

Primera Guía - Ejercicios 2 y 4

Ejercicio 2

Tanto en el Principio de Trabajos Virtuales como en el formalismo de Lagrange, la elección de coordenadas generalizadas resulta indispensable. No es posible utilizar estas herramientas si no se proporciona antes un conjunto de coordenadas generalizadas. Asimismo, la elección de las mismas puede incluso facilitar la resolución del problema. Lamentablemente, no existe una receta para elegir coordenadas generalizadas, así que esto es algo que hay que practicar. Dentro de las cosas que uno puede hacer para saber si eligió las coordenadas correctas es al menos chequear tener la cantidad suficiente y necesaria (ni más ni menos). A este *número de variables correctas* se lo denomina **grados de libertad del sistema** y se calcula como la diferencia entre el número de coordenadas necesarias para describir la posición de N partículas del sistema en un espacio D dimensional (es decir, DN) y el número de vínculos holónomos.

a) En este inciso, m_1 y m_2 se mueven en el plano de la mesa. Si consideremos al sistema inmerso en un espacio de tres dimensiones, el número de coordenadas que necesitamos para describirlo son 6 (tres direcciones cartesianas por cada partícula). En cuanto a los vínculos, tenemos que el movimiento de las partículas se da en un plano, así que podemos escribirlos de la siguiente manera:

$$z_1 = 0 \quad z_2 = 0 \quad (1)$$

Por lo tanto, el número de grados de libertad del sistema es 4.

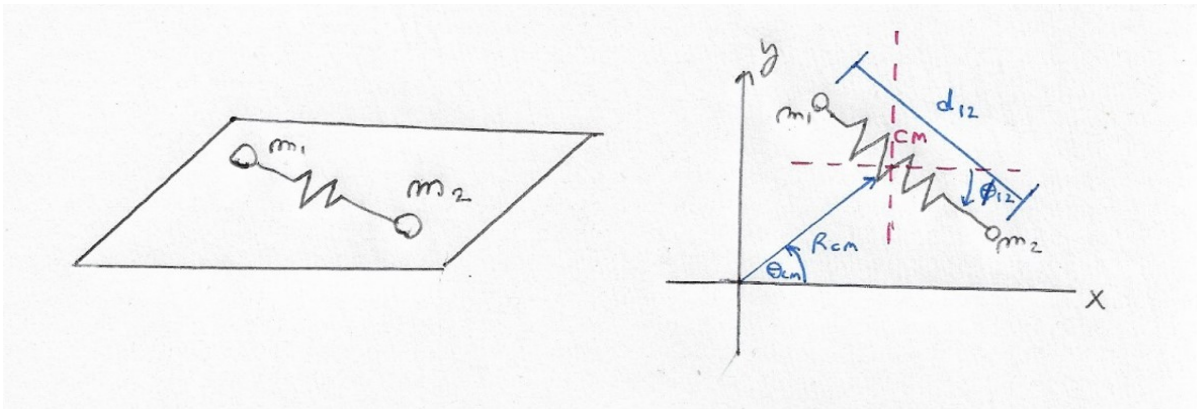


Figura 1

En este caso, elegir la posición del centro de masa $\mathbf{R}_{CM} = (R_{CM}, \theta_{CM})$ y la distancia entre las dos partículas $\mathbf{r}_{12} = (d_{12}, \phi_{12})$ desacopla la energía del sistema en dos términos (un uno

correspondiente al centro de masa y otro al de una masa efectiva $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$). Mientras que, elegir las posiciones cartesianas de las partículas nos deja con un potencial que acopla todas las coordenadas. Ambos conjuntos de coordenadas generalizadas son válidos y la elección de uno o de otro dependerá de quien quiera estudiar el sistema.

Podemos calcular la energía cinética y potencial en ambos casos. Usando que

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{CM} &= \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \\ d_{12} &= |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \\ \phi_{12} &= \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\end{aligned}\tag{2}$$

Vemos que

$$\begin{aligned}T &= \frac{m_1 + m_2}{2}(\dot{X}_{CM}^2 + \dot{Y}_{CM}^2) + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\dot{d}_{12}^2 + d_{12}^2 \dot{\phi}_{12}^2) \\ V &= \frac{k}{2} d_{12}^2\end{aligned}\quad \parallel \quad \begin{aligned}T &= \sum_{i=1}^2 (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \frac{m_i}{2} \\ V &= \frac{k}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]\end{aligned}\tag{3}$$

(e) En el caso donde P está fijo, tenemos nuevamente 2 partículas, por lo que necesitamos asociarles 3 coordenadas a cada una para describir su movimiento. Si asumimos que el movimiento se da en el plano xy , podemos escribir los siguientes vínculos:

$$\begin{aligned}z_1 &= 0 & r_1 &= l_1 = cte \\ z_2 &= 0 & r_2 &= l_2 = cte\end{aligned}\tag{4}$$

Notemos que es equivalente preestablecer que el espacio es bidimensional. En este caso, lo que tenemos es que necesitamos 2 coordenadas para describir la posición de cada partícula, y que además, éstas se encuentran en presencia de solo un vínculo cada una (largos de sogas constantes). El número de grados de libertad es igualmente 2. La única diferencia fue reemplazar la información de los vínculos por una reducción en la dimensión del espacio en la que se encuentra el sistema.

En este caso, una elección conveniente de las **dos** coordenadas generalizadas necesarias puede ser los ángulos que forman cada masa con respecto a la vertical $\{\theta_1, \theta_2\}$.

f) En este caso, la partícula posee **un único grado de libertad**, dado que, si bien su movimiento se encuentra contenido en un plano, podemos notar que la coordenada radial en polares se encuentra parametrizada por la ecuación de una elipse (y por lo tanto, es un vínculo holónomo). El vínculo es:

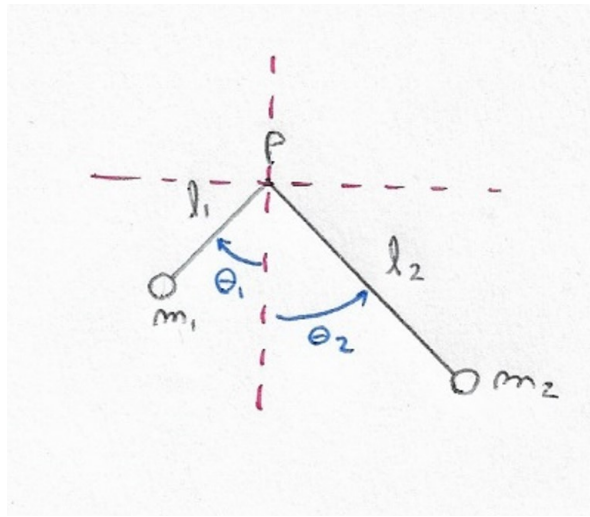


Figura 2

$$\mathbf{x}(\theta) = A\cos(\theta)\hat{\mathbf{x}} + B\sin(\theta)\hat{\mathbf{y}} \quad (5)$$

donde A es el radio mayor de la elipse, y B el menor (ver figura 3). Por lo tanto, basta utilizar el ángulo θ con respecto al eje \mathbf{x} como coordenada generalizada.

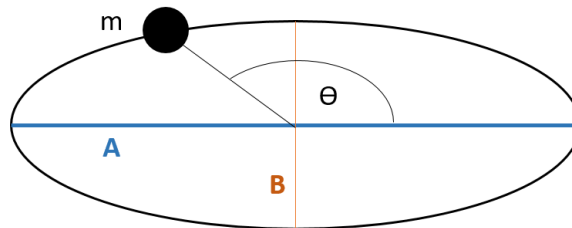


Figura 3

g) Tenemos una Máquina de Atwood que consta de dos masas m_1 y m_2 unidas por una soga de largo l y una polea de masa M .

Si consideramos que el movimiento se da en el plano, necesitamos dos coordenadas para dar la posición de cada masa. Además, necesitamos otras tres coordenadas para describir la posición de la polea: 2 coordenadas para ubicar a su centro de masa y 1 coordenada para indicar el ángulo de rotación con respecto a algún eje. En total, son necesarias 7 coordenadas. Si consideramos que las partículas solo se mueven a lo largo del eje y , que la polea se encuentra fija y que la longitud de la soga es constante, se restan 5 grados de libertad. Bajo estas consideraciones, los vínculos son

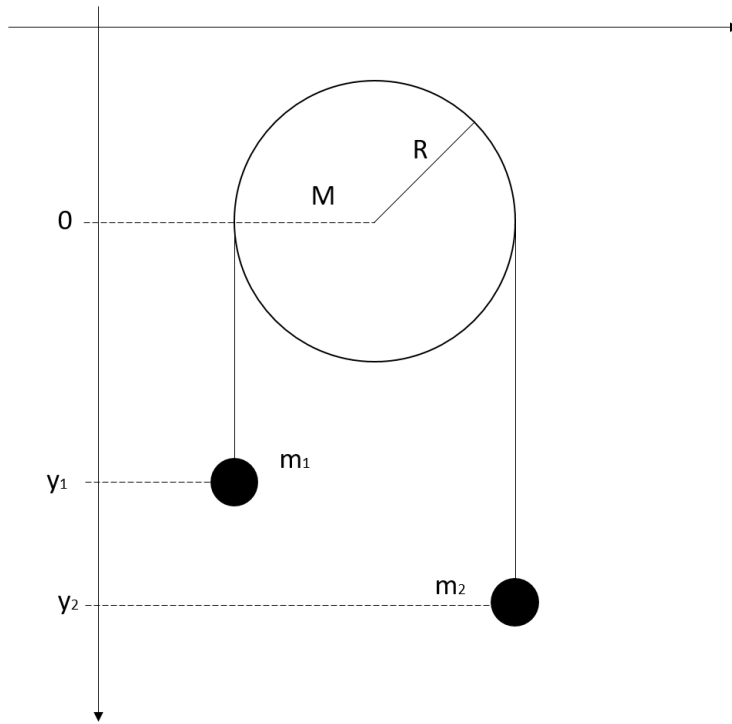


Figura 4

$$\begin{aligned}
 x_1 &= cte & y_p &= 0 & y_1 + y_2 + R\pi &= l \\
 x_2 &= cte & x_p &= 0 & &
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Existen dos casos posibles. Si la sogá **desliza**, entonces necesitamos dos coordenadas generalizadas, dado que los vínculos son los de la ec. 6. En ese caso, resulta conveniente elegir $\{y_1, \theta\}$. En el caso en que la sogá **no desliza**, se suma un vínculo más, que es la condición de rigidez:

$$\dot{y}_1 \hat{y} = -\dot{\theta} \hat{z} \times R \hat{x} \tag{7}$$

Entonces, basta utilizar $\{y_1\}$.

Ejercicio 4

La idea de este ejercicio es hallar las aceleraciones de las masas del sistema de poleas que puede verse en la figura 5a, utilizando distintos métodos:

- Ecuaciones de Newton y condiciones cinemáticas

- Principio de Trabajos Virtuales (PTV)
- Ecuaciones de Lagrange

En este PDF vamos a resolver (o al menos plantear) el problema utilizando los dos primeros métodos (el método de Lagrange lo dejamos para las próximas clases).

Inciso (a)

Para calentar motores, arranquemos por lo que ya sabemos hacer. Tratemos de encontrar las aceleraciones de las masas utilizando todas las herramientas que ya tenemos de Física 1. En la práctica usual, fijamos un sistema de referencia a partir del cual describiremos la dinámica del sistema y realizamos un diagrama de cuerpo libre (como se observa en la figura 1b).

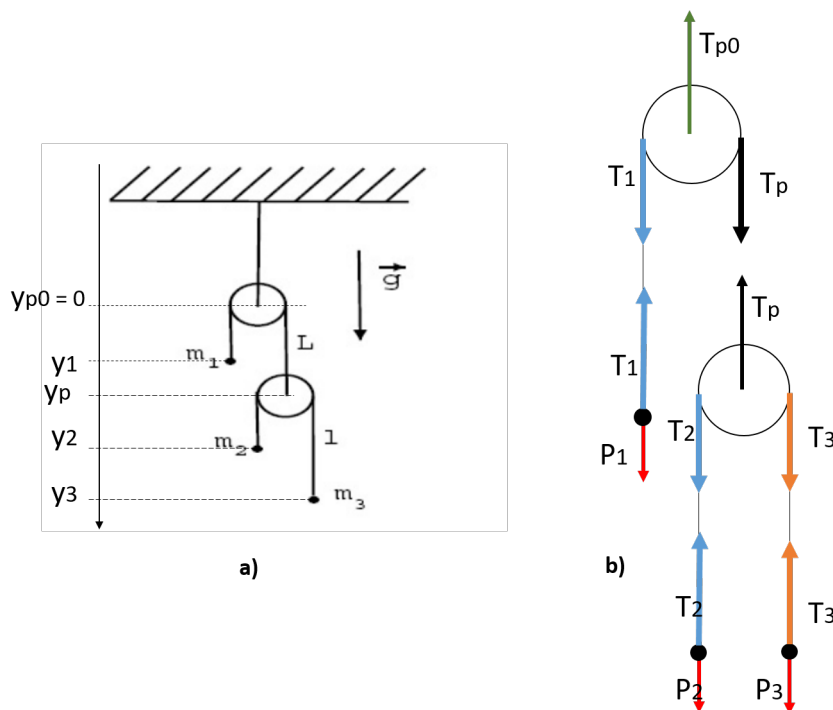


Figura 5: a) Esquema del problema con sistema de referencia. b) Diagrama de cuerpo libre del sistema (poleas sin masa despreciable)

(Nota: es importante notar acá que se asume un movimiento unidireccional a lo largo del eje vertical, y que la orientación del mismo coincide con la de la aceleración gravitatoria)

Identificadas todas las fuerzas, ya estamos en condiciones de escribir las ecuaciones de Newton,

$$\begin{array}{l}
\ddot{y}_1 m_1 = m_1 g - T_1 \\
\ddot{y}_2 m_2 = m_2 g - T_2 \\
\ddot{y}_3 m_3 = m_3 g - T_3
\end{array}
\left\| \begin{array}{l}
\ddot{y}_p M = gM - T_p + T_2 + T_3 \\
\ddot{y}_{p0} M \equiv 0 = gM - T_{p0} + T_1 + T_p
\end{array} \right\|
\begin{array}{l}
I\dot{\omega}_p \hat{z} = R\hat{x} \times (T_2 - T_3)\hat{y} \\
I\dot{\omega}_{p0} \hat{z} = R\hat{x} \times (T_1 - T_p)\hat{y}
\end{array}
\quad (8)$$

Donde $I = \frac{MR^2}{2}$ es el momento de inercia de ambas poleas.

A la izquierda, tenemos las ecuaciones de Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) para cada masa. En el centro, las ecuaciones de Newton para el centro de masa de cada polea. A la derecha, escribimos las ecuaciones para los torques con respecto al centro de masa de cada polea,

$$\frac{d\mathbf{L}^{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^M \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \quad (9)$$

Fíjense que conseguimos un sistema de 7 ecuaciones con 11 incógnitas, dentro de las cuáles podemos clasificar a:

1. Las 6 coordenadas que describen al sistema: $\{y_1, y_2, y_3, y_p, \theta_p, \theta_{p0}\}$
2. Las 5 fuerzas de vínculo asociadas: $\{T_1, T_2, T_3, T_p, T_{p0}\}$

No podremos resolver el sistema hasta que demos 4 ecuaciones más. La carta que nos queda usar viene dada por las condiciones de vínculo. Por un lado, asumimos que las sogas son inextensibles, por lo que cada una aporta su ecuación de vínculo correspondiente,

$$L - \pi R = y_1 + y_p \quad l - \pi R = (y_2 - y_p) + (y_3 - y_p) \quad (10)$$

Por el otro lado, suponemos también que la soga no desliza por la polea, por lo que podemos usar la condición de rigidez de ésta última para vincular la rotación de las poleas con la posición de las masas. La condición de rigidez y vínculos asociados vienen dados por:

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{v}_p + \omega \hat{z} \times (\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_p) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{y}_2 = \dot{y}_p - R\omega_p \\ \dot{y}_1 = -R\omega_{p0} \end{cases} \quad (11)$$

Ahora sí, ya tenemos toda la información que necesitamos para conocer las aceleraciones de las masas. Lo único que queda es arremangarse y resolver el *tan agradable sistema de 11 ecuaciones con 11 incógnitas*. Les dejo a ustedes como ejercicio resolver el sistema. En el problema se sigue resolver primero tomando la masa de las poleas como despreciables. Después de resolver todos los incisos siguientes, ahí proponen volver a plantearlo considerando que la masa no es despreciable. Fíjense que el planteo hecho hasta acá es sumamente general, dado que dejamos a las masas de las poleas (y por ende sus momentos de inercia asociados) como parámetros en las ecuaciones. Dado que el sistema es bastante extenso, conviene amigarse con el mismo resolviendo primero para $M = 0$. En este caso, uno llega a las siguientes relaciones (usando los vínculos y la ecuación de Newton para la polea p):

$$\begin{array}{l} -2\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3 \\ -\frac{\ddot{y}_1}{R} = \dot{\omega}_{p0} \\ -\frac{\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2}{R} = \dot{\omega}_p \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} T_1 = T_p \\ T_2 = T_3 \\ 2T_2 = T_1 \end{array} \right. \quad (12)$$

Con estas relaciones y las ecuaciones obtenidas, pueden chequear los siguientes resultados:

$$T_2 = 4g \left(\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_3 m_1 + 4m_2 m_3} \right) \quad (13)$$

$$\ddot{y}_1 = g \left(\frac{-4m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_3 m_1}{m_1 m_2 + m_3 m_1 + 4m_2 m_3} \right) \quad (14)$$

$$\ddot{y}_2 = g \left(\frac{-3m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_3 m_1 + 4m_2 m_3} \right) \quad (15)$$

$$\ddot{y}_3 = g \left(\frac{-3m_2 m_1 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_3 m_1 + 4m_2 m_3} \right) \quad (16)$$

Siempre está bueno utilizar los resultados a los que uno llega para analizar casos límite en los que uno sabe o al menos tiene una idea de cómo debería comportarse el sistema. Por ejemplo, para que todas las masas queden quietas, resulta razonable pedir que

$$m_1 = 2m_2 = 2m_3 \quad (17)$$

Vemos que de la ecuación 14, igualando el denominador a cero e igualando $m_2 = m_3 \equiv m$ llegamos a la siguiente relación

$$m_1 = \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3} = 2m \quad (18)$$

Pueden chequear las otras dos aceleraciones reemplazando el resultado en 15 y 16.

Lo otro que se puede chequear fácilmente es el límite en el que la masa m_1 es muy grande

con respecto al resto, y por ende, su aceleración positiva.

$$m_1 \gg m_2, m_3 \quad \longrightarrow \quad \ddot{y}_1 > 0 \quad (19)$$

Si en la ecuación 14 sacan factor común m_1 y toman el límite, verán que la partícula se acelera como en una caída libre.

$$\ddot{y}_1 \sim g \quad (20)$$

Inciso (b)

En esta sección se pide resolver exactamente el mismo problema pero utilizando el Principio de Trabajos Virtuales (PTV). Repasemos un poco qué nos dice este principio:

El conjunto de fuerzas que actúan sobre un sistema se puede separar en dos grupos: fuerzas **aplicadas** y fuerzas de **vínculo**. En el Capítulo 2 del apunte de Minotti se definen bien sus conceptos:

' La introducción de ligaduras en el sistema mecánico lleva al concepto de fuerza de vínculo, que es justamente la que se ejerce sobre la partícula para forzar el cumplimiento de la ligadura. Esta fuerza de vínculo se diferencia de la denominada fuerza aplicada que es aquella determinada independientemente de cualquier otra fuerza, dando sólo las posiciones (y a veces también las velocidades) de las partículas. '

La característica fundamental de las fuerzas de vínculo es que sus trabajos virtuales son nulos, de manera que

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ap} \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{vinc} \delta \mathbf{r}_i \quad (21)$$

Utilizando la segunda Ley de Newton llegamos a que

$$\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_i^{ap} - \dot{\mathbf{P}}_i \right) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (22)$$

La idea acá es poder reemplazar los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_i$ por desplazamientos virtuales independientes δq_j . Si recapitulamos la definición de **coordenada generalizada**, uno las puede pensar como el conjunto mínimo de variables a partir del cual se puede conocer la posición de cada elemento del sistema. Es muy importante entender que este conjunto de variables son **independientes**, por lo que podemos reescribir la ecuación 22 como

$$\sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{F}_i^{ap}(q_1, \dots, q_k) - \dot{\mathbf{P}}_i(q_1, \dots, q_k) \right) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \quad (23)$$

Como cada variable δq_j es independiente, cada término de la primer sumatoria tiene que anularse, obteniendo un número de ecuaciones igual al número de grados de libertad del sistema

(k). Dicho todo esto, vamos al ejercicio

Lo importante a la hora de utilizar esta herramienta es que podamos identificar las coordenadas generalizadas (que será importante en todo lo que hagamos en esta materia de ahora en más). Recapitulando un poco, identificamos en el sistema

1. Las 6 coordenadas que definen la posición (y rotación correspondiente en las poleas) de los cuerpos del sistema: $\{y_1, y_2, y_3, y_p, \theta_p, \theta_{p0}\}$
2. Los 4 vínculos holónomos (dos sogas tensas e inextensibles y que ambas cuerdas no deslizan de la polea).

Repasamos los vínculos escritos ya como desplazamientos virtuales:

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= -\delta y_p & \delta y_2 &= \delta y_p - R\delta\theta_p \\ 2\delta y_p &= \delta y_2 + \delta y_3 & \delta y_1 &= -R\delta\theta_{p0} \end{aligned} \tag{24}$$

Por lo tanto, necesitamos solo 2 coordenadas generalizadas. Elegimos entonces y_p y θ_p . Lo importante de esta elección es que sean realmente independientes. Se puede ver fácilmente que una rotación de la polea p puede darse independientemente de la altura y_p a la que se encuentre. Por ejemplo, no sería correcto elegir $\{y_1, y_p\}$ dado que ya que no nos dan información de las posiciones de las masas 2 y 3.

Básicamente, tenemos que reescribir la ecuación 22. Resulta fácil escribir los términos del principio de D'Alembert correspondientes a las masas ¿Pero qué hay de las poleas? ¿Sólo considero los desplazamientos virtuales de su centro de masa? La respuesta es **no**, hay que tener en cuenta el torque (si lo hay) sobre cada cuerpo rígido, sino estamos tirando información y los resultados van a ser erróneos. Dado un trabajo virtual, éste debe ser la variación de energía cinética en el correspondiente desplazamiento virtual. Entonces, hagamos este cálculo

(Nota: estoy asumiendo que el torque, si lo hay, se dará en la dirección normal al plano que contiene a la polea, dadas las consideraciones que tomé en cuenta)

$$\begin{aligned}
\delta T &= \delta \left(\frac{1}{2} M \sum_{i=1}^3 V_{i,CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = M \sum_{i=1}^3 V_{i,CM} \delta V_{i,CM} + I \omega \delta \omega \\
&= M \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial X_{i,CM}}{\partial t} \frac{\partial V_{i,CM}}{\partial X_{j,CM}} \delta X_{j,CM} + I \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \delta \theta \\
&= M \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial X_{i,CM}}{\partial X_{j,CM}} \frac{\partial V_{i,CM}}{\partial t} \delta X_{j,CM} + I \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \delta \theta = M \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{i,j} A_{i,CM} \delta X_{j,CM} + I \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \delta \theta \\
&= M \sum_{i=1}^3 A_{i,CM} \delta X_{i,CM} + I \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \delta \theta = M \mathbf{A}_{CM} \delta \mathbf{X}_{CM} + I \dot{\omega} \delta \theta
\end{aligned} \tag{25}$$

Usando las relaciones que ya conocemos, podemos escribir

$$(\mathbf{F} - M \mathbf{A}_{CM}) \delta \mathbf{X}_{CM} + (\tau - I \dot{\omega}) \delta \theta = 0 \tag{26}$$

Donde τ es el torque sobre la polea y \mathbf{F} la resultante sobre el centro de masa. Durante la clase a muchos les costó convencerse de por qué asocié el torque al trabajo virtual (y es válida la duda), así que les dejo un anexo con una deducción un poco más dura (a esta altura, no es necesario meter muchas energías en esto, pero lo dejo por si alguno tiene curiosidad).

La expresión 26 es válida para un sistema compuesto por un disco rígido que rota en el plano que lo contiene (casos más complejos hay que analizarlos en detalle, pero no será necesario en esta guía). Entonces, dada la característica aditiva de la ecuación 22, la forma de escribir el principio de trabajos virtuales es sumando las expresiones correspondientes a masas puntuales (ecuación 22) y la expresión de la ecuación 26 por cada cuerpo rígido. Consecuentemente, la ecuación para PTV nos queda

$$\sum_{i=3}^3 [m_i (\ddot{y}_i - g)] \delta y_i + [M (\ddot{y}_p - g)] \delta y_p + [I \dot{\omega}_p] \delta \theta_p + [I \dot{\omega}_{p0}] \delta \theta_{p0} = 0 \tag{27}$$

Notamos que en la ecuación no incluimos a las tensiones (ni a los torques) dado que éstos son (o dependen de, respectivamente) las fuerzas de vínculo del problema. En este punto, para terminar de convencerse de que la teoría funciona, pueden calcular el trabajo virtual correspondiente a las fuerzas de vínculo y notar que éste suma cero.

Solo nos queda escribir los desplazamientos y coordenadas en función de y_p y θ_p . De las ecuaciones de vínculo (ec. 24) podemos derivar las relaciones siguientes

$$\begin{aligned}
\delta y_1 &= -\delta y_p & \delta y_3 &= \delta y_p + R\delta\theta_p \\
\delta y_2 &= \delta y_p - R\delta\theta_p & \delta\theta_{p0} &= \frac{\delta y_p}{R}
\end{aligned}
\tag{28}$$

A partir de acá, pueden hacer la cuenta y verificar que se llega a la siguiente ecuación:

$$\left[\ddot{y}_p(m_1 + m_2 + m_3 + M + \frac{I}{R^2}) + g(m_1 - m_2 - m_3 - M) + \dot{\omega}_p R(m_3 - m_2) \right] \delta y_p +
\tag{29}$$

$$\left[\ddot{y}_p R(m_3 - m_2) + gR(m_2 - m_3) + \dot{\omega}_p(R^2 m_3 + R^2 m_2 - I) \right] \delta\theta_p = 0$$

Pueden ver que, usando PTV, llegamos a un conjunto de solo 2 ecuaciones con 2 incógnitas a partir del cual podemos describir la dinámica de todo el sistema. Estaría bueno chequear que el resultado al que llegamos es el mismo que obtenemos utilizando Newton.

En este PDF sólo les deje las aceleraciones para el caso en el que $M = 0$, $I = 0$, así que podemos tomar ese límite y ver que las aceleraciones son las mismas. Recordemos que cada término de la ecuación 29 está multiplicado por un desplazamiento independiente, por lo que deben anularse por separado. Si de cada término despejamos $\dot{\omega}_p$ e igualamos ambas ecuaciones, se obtiene

$$\frac{\ddot{y}_p(m_1 + m_2 + m_3) + g(m_1 - m_2 - m_3)}{m_2 - m_3} = \frac{\ddot{y}_p(m_2 - m_3) + g(m_3 - m_2)}{m_2 + m_3}
\tag{30}$$

Usando que

$$\begin{cases} \mu = m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3 \\ \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_p \end{cases}
\tag{31}$$

Llegamos a que

$$\ddot{y}_1 = -g \left(\frac{4m_2 m_3 - m_1 m_2 - m_1 m_3}{\mu} \right)
\tag{32}$$

Es momento de volver a la ecuación 14 y comparar...

Anexo

Deducción del trabajo virtual para un disco que rota en el plano que lo contiene y se acelera en \hat{y}

Consideramos que el disco de radio R y masa M se encuentra formado por N partículas elementales de masa Δm (tal que $\sum_i^N \Delta m = M$). Recordemos que dado un sistema de referencia inercial, siempre podemos reescribir las coordenadas de cada partícula elemental que lo forma en función de la suma del vector posición del centro de masa y la posición relativa de cada partícula con respecto al centro de masa. Por lo tanto

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{r}'_i \quad (33)$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{CM} + \omega \hat{z} \times \mathbf{r}'_i \quad (34)$$

Donde $\mathbf{v}'_i = \omega \hat{z} \times \mathbf{r}'_i$ dado que las partículas solo pueden tener un movimiento de rotación a radio constante (condición de rigidez) con respecto al centro de masa.

A partir de acá, y recordando que el trabajo virtual puede reescribirse como $\delta W = \dot{\mathbf{P}} \delta \mathbf{r}$, calculemos $\dot{\mathbf{P}}$

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i = M \dot{\mathbf{V}}_{CM} + \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\omega \hat{z} \times \mathbf{r}'_i) \Delta m = M \dot{\mathbf{V}}_{CM} + \sum_{i=1}^N [\dot{\omega} \hat{z} \times \mathbf{r}'_i + \omega \hat{z} \times (\omega \hat{z} \times \mathbf{r}'_i)] \Delta m \quad (35)$$

Recordamos que

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (36)$$

Entonces

$$\omega \hat{z} \times (\omega \hat{z} \times \mathbf{r}'_i) = \omega^2 \hat{z} (\hat{z} \cdot \mathbf{r}'_i) - \mathbf{r}'_i \omega^2 = -\mathbf{r}'_i \omega^2 \quad (37)$$

Ahora bien

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \Delta m}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_{CM} + \mathbf{r}'_i) \Delta m}{M} = \mathbf{R}_{CM} + \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \Delta m}{M} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i = 0 \quad (38)$$

Esto nos deja con lo siguiente

$$\dot{\mathbf{P}}_{CM} = M \dot{\mathbf{V}}_{CM} + \Delta m \sum_{i=1}^N \dot{\omega} \hat{z} \times \mathbf{r}'_i - \cancel{\omega^2 \sum_{i=1}^N \Delta m \mathbf{r}'_i} \quad (39)$$

Ahora, escribamos al desplazamiento virtual de la partícula elemental $\delta \mathbf{r}_i$ (recordando las ecuaciones 33 y 34) de la siguiente forma

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{y}_{CM} + \delta \theta \hat{z} \times \mathbf{r}'_i \quad (40)$$

Y a partir de acá tenemos que por la ec. 38 podemos tachar los siguientes términos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{V}}_{CM} (\delta \mathbf{y}_{CM} + \delta \theta \hat{z} \times \mathbf{r}'_i) + \Delta m \sum_{i=1}^N \dot{\omega} \hat{z} \times \mathbf{r}'_i (\delta \mathbf{y}_{CM} + \delta \theta \hat{z} \times \mathbf{r}'_i) \\ &= \dot{V}_{CM} \delta y_{CM} + \dot{\omega} \sum_{i=1}^N |\hat{z} \times \mathbf{r}'_i|^2 \delta \theta = \dot{V}_{CM} \delta y_{CM} + \dot{\omega} \sum_{i=1}^N \Delta m [r_i'^2 - (\hat{z} \mathbf{r}'_i)^2] \delta \theta \\ &= \dot{V}_{CM} \delta y_{CM} + \dot{\omega} I \delta \theta \end{aligned} \quad (41)$$

En realidad, el momento de inercia de un disco se define considerándolo como un continuo de partículas elementales de tal forma que $\Delta m \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ (es decir $\sum^N \Delta M \rightarrow \int \rho dV = M$).

$$\sum_{i=1}^N \Delta m [r_i'^2 - (\hat{z} \mathbf{r}'_i)^2] \sim \int \rho [r'^2 - (\hat{z} \mathbf{r}')^2] dx dy = I \quad (42)$$

y por lo tanto, el momento de inercia del disco es

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r'^2 r' dr' d\theta = \frac{MR^2}{2} \quad (43)$$