = \sum_{n=1} b_n \sin(n\omega t)$$

podemos comprobar que $x(0) = x(\pi/\omega) = 0$.

En el presente problema usaremos sólo un término de la serie:

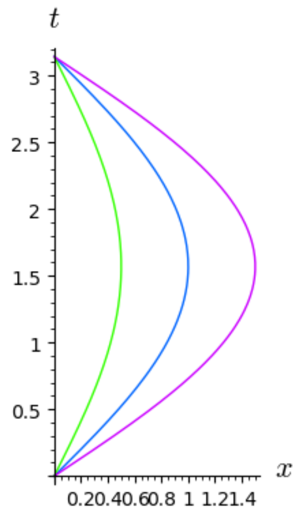
$$x(t) = b\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad x(t)^2 = \frac{b^2}{2}(1-\cos(2\omega t)) \quad \Rightarrow \quad x(t)^4 = \frac{b^4}{4}(1 - 2\cos(2\omega t) + \cos^2(2\omega t))$$

cálculos auxiliares:

$$\dot{x}(t) = b\omega\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t)^2 = \frac{b^2\omega^2}{2}(1+\cos(2\omega t))$$

In [141]:
```
a=1.
f(x)=a*sin(x)
g(x)=x
p1= parametric_plot((f,g), (0,3.141592), color=hue(0.6),axes_labels=[r'$x$', r'$t$']) # long time
a=0.5
f(x)=a*sin(x)
p2= parametric_plot((f,g), (0,3.141592), color=hue(0.3)) # long time
a=1.5
f(x)=a*sin(x)
p3= parametric_plot((f,g), (0,3.141592), color=hue(0.8)) # long time
p1+p2+p3
```

Out[141]:



Expresando la acción $S(b)$

$$S(b) = \int_0^{\pi/\omega} \mathcal{L}(x(t),\dot{x}(t))dt = \frac{m}{2}\int_0^{\pi/\omega} \dot{x}(t)^2 dt - \frac{k}{2}\int_0^{\pi/\omega} x(t)^2 dt - \frac{\beta}{4}\int_0^{\pi/\omega} x(t)^4 dt$$

Usamos que:

$$\int_0^{\pi/\omega} \dot{x}(t)^2 dt = b^2\omega^2\frac{\pi}{2\omega}$$
$$\int_0^{\pi/\omega} x(t)^2 dt = b^2\frac{\pi}{2\omega}$$
$$\int_0^{\pi/\omega} x(t)^4 dt = b^4\frac{3\pi}{8\omega}$$

Obteniendo:

$$S(b) = \frac{b^2\pi}{2\omega}\left(m\omega^2 - k - \frac{3}{8}\beta b^2\right)$$

$$S(b) = \frac{\pi}{2\omega}\left(m\omega^2 b^2 - kb^2 - \frac{3}{8}\beta b^4\right)$$

Imponemos la condición de extremo:

$$\frac{\partial S(b)}{\partial b} = \frac{\pi}{2\omega}\left(2bm\omega^2 - 2kb - \frac{3}{2}\beta b^3\right) = 0$$

Se obtiene dos soluciones:

- la solución trivial: $b = 0$.

- la solución : $b = \sqrt{\frac{4(m-\omega^2-k)}{3\beta}}$

De esta última solución se puede despejar la frecuencia ω en función de la amplitud b:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 + \frac{3b^2\beta}{2k}}$$

por lo que el período en función de amplitud aproximada b es:

$$\tau = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1+3z/2}} \quad z = \frac{b^2\beta}{k}$$

La solución exacta

Usando la conservación de la energía y el MATHEMATICA para evaluar una integral definida se puede calcular exactamente el período en función de la amplitud A:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\sqrt{1+z/2}} K\left(-1 + \frac{2}{2+z}\right)$$

siendo K la denominada integral elíptica completa del primer tipo, $z = A^2\beta/k$ y A la amplitud del movimiento.

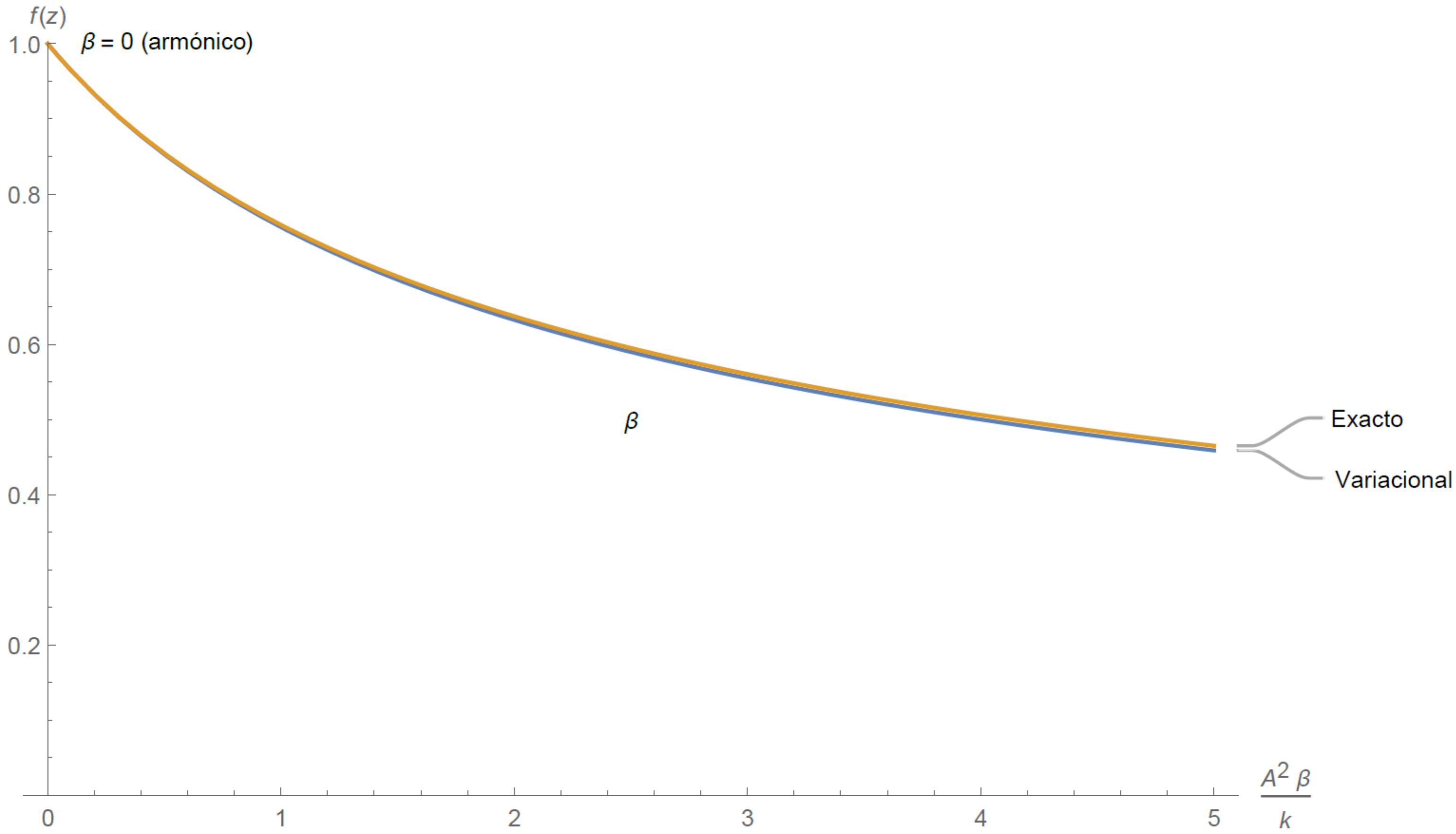
De esta expresión se obtiene la corrección anharmónica exacta:

$$f_{ex} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+z/2}} K\left(-1 + \frac{2}{2+z}\right)$$

Este valor exacto será comparado con la corrección anharmónica variacional:

$$f_{ap} = \frac{1}{\sqrt{1+3z/2}}$$

Aunque las fórmulas difieren bastante, la gráfica de ambas funciones son similares en un gran rango de valores de z, como se muestra en el dibujo (naranja:exacto, azul:variacional):



Cálculos algebraicos auxiliares

In [105]:
```
var('x,y')
f = (x^3 - sin(y)*x^2 - 5*x + 3)
g = f.series(x, 4);g
```

Out[105]:
```
3 + (-5)*x + (-sin(y))*x^2 + 1*x^3 + Order(x^4)
```

In [ ]:
```
### Expansión cálculo aproximado
var('k','m','z','pi')
f=(1/sqrt(1+(3/4)*z))
tau1=f.series(z,4).truncate()
tau=(2*pi/sqrt(k/m))*tau1
tau.expand().factor().show()
f=(1/sqrt(1+(3/4)*z))
fig1=plot(f,(z,0,1));fig1
```